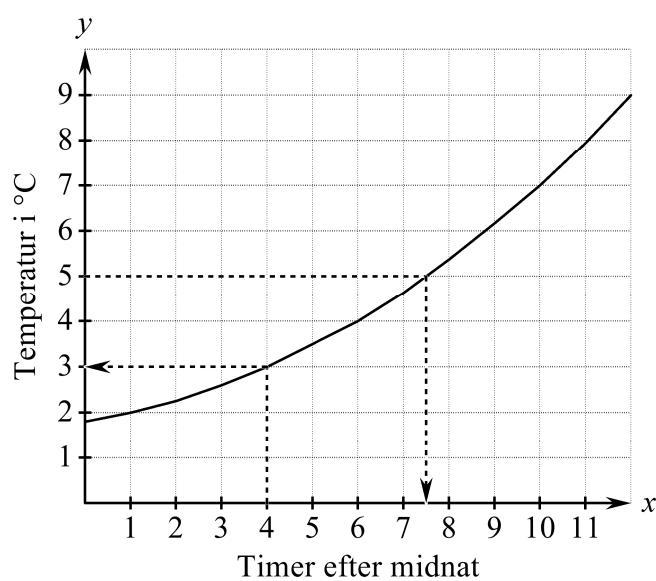


Variabel- sammenhænge

Udgave 2



2009 Karsten Juul

Dette hæfte kan bruges som start på undervisningen i variabelsammenhænge for stx og hf. Hæftet er en introduktion til at kunne behandle to sammenhængende variable størrelser med brug af tabeller, grafer og regneudtryk.

Før man læser dette hæfte kan man fx læse hæftet "Simple udtryk og ligninger" fra www.mat1.dk.

Indhold

1. Hvordan viser en tabel sammenhængen mellem to variable?.....	1
2. Hvordan viser en graf sammenhængen mellem to variable?.....	5
3. Hvordan viser en ligning sammenhængen mellem to variable?	9
4. Sammenhæng mellem graf og ligning	14
5. Voksende og aftagende sammenhænge	18

Variabelsammenhænge

2. udgave 2009

© 2008, 2009 Karsten Juul

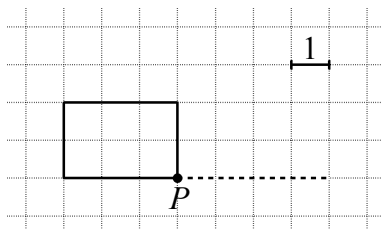
Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om hold, lærer og skole.

Afsnit 1. Hvordan viser en tabel sammenhængen mellem to variable?

Øvelse 1.1

På en skærm er der et rektangel:



Når vi trækker punktet P mod højre eller venstre, så ændres rektanglets bredde og højde.

x = bredden af rektanglet

y = arealet af rektanglet

På figuren ovenfor ser vi:

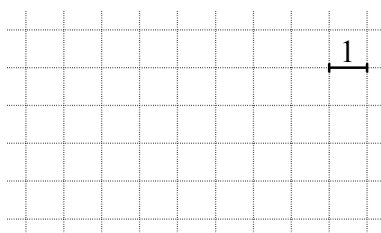
Når $x = 3$ er $y = 6$.

Du skal ikke udfylde tabellen nu.
Du får flere oplysninger.

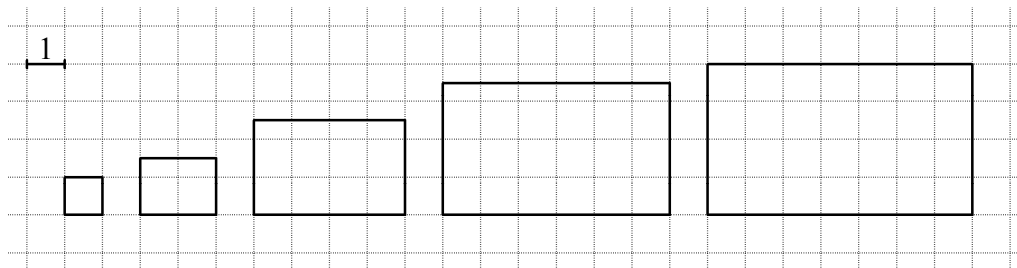
Dette kan vi skrive i en tabel sådan:

x :			3		5		
y :			6		15		

(a) I tabellen står der en oplysning til. Tegn rektanglet der svarer til denne oplysning:



Vi trækker i P og får efter tur følgende rektangler frem:



(b) For hvert af disse rektangler skal du bestemme værdien af x og den tilhørende værdi af y .
Skriv resultaterne i tabellen ovenfor.

Øvelsen fortsætter på næste side!

(c) Brug tabellen til et finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

Når vi ændrer x fra 2 til 4, så vil y blive ændret fra _____ til _____ .

Når vi ændrer x fra 2 til 4, så vil y blive _____ enheder større.

Når x er 3 og vi gør x 4 enheder større, så vil y blive _____ enheder større.

Når x er 3 og vi gør x _____ enheder større, så vil y blive 9 enheder større.

Øvelse 1.2

I øvelse 1 ændrede vi et rektangel ved at trække i et punkt P . Vi vil stadig ændre dette rektangel, men nu ser vi på bredde og omkreds:

x = bredde

y = omkreds

(a) Udfyld tabellen:

x :	1	2	3	4	5	6	7
y :							

(b) Brug tabellen til et finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

Når vi ændrer x fra 3 til 6, så vil y blive ændret fra _____ til _____ .

Når vi ændrer x fra 3 til 6, så vil y blive _____ enheder større.

Når x er 4 og vi gør x 2 enheder større, så vil y blive _____ enheder større.

Når x er 2 og vi gør x _____ enheder større, så vil y blive 12 enheder større.

Eksempel 1.3

En dag målte vi temperaturen flere gange.

Tabellen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x :	8	9	10	11	12	13	14	15
y :	9	10	12	14	15	16	18	20

x = antal timer efter midnat

y = temperaturen målt i °C

Spørgsmål (a): Hvad er temperaturen kl. 10?

Svar: I tabellen ser vi:

Når x er 10, er y lig 12.

Dvs.

kl. 10 er temperaturen 12 °C .

Eksemplet fortsætter på næste side!

Spørgsmål (b): Hvornår er temperaturen $14\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Svar: I tabellen ser vi:

Når y er 14, er x lig 11.

