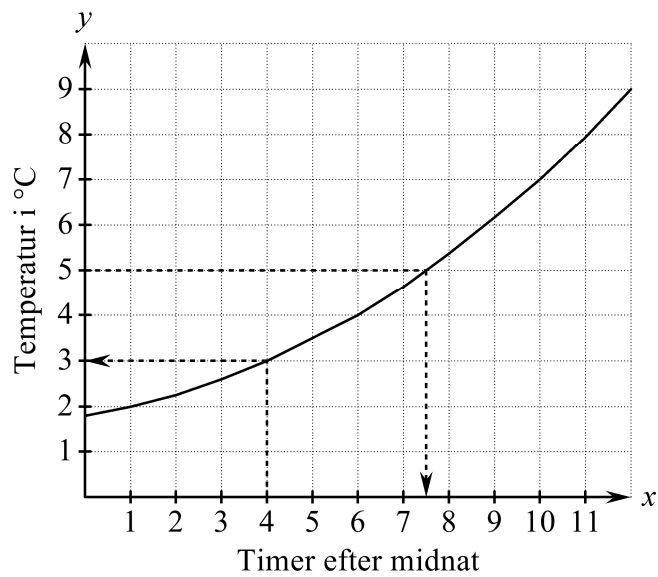


# Variabel- sammenhænge



2008 Karsten Juul

Dette hæfte kan bruges som start på undervisningen i variabelsammenhænge for stx og hf.

## Indhold

1. Hvordan viser en tabel sammenhængen mellem to variable? .....	1
2. Hvordan viser en graf sammenhængen mellem to variable? .....	3
3. Hvordan viser en ligning sammenhængen mellem to variable?.....	5
4. Sammenhæng mellem graf og ligning.....	9
5. Voksende og aftagende sammenhænge.....	12
6. Proportionale variable .....	14
7. Omvendt proportionale variable.....	18

Variabelsammenhænge

1. udgave 2008

© 2008 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra [www.mat1.dk](http://www.mat1.dk)

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til [kj@mat1.dk](mailto:kj@mat1.dk) som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om klasse/hold, lærer og skole/kursus.

# Afsnit 1. Hvordan viser en tabel sammenhængen mellem to variable?

## Eksempel 1.1

En dag målte vi temperaturen flere gange.

Tabellen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$x$	8	9	10	11	12	13	14	15
$y$	9	10	12	14	15	16	18	20

$x$  = antal timer efter midnat

$y$  = temperaturen målt i °C

**Opgave 1.2:** Hvad er temperaturen kl. 10? (Se eksempel 1.1)

Svar: I tabellen ser vi:

Når  $x$  er 10, er  $y$  lig 12.

Dvs.

kl. 10 er temperaturen 12 °C.

**Opgave 1.3:** Hvornår er temperaturen 14 °C? (Se eksempel 1.1)

Svar: I tabellen ser vi:

Når  $y$  er 14, er  $x$  lig 11.

Dvs.

kl. 11 er temperaturen 14 °C.

**Opgave 1.4:** Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 13 til kl. 15? (Se eksempel 1.1)

Svar: I tabellen ser vi:

Når  $x$  er 13, er  $y$  lig 16.

Når  $x$  er 15, er  $y$  lig 20.

Da  $20 - 16 = 4$ , gælder:

Fra kl. 13 til kl. 15 stiger temperaturen med 4 °C.

## Øvelse 1.5

I eksempel 1.1 kan man stille spørgsmålet

(a) Hvornår er temperaturen 10 °C ?

- (1) I spørgsmål (a) får vi oplyst tallet 10. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
- (2) I spørgsmål (a) spørges om et tal. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
- (3) Hvad er svaret på (a).
- (4) Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 12 til kl. 15 ?
- (5) Hvor mange enheder bliver  $y$  større når  $x$  ændres fra 10 til 13?

### Øvelse 1.6

En bestemt vare fås i 8 længder. Tabellen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$x$  = længde i cm

$y$  = pris i kr.

$x$	10	11	12	13	14	15	16	17
$y$	28	32	36	41	47	53	59	66

- (1) Hvad er prisen når længden er 12 cm?
- (2) Hvis det er oplyst at prisen er over 50 kr., hvad ved vi så om længden?
- (3) Hvor meget mere skal man betale hvis man i stedet for en vare på 11 cm køber en vare på 14 cm?

