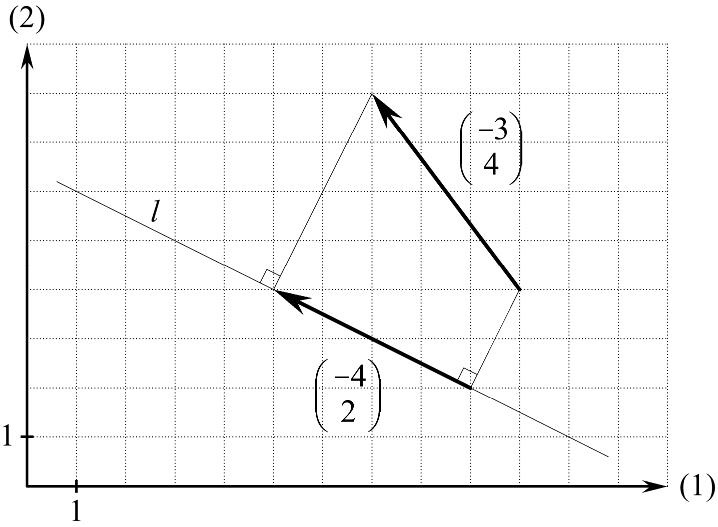
Vektorer
i planen

Et oplæg



2007 Karsten Juul

Dette hæfte er tænkt brugt som et oplæg der skal gennemgås før man begynder på en lærebogs fremstilling af emnet vektorer. Formålet med øvelserne er at eleverne skal få kendskab til det geometriske indhold, ikke at eleverne skal lære løsningsmetoder.

Øvelserne i dette hæfte får eleverne til at beskæftige sig med det geometriske indhold. Når eleverne har fået kendskab til det geometriske indhold, så bliver stoffet nemmere. Sædvanlige vektoropgaver løser elever ofte uden at beskæftige sig med det geometriske indhold. De løser nemlig typisk opgaverne ved blot at gentage udregninger i et tilsvarende eksempel.

Læreren skal ikke give eleverne metoder til at løse øvelserne i dette hæfte. Øvelserne er indrettet sådan at eleverne selv kan fumle sig frem til resultaterne. Derved får de et kendskab til det geometriske indhold som ikke opnås hvis de blot bruger lærerens metoder uden at være nødt til selv at se på figuren hvad der er rigtigt.

Når eleverne løser øvelserne i dette hæfte, skal de ikke skrive hvordan de er kommet frem til facitterne. (I en eksamensopgave eller en sædvanlig lærebogsopgave er det normalt underforstået at opgaven går ud på at forklare hvordan man kan regne sig frem til facit).

Vektorer i planen. Et oplæg.

1. udgave 2007

1. **Eksempel** om forskydning og vektor

Pilen på figur 1 viser en forskydning der fører punktet A over i punktet B. Det ses at

forskydningen er

3 i x-aksens retning

og

2 i y-aksens retning .

Pilen, der kaldes en <u>vektor</u>, har <u>koordinatsættet</u>

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Dette symbol <u>læses</u>

"tre komma to"

selv om der ikke er noget komma når koordinatsættet skrives lodret.

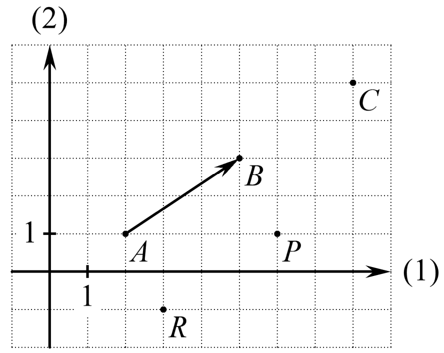
<u>Eksempler:</u>

Forskydning med $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører A over i B.

Forskydning med $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører B over i C.

Forskydning med $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører R over i P.

Forskydning med $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører R over i A.



Figur 1

Du skal forestille dig at pilen ligger løst oven på papiret, og at du kan flytte den, men ikke dreje den.