Dvs.

kl.11 er temperaturen $14\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Spørgsmål (c): Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 13 til kl. 15?

Svar: I tabellen ser vi:

Når x er 13, er y lig 16.

Når x er 15, er y lig 20.

Da $20 - 16 = 4$, gælder:

Fra kl.13 til kl.15 stiger temperaturen med $4\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Øvelse 1.4

I eksempel 1.3 kan man stille spørgsmålet

(a) Hvornår er temperaturen $10\text{ }^{\circ}\text{C}$?

- (1) I spørgsmål (a) får vi oplyst tallet 10. Er dette tal x eller y eller ingen af delene?
- (2) I spørgsmål (a) spørges om et tal. Er dette tal x eller y eller ingen af delene?
- (3) Hvad er svaret på (a).
- (4) Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 12 til kl. 15 ?
- (5) Hvor mange enheder bliver y større når x ændres fra 10 til 13?

Øvelse 1.5

En bestemt vare fås i 8 længder. Tabellen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = længde i cm

y = pris i kr.

x :	10	11	12	13	14	15	16	17
y :	28	32	36	41	47	53	59	66

- (1) Hvad er prisen når længden er 12 cm?
- (2) Hvis det er oplyst at prisen er over 50 kr., hvad ved vi så om længden?
- (3) Hvor meget mere skal man betale hvis man i stedet for en vare på 11 cm køber en vare på 14 cm?

Øvelse 1.6

Figurene A-D viser 4 opgavetyper.

x	?
y	kendt

A

x	—	+?	→
y	kendt		kendt

B

x	kendt
y	?

C

x	kendt		kendt
y	—	+?	→

D

- (1) For hver af spørgsmålene (a), (b) og (c) i eksempel 1.3 skal du finde ud af om den er type A, B, C eller D.

En af de fire typer forekommer ikke blandt spørgsmålene (a), (b) og (c).

- (2) Skriv en opgave af den manglende type. Opgaven skal dreje sig om eksempel 1.3 .
- (3) Skriv en besvarelse af den opgave du lavede i spørgsmål (2).

Øvelse 1.7

Tabellen viser for nogle dyr sammenhængen mellem følgende to variable:

x = dyrets længde (målt i cm)

y = dyrets vægt (målt i gram)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	14	19	23	27	30	33	36

Du skal skrive to opgaver om dyrets længde og vægt. Opgaverne skal være af typerne A og D fra øvelse 1.6 . Skriv også en besvarelse af hver af de to opgaver.

Øvelse 1.8

- (a) Tabellen viser sammenhængen mellem to variable y og x .

Når vi ændrer x fra 1 til 2 , så vil y blive _____ enheder større.

Når vi ændrer x fra 2 til 3 , så vil y blive _____ enheder større.

Når vi ændrer x fra 3 til 4 , så vil y blive _____ enheder større.

x	1	2	3	4
y	11	14	18	24

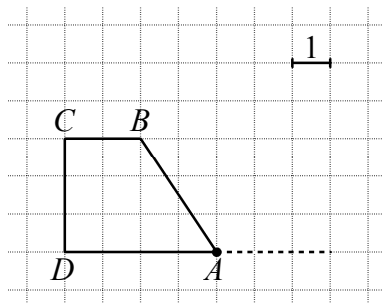
- (b) I (a) lod vi x vokse i skridt af størrelse 1 enhed, og vi så at stigningen i y blev større og større. Udfyld tabellen til højre så stigningen i y bliver mindre og mindre (samtidig med at y bliver større og større).

x	1	2	3	4
y	12	14		

Afsnit 2. Hvordan viser en graf sammenhængen mellem to variable?

Øvelse 2.1

På en skærm er der en figur:

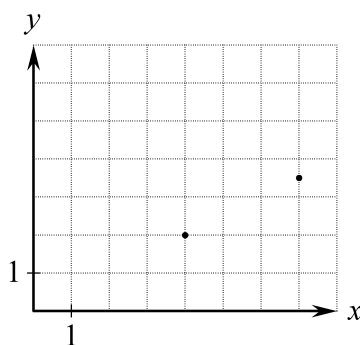


Når vi trækker punktet A mod højre eller venstre, så ændres figuren.

$$x = \text{længden af } AD \quad y = \text{længden af } BC$$

På figuren ovenfor ser vi: Når $x = 4$ er $y = 2$.

Dette kan vi angive med et punkt i et koordinatsystem (den venstre af de to prikker):



- (a) Hvor lang har vi gjort siden AD for at få figuren der svarer til punktet til højre? Hvor lang er siden BC på denne figur?

Ved at ændre figuren på skærmen kan vi få flere oplysninger så vi kan afsætte flere punkter i koordinatsystemet. Alle punkter vi kan afsætte på denne måde, udgør den graf der viser sammenhængen mellem de to variable størrelser x og y .

- (b) Det viser sig at alle punkterne ligger på samme rette linje, og at x kan være alle tal fra og med 2 til og med 7 (ikke kun hele tal). Tegn grafen der viser sammenhængen mellem x og y .

- (c) Brug grafen til af finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

Når x er 3, er y lig _____ .

Når vi ændrer x fra 3 til 5, så vil y blive ændret fra _____ til _____ .

Når vi ændrer x fra 3 til 5, så vil y blive _____ enheder større.

Når x er 2 og vi gør x 3 enheder større, så vil y blive _____ enheder større.

Når x er _____ , så er y lig 1,75 .