### Øvelse 1.7

Figurene (a)-(d) viser 4 opgavetyper.

$x$	?
$y$	kendt

(a)

$x$	—	+	?	→
$y$	kendt		kendt	

(b)

$x$	kendt
$y$	?

(c)

$x$	kendt		kendt	
$y$	—	+	?	→

(d)

- (1) For hver af opgaverne 1.2, 1.3 og 1.4 skal du finde ud af om den er type (a), (b), (c) eller (d). En af de fire typer forekommer ikke blandt opgaverne 1.2, 1.3 og 1.4.
- (2) Skriv en opgave af den manglende type. Opgaven skal dreje sig om eksempel 1.1 .
- (3) Skriv en besvarelse af den opgave du lavede i spørgsmål (2).

### Øvelse 1.8

Tabellen viser for nogle dyr sammenhængen mellem følgende to variable:

$x$  = dyrets længde (målt i cm)

$y$  = dyrets vægt (målt i gram)

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y$	8	14	19	23	27	30	33	36

Du skal skrive to opgaver om dyrets længde og vægt. Opgaverne skal være af typerne (a) og (d) fra øvelse 1.7 . Skriv også en besvarelse af hver af de to opgaver.

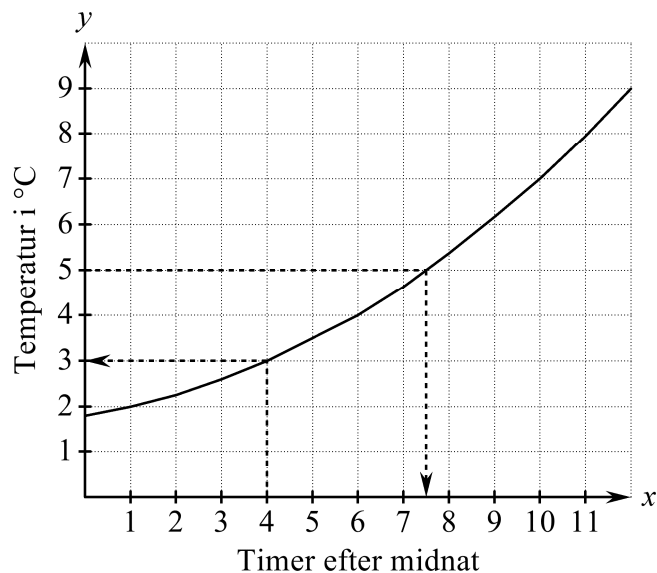
## Afsnit 2. Hvordan viser en graf sammenhængen mellem to variable?

### Eksempel 2.1

Grafen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$x$  = antal timer efter midnat

$y$  = temperaturen målt i  $^{\circ}\text{C}$



**Opgave 2.2:** Hvad er temperaturen kl. 4? (Se eksempel 2.1)

Svar: En punkteret pil viser hvordan vi kan aflæse følgende:

Når  $x$  er 4, er  $y$  lig 3.

Dvs.

kl. 4 er temperaturen  $3^{\circ}\text{C}$ .

**Opgave 2.3:** Hvornår er temperaturen  $5^{\circ}\text{C}$ ? (Se eksempel 2.1)

Svar: En punkteret pil viser hvordan vi kan aflæse følgende:

Når  $y$  er 5, er  $x$  lig 7,5,

Dvs.

kl. 7:30 er temperaturen  $5^{\circ}\text{C}$ .

**Opgave 2.4:** Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 6 til kl. 10? (Se eksempel 2.1)

Svar: På grafen aflæser vi:

Når  $x$  er 6, er  $y$  lig 4.

Når  $x$  er 10, er  $y$  lig 7.

Da  $7 - 4 = 3$ , gælder

Fra kl. 6 til kl. 10 stiger temperaturen med  $3^{\circ}\text{C}$ .

### Øvelse 2.5 (Se eksempel 2.1)

I eksempel 2.1 kan man stille spørgsmålet

- (a) Hvad er temperaturen kl. 11 ?
- (1) I spørgsmål (a) får vi oplyst tallet 11. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
  - (2) I spørgsmål (a) spørges om et tal. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
  - (3) Hvad er svaret på (a).
  - (4) Hvornår er temperaturen  $9\text{ }^\circ\text{C}$  ?
  - (5) Hvor mange grader stiger temperaturen fra kl. 1 til kl. 6 ?