2. Øvelse

Se på figur 1.

a) Bestem $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ så forskydning med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ fører A over i C.

b) Bestem $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ så forskydning med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ fører P over i A.

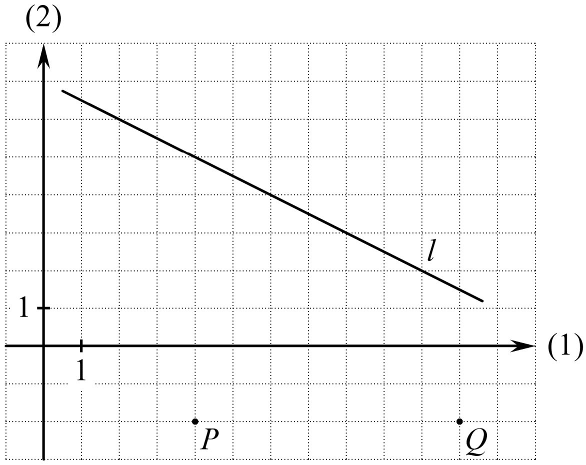
c) Bestem $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ så forskydning med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ fører A over i P.

d) Bestem $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ så forskydning med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ fører B over i A.

e) Bestem det punkt (s,t) som A føres over i ved forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

f) Bestem det punkt (s,t) som ved forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ føres over i A.

3. Øvelse



Figur 2

Se på figur 2.

a) Bestem det punkt (s,t) som P føres over i ved forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Bestem det punkt (s,t) som P føres over i ved forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) Bestem h så P ved forskydning med $\begin{pmatrix} h \\ 5 \end{pmatrix}$ føres over i et punkt på linjen l.

d) Bestem k så P ved forskydning med $\begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix}$ føres over i et punkt på linjen l.

e) Hvis $c = 2$, hvilket punkt (s,t) vil Q så føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix} c\cdot(-2) \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$.

f) Bestem c så Q ved forskydning med $\begin{pmatrix} c\cdot(-2) \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$ føres over i et punkt på linjen l.

g) Bestem nogle punkter (s,t) som ved forskydning med $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ føres over i et punkt på linjen l.

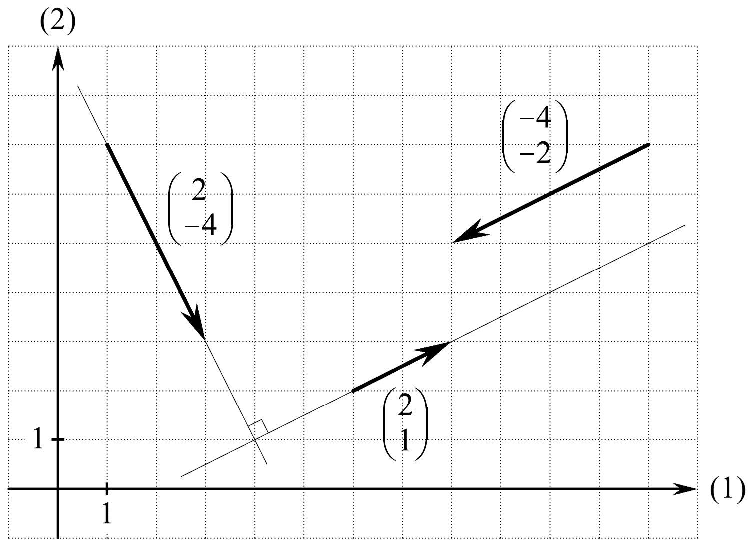
4. Eksempel om parallel og vinkelret.

På figur 3 ses at

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er parallel med $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

og at

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er vinkelret på $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.



Figur 3

5. Øvelse

Se på figur 4.