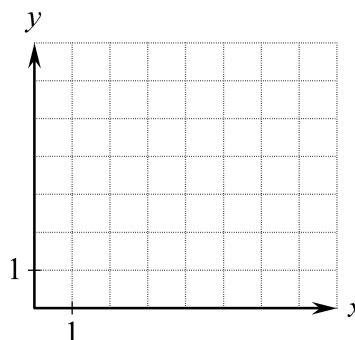
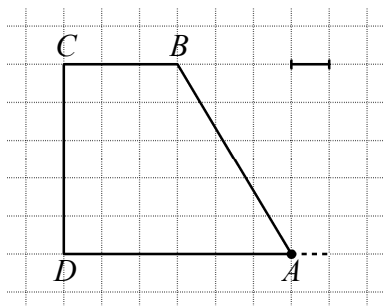
Øvelse 2.2

I øvelse 2.1 ændrede vi en figur ved at trække i et punkt A . Vi vil stadig ændre denne figur, men nu ser vi på længderne af AD og CD :

x = længden af AD

y = længden af CD

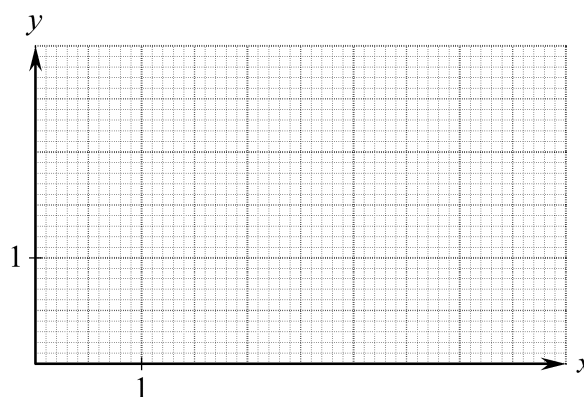
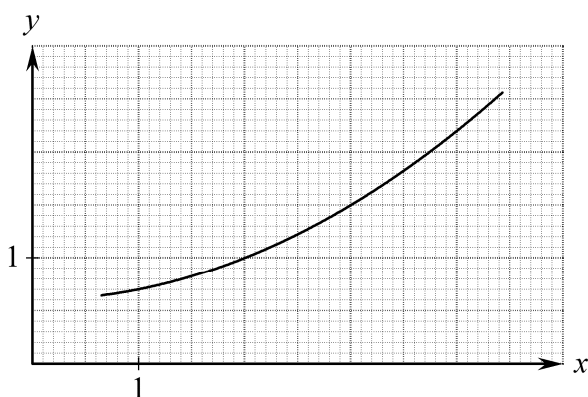
- (a) Ved at trække i A kan vi få nedenstående figur frem. I koordinatsystemet nedenfor skal du afsætte to punkter på den graf der viser sammenhængen mellem x og y . (Du er nødt til også at bruge oplysninger fra øvelse 2.1).



- (b) Det viser sig at alle punkter på grafen ligger på samme rette linje. Tegn grafen (og husk at x ikke kan være alle tal).
- (c) Udfyld de tomme pladser:
Når x er 4,5, er y lig _____.
Når x er _____, er y lig 5.
Når vi ændrer x fra 2,5 til 4, så vil y blive _____ enheder større.

Øvelse 2.3

- (a) Grafen viser sammenhængen mellem to variable y og x .
Når vi ændrer x fra 1 til 2, så vil y blive _____ enheder større.
Når vi ændrer x fra 2 til 3, så vil y blive _____ enheder større.
Når vi ændrer x fra 3 til 4, så vil y blive _____ enheder større.
- (b) I (a) lod vi x vokse i skridt af størrelse 1 enhed, og vi så at stigningen i y blev større og større. Tegn en graf så stigningen i y bliver mindre og mindre (samtidig med at y bliver større og større).

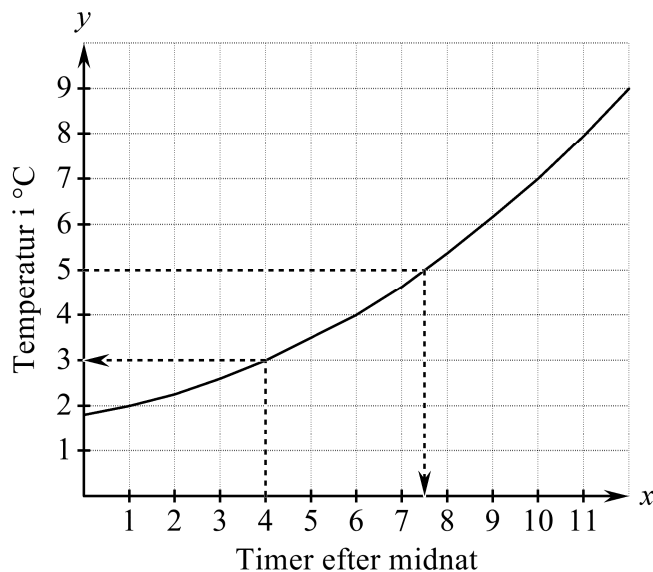


Eksempel 2.4

Grafen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal timer efter midnat

y = temperaturen målt i $^{\circ}\text{C}$



Spørgsmål (a): Hvad er temperaturen kl. 4?

Svar: En punkteret pil viser hvordan vi kan aflæse følgende:

Når x er 4, er y lig 3.

Dvs.

kl. 4 er temperaturen 3 $^{\circ}\text{C}$.

Spørgsmål (b): Hvornår er temperaturen 5 $^{\circ}\text{C}$?

Svar: En punkteret pil viser hvordan vi kan aflæse følgende:

Når y er 5, er x lig 7,5,

Dvs.

kl. 7:30 er temperaturen 5 $^{\circ}\text{C}$.

Spørgsmål (c): Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 6 til kl. 10?

Svar: På grafen aflæser vi:

Når x er 6, er y lig 4.

Når x er 10, er y lig 7.

Da $7 - 4 = 3$, gælder

Fra kl. 6 til kl. 10 stiger temperaturen med 3 $^{\circ}\text{C}$.

Øvelse 2.5 (Se eksempel 2.4)

I eksempel 2.4 kan man stille spørgsmålet

- (a) Hvad er temperaturen kl. 11 ?
- (1) I spørgsmål (a) får vi oplyst tallet 11. Er dette tal x eller y eller ingen af delene?
 - (2) I spørgsmål (a) spørges om et tal. Er dette tal x eller y eller ingen af delene?
 - (3) Hvad er svaret på (a).
 - (4) Hvornår er temperaturen $9\text{ }^\circ\text{C}$?
 - (5) Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 1 til kl. 6 ?