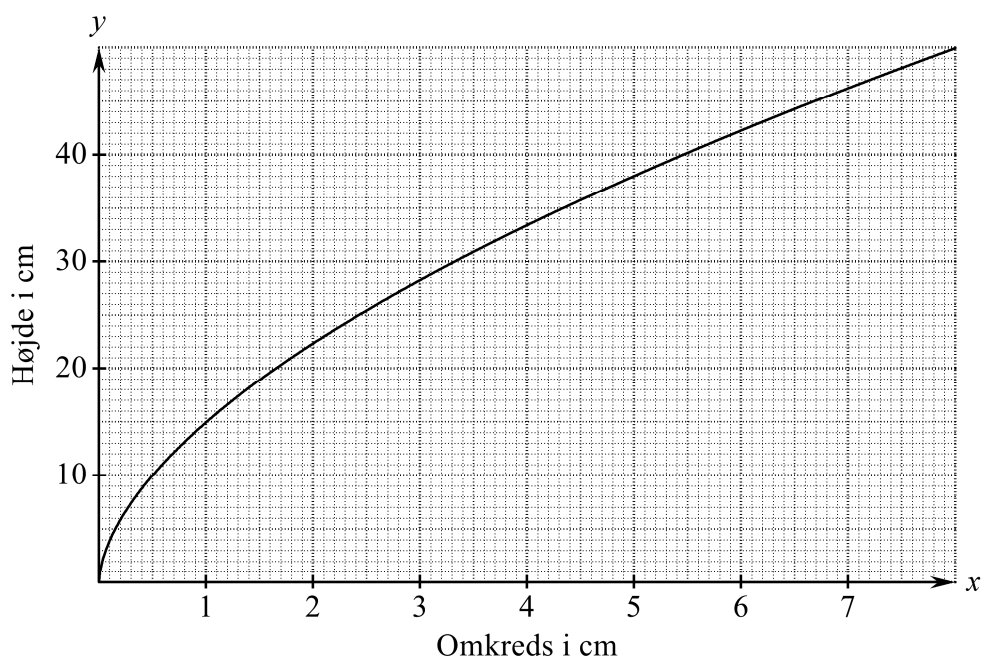
### Øvelse 2.6 (Se eksempel 2.1)

- (1) Hvornår er temperaturen  $2\text{ }^\circ\text{C}$  ?
- (2) Hvor lang tid gik der fra temperaturen var  $3\text{ }^\circ\text{C}$  til den var  $4\text{ }^\circ\text{C}$  ?
- (3) Hvor mange enheder bliver  $x$  større når  $y$  vokser fra 2 til 8 ?

### Øvelse 2.7

For en bestemt type planter kan vi finde højden når vi kender stænglens omkreds ved jorden. Grafen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$x$  = omkreds (målt i cm)       $y$  = højde (målt i cm)



Man kan stille spørgsmålet

- (a) Hvis en af planterne har omkredsen 2,6 cm, hvor høj er planten så?
- (1) I spørgsmål (a) får vi oplyst tallet 2,6. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
  - (2) I spørgsmål (a) spørges om et tal. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
  - (3) Hvad er svaret på (a).
  - (4) En af planterne har omkredsen 0,5 cm, og en anden af planterne har omkredsen 1 cm. Hvor mange cm er den store højere end den lille?
  - (5) Man kan spørge om højden vokser lige meget hver gang omkredsen bliver 0,5 cm større. Undersøg sagen og giv en nærmere beskrivelse af hvordan det forholder sig.

**Øvelse 2.8** (Se eksempel 2.1)

- (1) Hvilken af opgaverne 2.2 og 2.3 er af typen (c) fra øvelse 1.7 ?
- (2) Er opgave 2.4 af typen (b) eller typen (d) ?
- (3) I opgave 2.4 løses først to delopgaver der er af samme type. Er det type (a) eller (c) ?

## Afsnit 3. Hvordan viser en ligning sammenhængen mellem to variable.

**Eksempel 3.1**

For nogle skiver er der en bestemt sammenhæng mellem deres vægt og deres diameter.