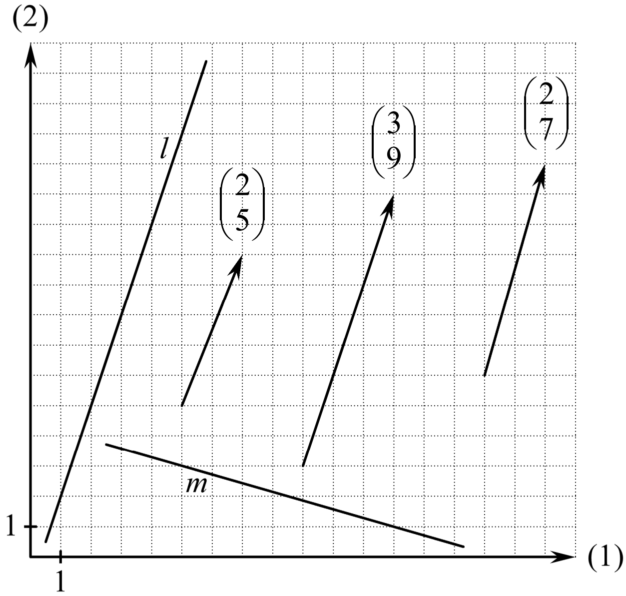
a) Hvilken af de viste vektorer er parallel med linjen l.

b) Hvilken af de viste vektorer er vinkelret på linjen m.

c) Bestem k så $\begin{pmatrix} 6 \\ k \end{pmatrix}$ er vinkelret på linjen l.

d) Bestem h så $\begin{pmatrix} h \\ -1 \end{pmatrix}$ er parallel med linjen m.

e) Bestem k så $\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}$ er parallel med $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.



Figur 4

6. Øvelse

a) Tegn figur 5 på kvadreret papir og afsæt i dette koordinatsystem

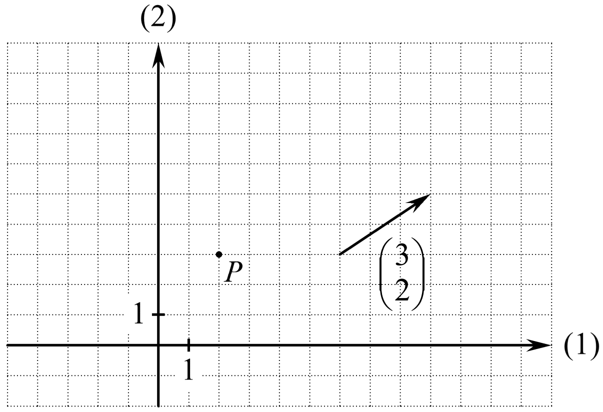
– Det punkt som P føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

– Det punkt som P føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix} c\cdot 3 \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$ når $c = 3$.

– Det punkt som P føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix} c\cdot 3 \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$ når $c = -2$.

b) Bestem det punkt (s,t) som P føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix} c\cdot 3 \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$ når $c = 10$.

c) Bestem udtrykt ved c punktet (s,t) som P føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix} c\cdot 3 \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$.



Figur 5

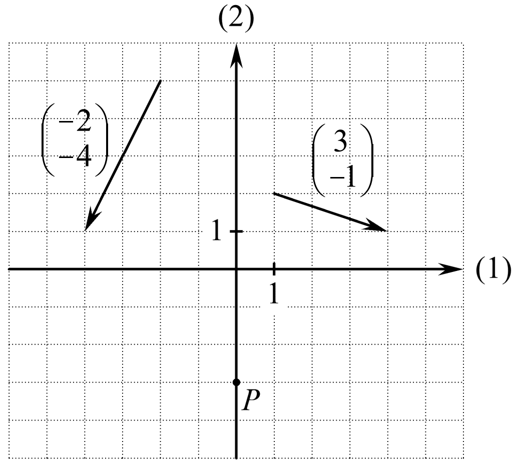
7. Øvelse

Se på figur 6.

a) Bestem t så linjen gennem P og $(-3, t)$ er vinkelret på $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

En linje l er vinkelret på $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Bestem h så $\begin{pmatrix} h \\ 2 \end{pmatrix}$ er vinkelret på l.