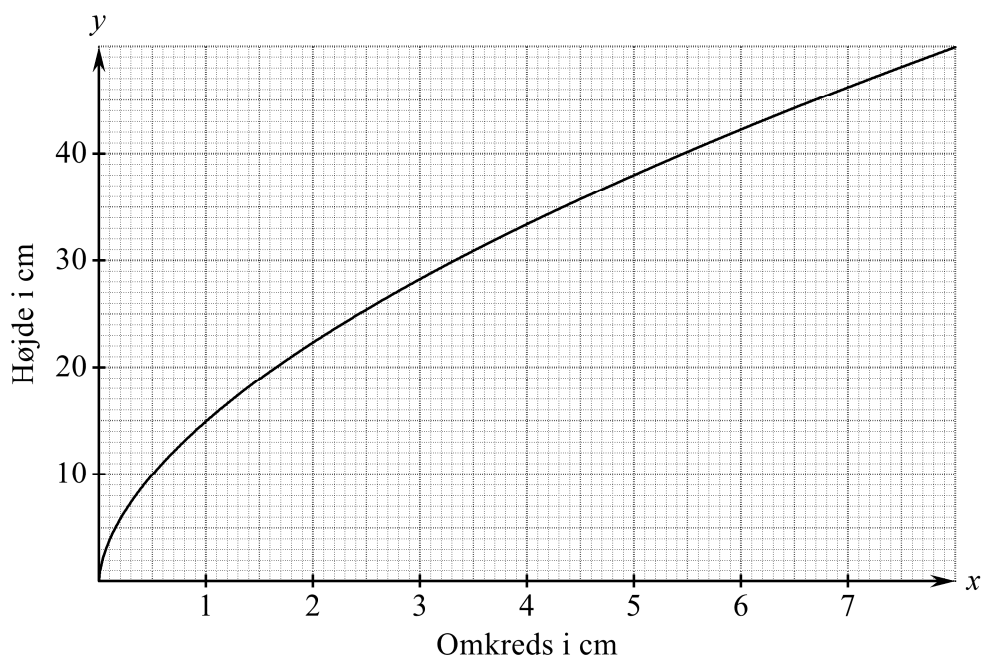
Øvelse 2.6 (Se eksempel 2.4)

- (1) Hvornår er temperaturen $2\text{ }^\circ\text{C}$?
- (2) Hvor lang tid gik der fra temperaturen var $3\text{ }^\circ\text{C}$ til den var $4\text{ }^\circ\text{C}$?
- (3) Hvor mange enheder bliver x større når y vokser fra 2 til 8 ?

Øvelse 2.7

For en bestemt type planter kan vi finde højden når vi kender stænglens omkreds ved jorden. Grafen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = omkreds (målt i cm) y = højde (målt i cm)



Man kan stille spørgsmålet

- (a) Hvis en af planterne har omkredsen 2,1 cm, hvor høj er planten så?
- (1) I spørgsmål (a) får vi oplyst tallet 2,1. Er dette tal x eller y eller ingen af delene?
 - (2) I spørgsmål (a) spørges om et tal. Er dette tal x eller y eller ingen af delene?
 - (3) Hvad er svaret på (a).
 - (4) En af planterne har omkredsen 0,5 cm, og en anden af planterne har omkredsen 1 cm. Hvor mange cm er den store højere end den lille?
 - (5) Man kan spørge om højden vokser lige meget hver gang omkredsen bliver 0,5 cm større. Undersøg sagen og giv en nærmere beskrivelse af hvordan det forholder sig.

Øvelse 2.8 (Se eksempel 2.4)

- (1) Hvilket af spørgsmålene (a) og (b) er af typen C fra øvelse 1.6 ?
- (2) Er spørgsmål (c) af typen B eller typen D ?
- (3) I spørgsmål (c) løses først to delopgaver der er af samme type. Er det type A eller C ?

Afsnit 3. Hvordan viser en ligning sammenhængen mellem to variable.

Øvelse 3.1

Ligningen

$$(1) \quad y = 2,8 + x$$

viser sammenhængen mellem to variable x og y . Brug ligningen (1) til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser.

- (a) Når x er 1, er y lig _____ .
- (b) Når x er 1,4, er y lig _____ .
- (c) Når x er lig _____, er y lig 3,5.
- (d) Når vi ændrer x fra 1 til 1,4, så vil y blive _____ enheder større.

Øvelse 3.2

På en skærm er en figur som vi kan ændre ved at trække med musen. Ligningen

$$(2) \quad y = 2,4 \cdot x$$

viser sammenhængen mellem de to variable

$$x = \text{figurens bredde}$$

$$y = \text{figurens areal}$$

- (a) På et tidspunkt er bredden 3. Er det så x eller y der er 3 ?
- (b) Brug ligningen (2) til at finde ud af hvad arealet er når bredden er 3.
- (c) Når bredden er 1,8, er arealet _____ .
- (d) Når bredden er _____, er arealet 6.
- (e) Når vi ændrer bredden fra 3 til 8, så bliver arealet ændret fra _____ til _____ .
- (f) Når vi ændrer bredden fra 3 til 8, så vil arealet blive _____ enheder større.

Øvelse 3.3

Ligningen

$$y = 4 + \frac{x}{2}$$

viser sammenhængen mellem to variable x og y .

- (a) Når $x = 6$ er $y =$ _____ .
- (b) Når vi ændrer x fra 6 til 10, så vil y blive ændret fra _____ til _____ .
- (c) Når vi ændrer x fra 6 til 10, så vil y blive _____ enheder større.
- (d) Når $x =$ _____ , er $y = 10$.
- (e) Når x ændres fra 5 til _____ , så vil y blive 14 enheder større.

Øvelse 3.4

På en skærm er der en kasse med kvadratisk grundflade. Ved at trække med musen kan vi ændre længden af siden i kassens grundflade. Kassens højde ændres ikke. Højden er hele tiden 4.

x = længden af siden i en kasses grundflade

y = rumfanget af kassen

- (a) Når x er 3, er y lig _____ .
- (b) Når x er 5, er y lig _____ .
- (c) Skriv et regneudtryk med x som viser hvordan vi udregner y :

$$y = \text{_____} .$$

Denne ligning viser sammenhængen mellem de to variable x og y .

Brug ligningen til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

- (d) Når $x = 1,2$, er $y =$ _____ .
- (e) Når $x =$ _____ , er $y = 49$.
- (f) Når vi ændrer x fra 3 til 5, så vil y blive ændret fra _____ til _____ .
- (g) Når vi ændrer x fra 3 til 5, så vil y blive _____ enheder større.
- (h) Når x er 2 og vi gør x 3 enheder større, så vil y blive _____ enheder større.
- (i) Når x er 4 og vi gør x _____ enheder større, så vil y blive 57 enheder større.
- (j) Hvis vi ændrer x så y ændres fra 100 til 196, så har vi gjort x _____ enheder større.