Ligningen

$$(1) \quad y = \sqrt{x}$$

viser sammenhængen mellem følgende to variable:

- (2)  $x =$  vægten (målt i g)
- $y =$  diameteren (målt i cm)

**Opgave 3.2:** Hvad er **diameteren** når **vægten** er 2,25 g? (Se eksempel 3.1)

Svar: Ved hjælp af (2) kan dette spørgsmål oversættes til:

Hvad er  $y$  når  $x$  er 2,25?

Vi indsætter 2,25 for  $x$  i ligningen (1):

$$y = \sqrt{2,25}$$

Vi udregner kvadratroden på lommeregner:

$$y = 1,5$$

Dvs.

diameteren er 1,5 cm når vægten er 2,25 g .

**Opgave 3.3:** Hvad er **vægten** når **diameteren** er 0,2 cm? (Se eksempel 3.1)

Svar: Ved hjælp af (2) kan dette spørgsmål oversættes til

Hvad er  $x$  når  $y$  er 0,2?

Vi indsætter 0,2 for  $y$  i ligningen (1):

$$0,2 = \sqrt{x}$$

Når vi opløfter begge denne lignings sider til anden, får vi ligningen

$$0,04 = x$$

Dvs.

vægten er 0,04 g når diameteren er 0,2 cm .

**Opgave 3.4:** En lille skive vejer 4,84 g, og en stor skive vejer 7,29 g. Hvor stor er forskellen på de to skivers diametre? (Se eksempel 3.1)

**Svar:** De to skivers diametre  $y$  udregnes ved hjælp af ligningen (1):

$$\text{Når } x \text{ er } 4,84, \text{ er } y = \sqrt{4,84}, \text{ dvs. } y = 2,2.$$

$$\text{Når } x \text{ er } 7,29, \text{ er } y = \sqrt{7,29}, \text{ dvs. } y = 2,7.$$

Da  $2,7 - 2,2 = 0,5$ , gælder:

Forskellen på de to skivers diametre er 0,5 cm.

### **Øvelse 3.5**

I eksempel 3.1 kan man stille spørgsmålet

(a) Hvis vægten er 4 g, hvor stor er så skivens diameter?

- (1) I spørgsmål (a) får vi oplyst tallet 4. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
- (2) I spørgsmål (a) spørges om et tal. Er dette tal  $x$  eller  $y$  eller ingen af delene?
- (3) Hvad er svaret på (a).
- (4) Hvis diameteren er 3 cm, hvad er så skivens vægt?
- (5) En gul skive vejer 1,69 g, og en rød skive vejer 3,24 g. Hvor meget er den rødes diameter større end den gules?

### **Øvelse 3.6**

(1) I 1.7 er omtalt fire opgavetyper (a), (b), (c) og (d). For hver af opgaverne 3.2, 3.3 og 3.4 skal du finde ud af om den er type (a), (b), (c) eller (d).

En af de fire typer forekommer ikke blandt opgaverne 3.2, 3.3 og 3.4.

- (2) Skriv en opgave af den manglende type. Opgaven skal dreje sig om eksempel 3.1.
- (3) Skriv en besvarelse af den opgave du lavede i spørgsmål (2).

### **Øvelse 3.7**

For nogle varer betaler vi en pris plus en afgift.

Ligningen

$$y = \frac{x}{4}$$

viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$x$  = pris i kr.

$y$  = afgift i kr.

- (1) Hvad er afgiften når prisen er 10 kr.?
- (2) Hvad er  $x$  når  $y$  er 5?
- (3) Hvor meget er prisen steget når afgiften er steget fra 5 kr. til 7 kr.?
- (4) Hvor mange enheder bliver  $y$  større når  $x$  ændres fra 12 til 20?



### Eksempel 3.8

For nogle plader er der følgende sammenhæng mellem højde (i mm) og bredde (i mm):

(3a) **Højden** er det tal vi får når vi tager kvadratroden af **bredden** og lægger 2 til resultatet.

**Opgave 3.9:** Skriv (3a) som en ligning. (Se eksempel 3.8)

Svar: Vi indfører betegnelserne

$$x = \text{bredde (i mm)}$$

$$y = \text{højde (i mm)}$$

Så kan (3a) skrives sådan:

**y** får vi ved at tage kvadratroden af **x** og lægge 2 til resultatet

Med symboler kan (3a) altså skrives sådan:

$$(3b) \quad \underline{\underline{y = \sqrt{x} + 2}} .$$

**Advarsel:** En ligning som (3b) giver ingen oplysning om pladerne hvis vi glemmer at skrive hvad  $x$  og  $y$  står for (bredde og højde).