Figur 6

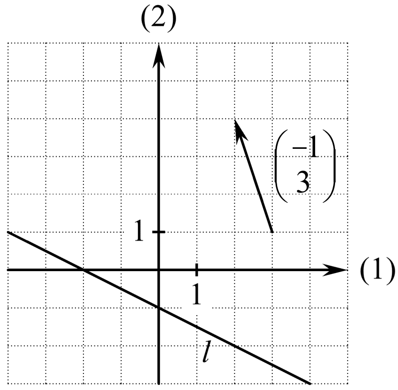
8. Øvelse

Se på figur 7.

Ved forskydning med $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ føres linjen l over i en linje m.

a) Tegn i samme koordinatsystem linjerne l og m.

b) Bestem en vektor $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ vinkelret på $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ så l ved forskydning med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ føres over i m.



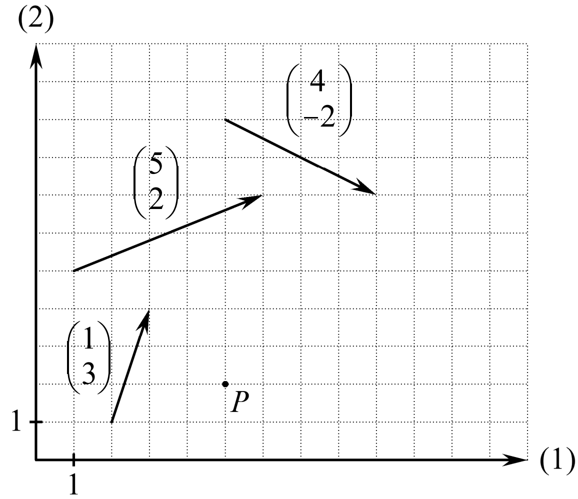
Figur 7

9. Øvelse

Se på figur 8.

Et punkt der starter i P forskydes først med $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Derefter forskydes det videre med $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Hvor meget er punktet i alt forskudt mod højre? Og hvor meget er punktet i alt forskudt opad? Skriv koordinatsættet til vektoren der svarer til denne forskydning.



Figur 8

Et punkt forskydes først med $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Derefter forskydes det videre med $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

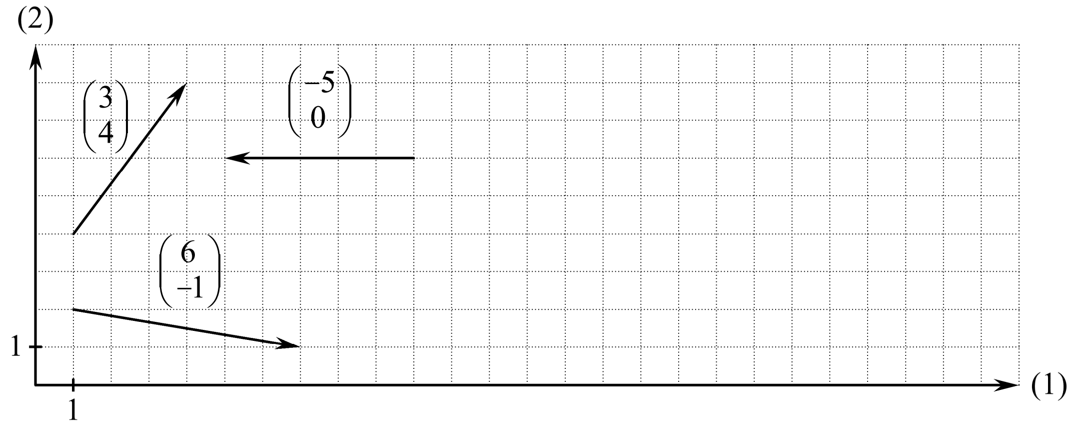
b) Hvor meget er punktet i alt forskudt mod højre? Og hvor meget er punktet i alt forskudt opad? Skriv koordinatsættet til vektoren der svarer til denne forskydning.

10. Øvelse

Se på figur 9.

a) Bestem $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$, og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, så er punktet i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Bestem $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, så er punktet i alt forskudt med $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.