(k)

$x:$	8		12	14		+	
$y:$		484			1024	1444	

Arrows indicate the change in x from 8 to 12 and 12 to 14, and the corresponding change in y from 484 to 1024 and 1024 to 1444. There are also empty boxes for the change in x from 14 to the next value and the change in y from 1444 to the next value.

Eksempel 3.5

For nogle skiver er der en bestemt sammenhæng mellem deres vægt og deres diameter.

Ligningen

$$(1) \quad y = x^2$$

viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$$(2) \quad \begin{array}{l} x = \text{diameteren (målt i cm)} \\ y = \text{vægten (målt i g)} \end{array}$$

Spørgsmål (a): Hvad er **vægten** når **diameteren** er 1,5 cm ?

Svar: Ved hjælp af (2) kan dette spørgsmål oversættes til:

Hvad er **y** når **x** er 1,5?

Vi indsætter 1,5 for x i ligningen (1):

$$y = 1,5^2$$

Vi udregner højresiden på lommeregner:

$$y = 2,25$$

Dvs.

vægten er 2,25 g når diameteren er 1,5 cm .

Spørgsmål (b): Hvad er **diameteren** når **vægten** er 0,04 g ?

Svar: Ved hjælp af (2) kan dette spørgsmål oversættes til

Hvad er **x** når **y** er 0,04?

Vi indsætter 0,04 for y i ligningen (1):

$$0,04 = x^2$$

Heraf får vi

$$\sqrt{0,04} = x$$

Vi udregner venstresiden på lommeregner:

$$0,2 = x$$

Dvs.

diameteren er 0,2 cm når vægten er 0,04 g .

Eksemplet fortsætter på næste side!

Spørgsmål (c): En lille skive har diameteren 2,2 cm, og en stor skive har diameteren 2,7 cm. Hvor meget er vægten af den store større end vægten af den lille?

Svar: For hver af skiverne udregner vi vægten y ved hjælp af ligningen (1):

$$\text{Når } x \text{ er } 2,2, \text{ er } y = 2,2^2, \text{ dvs. } y = 4,84.$$

$$\text{Når } x \text{ er } 2,7, \text{ er } y = 2,7^2, \text{ dvs. } y = 7,29.$$

Da $7,29 - 4,84 = 2,45$, gælder:

Vægten af den store er 2,45 g større end vægten af den lille.

Spørgsmål (d): Vægten af en lille skive er 4 g, og vægten af en stor skive er 9 g. Hvor meget er diameteren af den store større end diameteren af den lille?

Svar: For hver af skiverne udregner vi diameteren x ved hjælp af ligningen (1):

$$\text{Når } y \text{ er } 4, \text{ er } 4 = x^2, \text{ så } \sqrt{4} = x, \text{ dvs. } 2 = x.$$

$$\text{Når } y \text{ er } 9, \text{ er } 9 = x^2, \text{ så } \sqrt{9} = x, \text{ dvs. } 3 = x.$$

Da $3 - 2 = 1$, gælder:

Diameteren af den store er 1 cm større end diameteren af den lille.

Øvelse 3.6

I 1.6 er omtalt fire opgavetyper A, B, C og D. For hver af spørgsmålene (a), (b), (c) og (d) i eksempel 3.5 skal du finde ud af om det er type A, B, C eller D.

Øvelse 3.7

For nogle varer betaler vi en pris plus en afgift.

Ligningen

$$y = \frac{x}{4}$$

viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$$x = \text{pris i kr.}$$

$$y = \text{afgift i kr.}$$

- (1) Hvad er afgiften når prisen er 10 kr.?
- (2) Hvad er x når y er 5?
- (3) Hvor meget er prisen steget når afgiften er steget fra 5 kr. til 7 kr.?
- (4) Hvor mange enheder bliver y større når x ændres fra 12 til 20?

Øvelse 3.8

For nogle skiver er der følgende sammenhæng mellem tykkelse (i mm) og diameter (i mm):

(a) **Tykkelsen** er det tal vi får når vi dividerer **diameteren** med 10 og lægger 1 til resultatet.

(1) Skriv oplysningen (a) som en ligning hvor x står for diameteren, og y står for tykkelsen.

(2) En skive har tykkelsen 3,4 mm. Vi måler dens diameter. Hvilket resultat får vi når vi dividerer diameteren med 10 og lægger 1 til resultatet?

(3) Hvis diameteren er 5 mm, er tykkelsen så 1,5 mm?

(4) Om en skive oplyses:

(b) Vi får 4,2 når vi dividerer diameteren med 10 og lægger 1 til resultatet.

Skriv denne oplysning som en ligning hvor x står for diameteren.

(5) Løs ligningen fra spørgsmål (4), og skriv hvad løsningen fortæller om skiverne.

Øvelse 3.9

I et computerspil indgår to tal der kaldes **gevinst** og **tid** (begge uden enhed). Der gælder:

(a) **Gevinsten** er det tal vi får når vi ganger **tiden** med 6 og trækker resultatet fra 100.

(1) Skriv oplysningen (a) som en ligning, og husk at det er nødvendigt at du skriver hvilket bogstav der står for tiden, og hvilket bogstav der står for gevinsten. Du kan godt vælge andre bogstaver end x og y .

(2) På et tidspunkt er gevinsten 56,8. Hvilket tal får vi hvis vi ganger tiden med 6 og trækker resultatet fra 100?

(3) Hvis tiden er 5,5, er gevinsten så 66?

(4) Vi får oplyst følgende:

(b) Vi får 42,4 når vi ganger tiden med 6 og trækker resultatet fra 100.

Skriv denne oplysning som en ligning hvori et bogstav står for tiden.

(5) Løs ligningen fra spørgsmål (4) og skriv hvad løsningen fortæller om computerspillet.

Afsnit 4. Sammenhæng mellem graf og ligning

Øvelse 4.1

På en skærm er der en figur som vi kan ændre ved at trække med musen. Bredden x kan være ethvert positivt tal op til 2. Ligningen

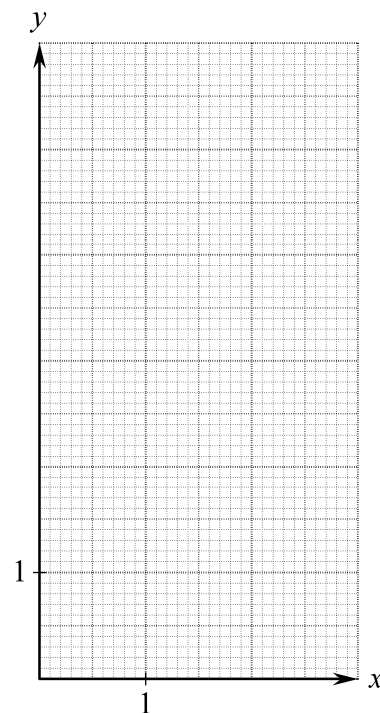
$$y = 1 + x^2$$

viser sammenhængen mellem bredden x og arealet y .

- (a) Når $x = 1,5$ er $y =$ _____ .
(b) Skriv oplysningen i (a) i tabellen nedenfor.
(c) Angiv oplysningen i (a) i koordinatsystemet ved at afsætte et punkt.

x :	0,1	0,5	1	1,5	2
y :					

- (d) Udfyld resten af tabellen og afsæt de tilsvarende punkter i koordinatsystemet.
(e) Vi kan nu gætte omtrent hvor de andre grafpunkter ligger. Tegn grafen ved at tegne en krum kurve gennem de punkter du har afsat. Der må ikke være knæk på kurven.



Øvelse 4.2

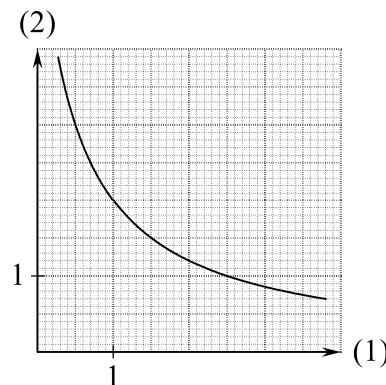
Ligningen

$$y = \frac{0,6^x}{0,3}$$

viser en sammenhæng mellem to variable x og y .

Grafen viser en anden sammenhæng mellem to variable x og y .

- (a) For den sammenhæng som ligningen viser, gælder:
Når $x = 1$ er $y =$ _____ .
Når $x = 2$ er $y =$ _____ .
(b) For den sammenhæng som grafen viser, gælder:
Når $x = 1$ er $y =$ _____ .
Når $x = 2$ er $y =$ _____ .
(c) De to sammenhænge er ikke ens. Gør rede for dette.



Eksempel 4.3

Ligningen

$$(1) \quad y = \sqrt{x} .$$

viser sammenhængen mellem to variable x og y .

Sådan kan vi tegne grafen:

Først udregner vi støttepunkter:

Vi får et grafpunkts y -koordinat ved at sætte punktets x -koordinat ind i (1):

$$x = 0 : \quad y = \sqrt{0} = 0$$

$$x = 0,2 : \quad y = \sqrt{0,2} = 0,45$$

$$x = 1 : \quad y = \sqrt{1} = 1$$

osv.

x	0	0,2	1	2	4	6
y	0	0,45	1	1,41	2	2,45

\swarrow P

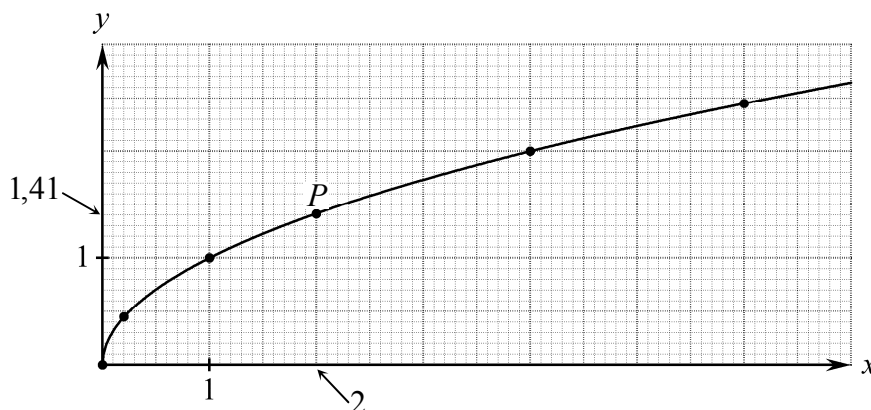
Så afsætter vi støttepunkter i koordinatsystemet:

På figuren har vi afsat punkterne fra tabellen.

Vi har vist hvordan vi har fundet ud af hvor $P(2, 1,41)$ skal afsættes.

Derefter tegner vi grafen:

Det ser ud til at der er nok punkter til at vi kan gætte grafens forløb. Derfor tegner vi en blød kurve gennem punkterne.



Øvelse 4.4

Tegn et koordinatsystem hvor x -aksen går fra -3 til 3 , og y -aksen går fra 0 til 9 .

(1) Brug metoden fra eksempel 4.3 til at tegne grafen for sammenhængen

$$y = 2^x .$$

(2) Find ud af om punktet $P(-0,5, 0,65)$ ligger over, under eller på grafen.

Eksempel 4.5

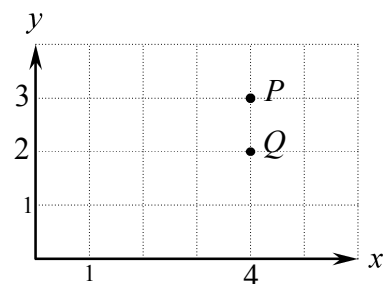
Spørgsmål (a): Find ud af om punktet $P(4, 3)$ ligger over, under eller på grafen for sammenhængen

$$(2) \quad y = \frac{8}{x} .$$

Svar: Når vi skal tegne grafen, indsætter vi x -koordinaten i ligningen (2) og udregner y -koordinaten:

$$\text{Når } x = 4 \text{ er } y = \frac{8}{4} = 2 .$$

Altså ligger punktet $Q(4, 2)$ på grafen, så vi ser at P ligger over grafen .



Spørgsmål (b): Ligger punktet $Q(16, 5)$ på grafen for sammenhængen (1) fra eksempel 4.3?