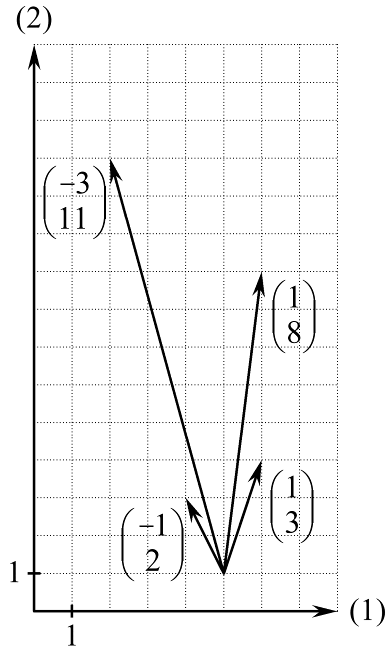
Figur 9

11. Øvelse

Se på figur 10.

a) Bestem tallet c sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} c\cdot(-1) \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$, så er punktet i alt forskudt med $\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

b) Bestem tallene s og t sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} s\cdot 1 \\ s\cdot 3 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} t\cdot(-1) \\ t\cdot 2 \end{pmatrix}$, så er det i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.



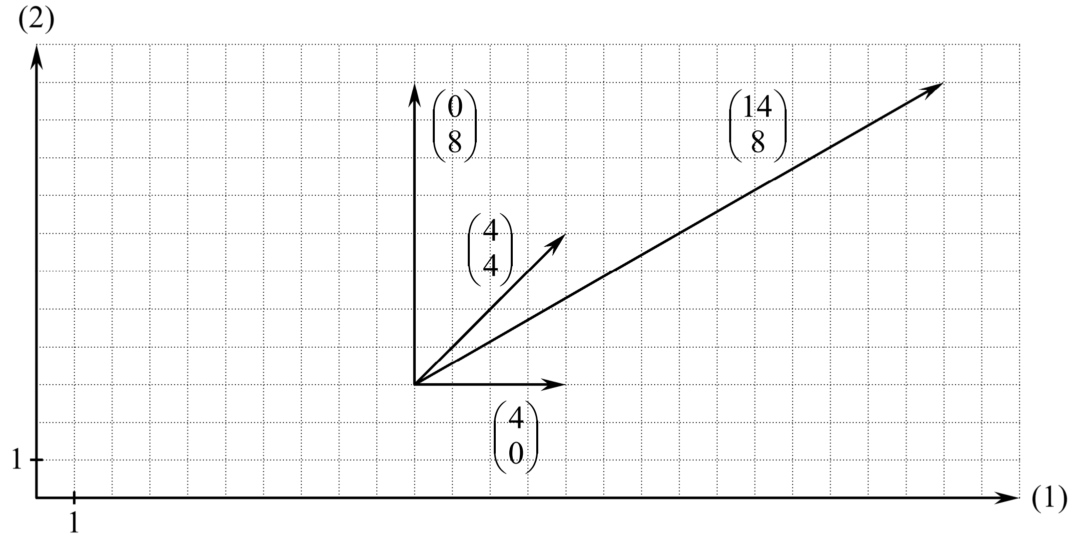
Figur 10

12. Øvelse

Se på figur 11.

a) Bestem tallene s og t sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} s \cdot 4 \\ s \cdot 0 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} t \cdot 4 \\ t \cdot 4 \end{pmatrix}$, så er det i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) Bestem tallene s og t sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} s \cdot 4 \\ s \cdot 0 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} t \cdot 4 \\ t \cdot 4 \end{pmatrix}$, så er det i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.



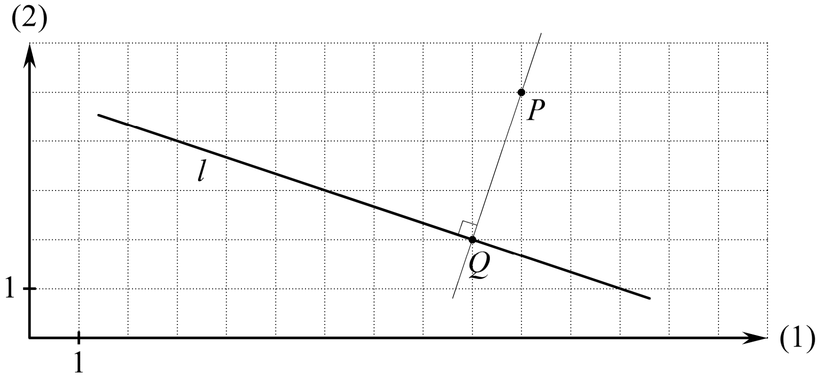
Figur 11

13. Eksempel om projektion af punkt på linje

På figur 12 er vist:

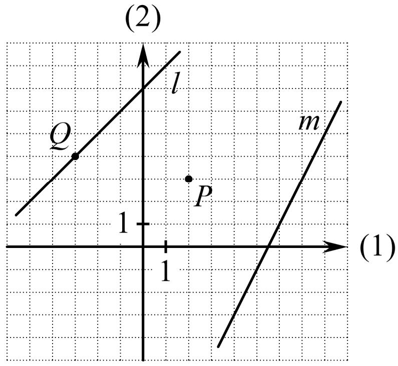
Projektionen af punktet P på linjen l er punktet Q.

For at finde projektionen af P på l kan man tegne den linje som går gennem P og er vinkelret på l. Skæringspunktet mellem denne linje og l er projektionen af P på l.



Figur 12

14. Øvelse



Figur 13

Se på figur 13.

a) Bestem koordinatsættet til projektionen af punktet P på linjen l.

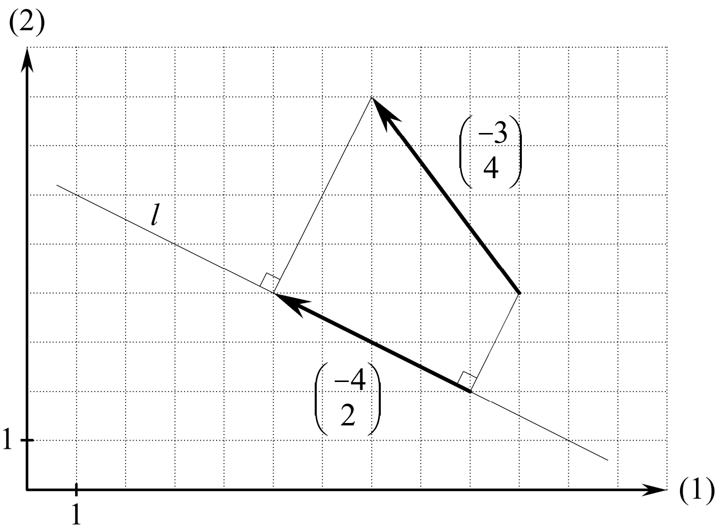
b) Bestem koordinatsættet til projektionen af punktet P på linjen m.

c) Bestem koordinatsættet til det punkt på m hvis projektion på l er Q.

15. Eksempel om projektion af vektor på linje

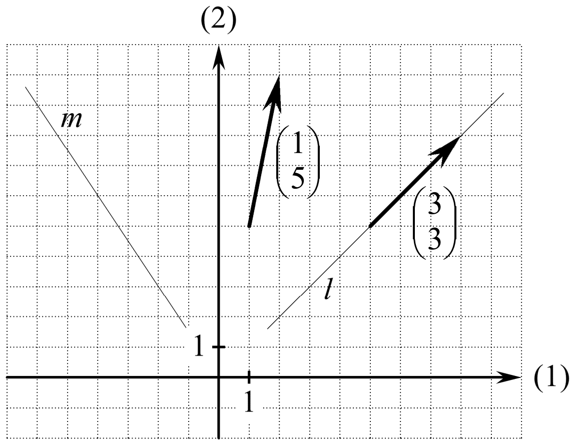
På figur 14 er vist:

Projektionen af vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ på linjen l er vektoren $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figur 14

16. Øvelse



Figur 15

Se på figur 15.

a) Bestem koordinatsættet til projektionen af vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ på linjen l.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ på linjen m.