Svar: Når vi skal tegne grafen, indsætter vi x -koordinaten i ligningen (1) og udregner y -koordinaten:

$$\text{Når } x = 16 \text{ er } y = \sqrt{16} = 4 .$$

Altså ligger punktet $R(16, 4)$ på grafen, så vi ser at

Q ligger ikke på grafen for (1) .

Spørgsmål (c): På grafen for sammenhængen (1) ligger et punkt H som har y -koordinat 6. Hvilket tal giver højresiden i (1) hvis x erstattes med H 's x -koordinat?

Svar: Resultatet vil være y -koordinaten for grafpunktet, dvs. 6 .

Spørgsmål (d): Løs ligningen $5 = \sqrt{x}$ og skriv hvad løsningen fortæller om grafen fra 4.3.

Svar: Vi opløfter begge ligningens sider til anden og får $25 = x$.

Løsningen er altså 25 .

Dette fortæller at grafpunktet med y -koordinat 5 har x -koordinat 25 .

Øvelse 4.6

Ligningen

$$y = 61 - 14x$$

viser sammenhængen mellem to variable x og y

- (1) Beregn hvad y er når x er 3, og skriv hvad resultatet fortæller om grafen.
- (2) Beregn hvad x er når y er 40, og skriv hvad resultatet fortæller om grafen.
- (3) Ligger punktet $P(3, 20)$ på grafen?
- (4) Ligger punktet $Q(4, 5)$ på grafen?
- (5) Ligger punktet $P(3, 20)$ under grafen?

Øvelse 4.7

Ligningen

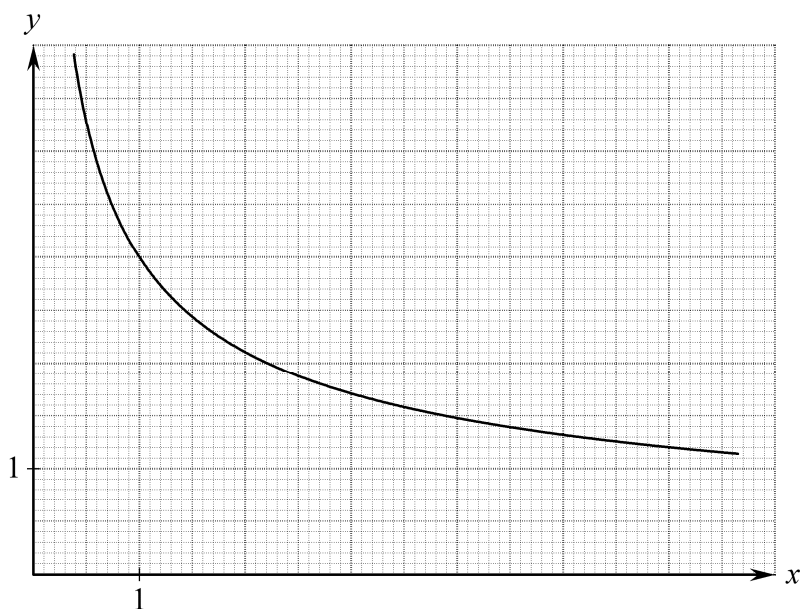
$$y = 3 \cdot x^{-0,51}$$

viser sammenhængen mellem to variable x og y .

Figuren viser grafen for denne sammenhæng.

Du skal besvare følgende tre spørgsmål ud fra grafen. Det er altså forbudt at bruge lommeregner.

- (a) Hvilket tal ville vi få hvis vi udregnede $3 \cdot x^{-0,51}$ for $x = 2$?
- (b) Hvilket tal ville vi få hvis vi udregnede $3 \cdot 6^{-0,51}$?
- (c) Er $3 \cdot 4^{-0,51}$ større end $3 \cdot 3^{-0,51}$?



Afsnit 5. Voksende og aftagende sammenhænge

Øvelse 5.1

Ligningen

$$y = 64 \cdot 0,5^x$$

viser sammenhængen mellem de variable x og y .

(a) Udfyld de tomme pladser:

Når $x = 2$ er $y =$ _____ .

Når $x = 3$ er $y =$ _____ .

Når $x = 5$ er $y =$ _____ .

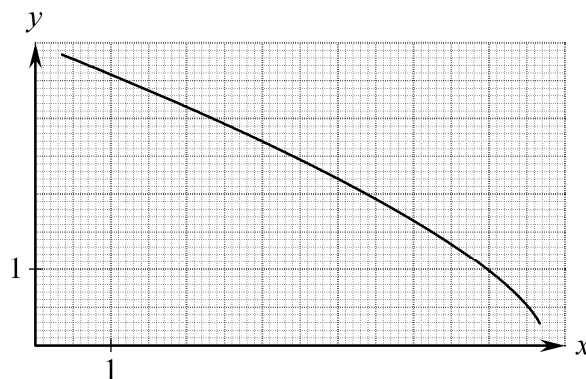
Når $x = 6$ er $y =$ _____ .

(b) Ser det ud til at der gælder at

jo større x er, jo større er y ?

Øvelse 5.2

Grafen viser sammenhængen mellem de variable x og y .



(a) Udfyld de tomme pladser:

Når $x = 0,7$ er $y =$ _____ .

Når $x = 3,0$ er $y =$ _____ .

Når $x = 4,0$ er $y =$ _____ .

Når $x = 4,9$ er $y =$ _____ .

(b) Gælder der at

jo større x er, jo mindre er y ?

(c) Tegn en anden graf i koordinatsystemet hvor der gælder:

Jo større x er, jo større er y .

Eksempel 5.3

Vi tænder et stearinlys.

- (1) $x =$ lysets højde (i cm)
 $y =$ den tid (i minutter) lyset har været tændt

Spørgsmål (a): Hvilken af påstandene (2) og (3) nedenfor er korrekt?

- (2) Jo større x er, jo mindre er y .
(3) Jo større x er, jo større er y .

Svar: Oplysningerne fra (1) indsætter vi i (2) og (3) og får:

- (2a) Jo større *lysets højde* er, jo mindre er *den tid det har været tændt*.
(3a) Jo større *lysets højde* er, jo større er *den tid det har været tændt*.

Vi ser at det er (2a) der stemmer med vores hidtidige erfaringer, så svaret på opgaven er

Det er (2) der er korrekt.

Spørgsmål (b): Vi sætter en robot til at grave en grøft.