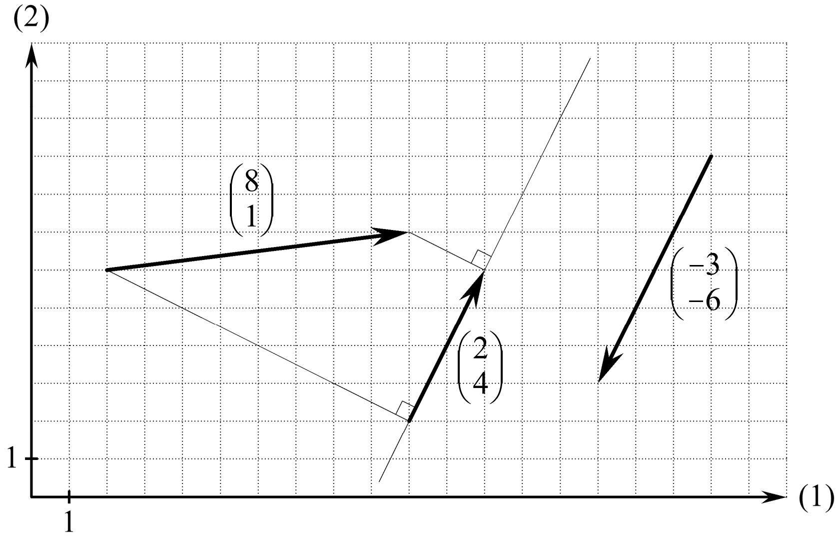
c) Bestem tre koordinatsæt for vektorer hvis projektion på l er $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

17. Eksempel om projektion af vektor på vektor

På figur 16 er vist:

Projektionen af vektoren $\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ på vektoren $\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ er vektoren $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Ved projektion af vektorer er projektionen på $\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ det samme som projektionen på en linje der er parallel med $\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$.

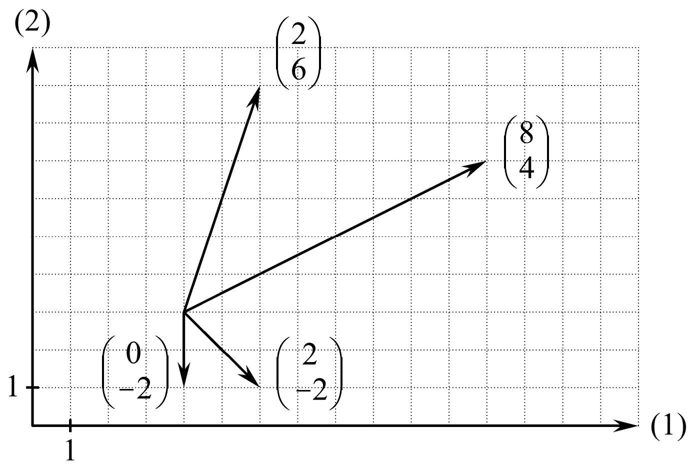


Figur 16

18. Øvelse

Se på figur 17.

Bestem koordinatsættet til projektionen af $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ på hver af vektorerne $\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.



Figur 17

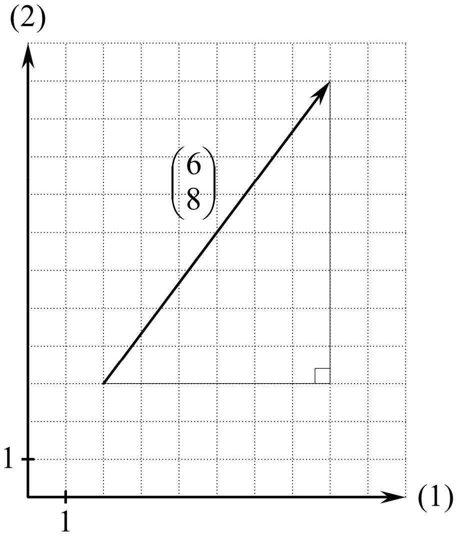
19. Øvelse

Se på figur 18.

a) Brug Pythagoras' sætning til at bestemme længden af vektoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) Når $c = \frac{1}{2}$, hvad er så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot 6 \\ c \cdot 8 \end{pmatrix}$.

c) Bestem c så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot 6 \\ c \cdot 8 \end{pmatrix}$ er 1.