- (4) $x =$ grøftens længde (i cm)
 $y =$ den tid (i minutter) robotten har gravet

Hvilken af påstandene (5) og (6) nedenfor er korrekt?

- (5) Jo større x er, jo mindre er y .
(6) Jo større x er, jo større er y .

Svar: Oplysningerne fra (4) indsætter vi i (5) og (6) og får:

- (5a) Jo større *grøftens længde* er, jo mindre er *den tid robotten har gravet*.
(6a) Jo større *grøftens længde* er, jo større er *den tid robotten har gravet*.

Vi ser at det er (6a) der er korrekt, så svaret på opgaven er

Det er (6) der er korrekt.

DEFINITION 5.4 Hvornår er en sammenhæng aftagende, og hvornår voksende?

En sammenhæng mellem to variable x og y kalder vi aftagende hvis der gælder

Jo større x er, jo mindre er y ,

og voksende hvis der gælder

Jo større x er, jo større er y .

Bemærkning

Rammen ovenfor oplyser hvilke sammenhænge man kalder aftagende, og hvilke man kalder voksende. En oplysning om hvad bestemte ord skal betyde, kalder man en DEFINITION.

Eksempel 5.5

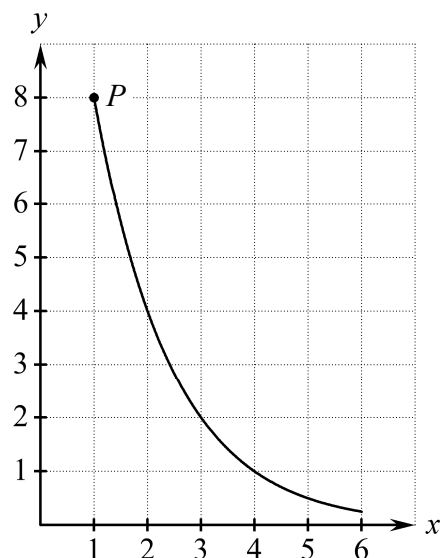
Spørgsmål: Figuren viser grafen for en sammenhæng mellem to variable x og y . Er denne sammenhæng aftagende, voksende eller ingen af delene?

Svar: Vi ser at hvis vi trækker punktet P langs kurven sådan at dets x -koordinat bliver større og større, så vil dets y -koordinat blive mindre og mindre. Der gælder altså at

jo større x er, jo mindre er y ,

så af definition 5.3 får vi:

Det er en aftagende sammenhæng .



Øvelse 5.6

Hver dag fra 1. til 24. december får Bo én kalendergave.

x = antal dage der er tilbage til jul

y = antal kalendergaver som Bo har fået

- (1) Gælder at *jo større x er, jo større er y* ?
- (2) Gælder at *jo større x er, jo mindre er y* ?
- (3) Er sammenhængen voksende?
- (4) Er sammenhængen aftagende?

Øvelse 5.8

Ligningen

$$y = 200 - \frac{x}{10}$$

viser sammenhængen mellem de to variable x og y .

Brug 5.4 til at finde ud af om sammenhængen mellem x og y er voksende, aftagende eller ingen af delene.

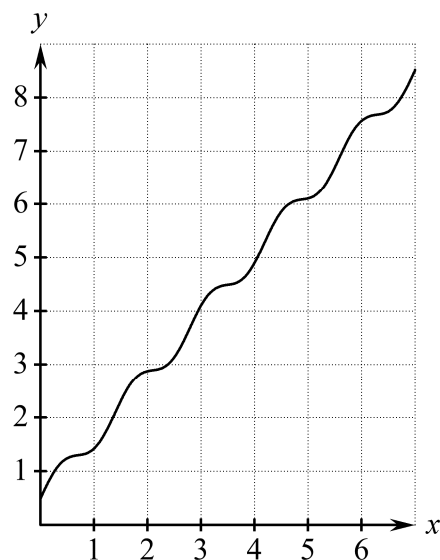
Øvelse 5.9

Vi trækker et punkt langs grafen.

x = punktets x -koordinat

y = punktets y -koordinat

- (1) Gælder at *jo større x er, jo større er y* ?
- (2) Er sammenhængen mellem x og y voksende?



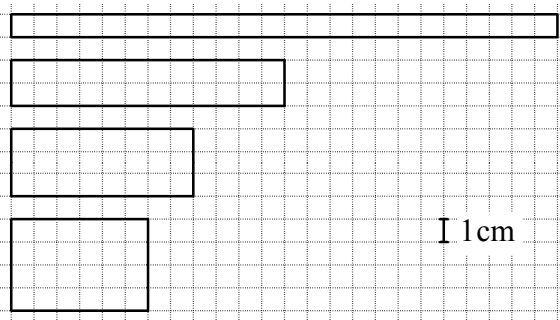
Øvelse 5.10

En bestemt type plade fås i de fire størrelser som er vist på figuren

x = længden af en plades korte side

y = pladens areal

- (a) Er sammenhængen mellem y og x aftagende.
(b) Er sammenhængen mellem y og x voksende?



Øvelse 5.11

En skål fås i fem størrelser.

x = en skåls diameter (i cm)

y = skålens pris (i kr.)

Udfyld de tomme pladser sådan at sammenhængen mellem y og x er voksende.

x	6	9	14	21	32
y	34		98		430

Øvelse 5.12

En vare fås i pakninger med 1 stk., 3 stk., 10 stk., 50 stk. og 200 stk.

x = antal vare i en pakning

y = pris pr. stk. (i kr.)

Udfyld de tomme pladser sådan at sammenhængen mellem y og x er aftagende.

x	1	3	10	50	200
y	7		6		5,9

Øvelse 5.13

I et computerspil forekommer bl.a. følgende variable:

x = antal år efter 1900

y = befolkningens størrelse

Ligningen

$$y = 4000 \cdot a^x$$

viser sammenhængen mellem y og x . Før man bruger ligningen, må man erstatte a med et bestemt tal. Det tal man skriver på a 's plads, skal være positivt, og det skal være mindre end 3.

- (a) Sæt a til 2, og udregn y når x er 1, når x er 2, og når x er 3.
(b) Sæt a til et tal så sammenhængen mellem y og x bliver aftagende, og udregn derefter y når x er 1, når x er 2, og når x er 3.