Figur 18

20. Øvelse

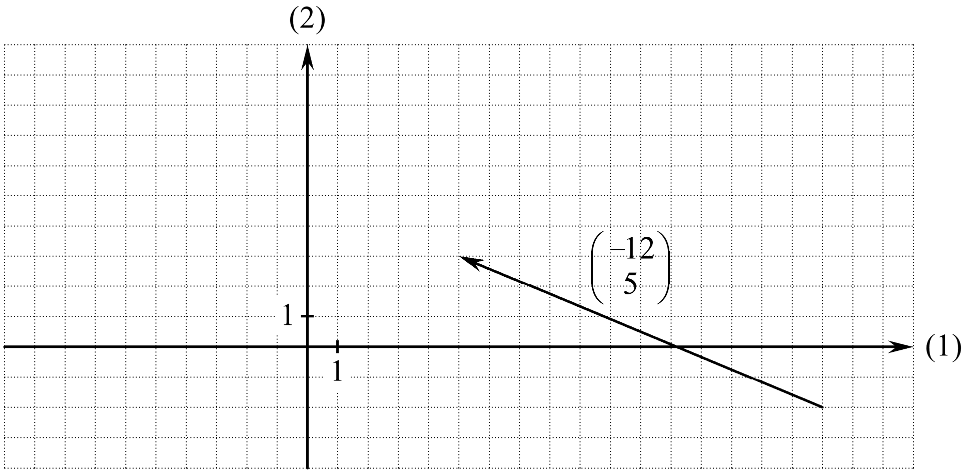
Se på figur 19.

a) Bestem længden af $\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Når $c = 2$, hvad er så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot (-12) \\ c \cdot 5 \end{pmatrix}$?

c) Bestem c så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot (-12) \\ c \cdot 5 \end{pmatrix}$ er 1.

d) Bestem c så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot (-12) \\ c \cdot 5 \end{pmatrix}$ er 7 .



Figur 19

21. Øvelse

På figur 20 er vist en pil der går fra $E(2,1)$ til $B(6,4)$. Pilespidsens længde og bredde er $|AB| = 1$ og $|CD| = 1$.

a) E føres over i B ved forskydning med en vektor. Bestem vektorens koordinatsæt.

b) Beregn længden af denne vektor.

c) Beregn længden $|EA|$ ved hjælp af svaret på foregående spørgsmål og oplysningen om pilespidsens længde.

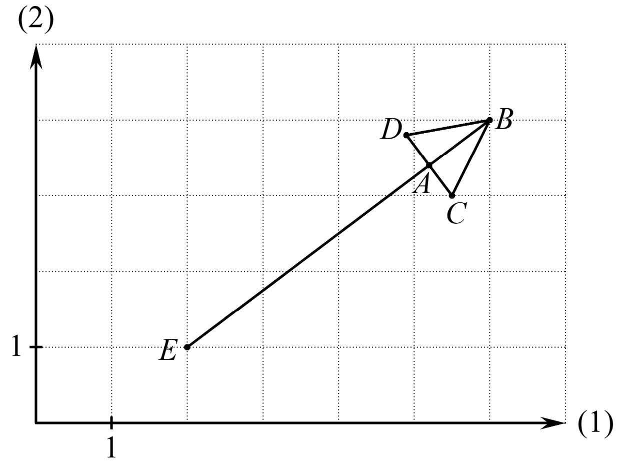
d) E føres over i A ved forskydning med en vektor. Bestem vektorens koordinatsæt ved at bruge svarene på de tre foregående spørgsmål.

e) Bestem koordinatsættet til A ved bl.a. at bruge svaret på foregående spørgsmål.

f) Bestem koordinatsættet til en vektor der er vinkelret på linjestykket EB.

g) Beregn koordinatsættet til D ved bl.a. at bruge svarene på de to foregående spørgsmål.

h) Beregn koordinatsættet til C.



Figur 20