**Opgave 3.10:** En plade A har højden 5. Hvis vi kendte bredden  $x$  og tog kvadratroden af  $x$  og lagde 2 til, hvilket tal ville vi så få? (Se eksempel 3.8)

Svar: Ifølge (3a) ville vi få A's højde  $y$  som er 5 .

**Opgave 3.11:** Hvis  $x$  er 4, vil  $y$  så være 5? (Se eksempel 3.8)

Svar: Hvis  $x$  er 4 vil

$$y = \sqrt{4} + 2$$

dvs.  $y = 4$  . Svaret er altså:

Nej,  $y$  er ikke 5 når  $x$  er 4 .

**Opgave 3.12:** Skriv en ligning med  $x$  der udtrykker at vi får 5 hvis vi tager kvadratroden af  $x$  og lægger 2 til.

Svar:  $5 = \sqrt{x} + 2$

**Opgave 3.13:** Løs ligningen

$$5 = \sqrt{x} + 2$$

og skriv hvad løsningen fortæller om de omtalte plader. (Se eksempel 3.8)

Svar: Vi trækker 2 fra begge ligningens sider:

$$3 = \sqrt{x} .$$

Vi opløfter begge sider til anden:

$$9 = x .$$

Ligningens løsning er 9 .

At løsningen er 9 fortæller at

en plade med højde 5 mm har bredden 9 mm .

**Øvelse 3.14**

For nogle skiver er der følgende sammenhæng mellem tykkelse (i mm) og diameter (i mm):

(a) **Tykkelsen** er det tal vi får når vi dividerer **diameteren** med 10 og lægger 1 til resultatet.

(1) Skriv oplysningen (a) som en ligning hvor  $x$  står for diameteren, og  $y$  står for tykkelsen.

(2) En skive har tykkelsen 3,4 mm. Vi måler dens diameter. Hvilket resultat får vi når vi dividerer diameteren med 10 og lægger 1 til resultatet.?

(3) Hvis diameteren er 5 mm, er tykkelsen så 1,5 mm?

(4) Om en skive oplyses:

(b) Vi får 4,2 når vi dividerer diameteren med 10 og lægger 1 til resultatet.

Skriv denne oplysning som en ligning hvor  $x$  står for diameteren.

(5) Løs ligningen fra spørgsmål (4), og skriv hvad løsningen fortæller om skiverne.

**Øvelse 3.15**

I et computerspil indgår to tal der kaldes **gevinst** og **tid** (begge uden enhed). Der gælder:

(a) **Gevinsten** er det tal vi får når vi ganger **tiden** med 6 og trækker resultatet fra 100.

(1) Skriv oplysningen (a) som en ligning, og husk at det er nødvendigt at du skriver hvilket bogstav der står for tiden, og hvilket bogstav der står for gevinsten. Du kan godt vælge andre bogstaver end  $x$  og  $y$  .

(2) På et tidspunkt er gevinsten 56,8 . Hvilket tal får vi hvis vi ganger tiden med 6 og trækker resultatet fra 100?

(3) Hvis tiden er 5,5 , er gevinsten så 66 ?

(4) Vi får oplyst følgende:

(b) Vi får 42,4 når vi ganger tiden med 6 og trækker resultatet fra 100.

Skriv denne oplysning som en ligning hvori et bogstav står for tiden.

(5) Løs ligningen fra spørgsmål (4) og skriv hvad løsningen fortæller om computerspillet.

## Afsnit 4. Sammenhæng mellem graf og ligning

### Eksempel 4.1

Ligningen

$$(1) \quad y = \sqrt{x} .$$

viser sammenhængen mellem to variable  $x$  og  $y$ .

**Sådan kan vi tegne grafen:**

Først udregner vi støttepunkter:

Vi får et grafpunkts  $y$ -koordinat ved at sætte punktets  $x$ -koordinat ind i (1):

$$x = 0 : \quad y = \sqrt{0} = 0$$

$$x = 0,2 : \quad y = \sqrt{0,2} = 0,45$$

$$x = 1 : \quad y = \sqrt{1} = 1$$

osv.

$x$	0	0,2	1	2	4	6
$y$	0	0,45	1	1,41	2	2,45

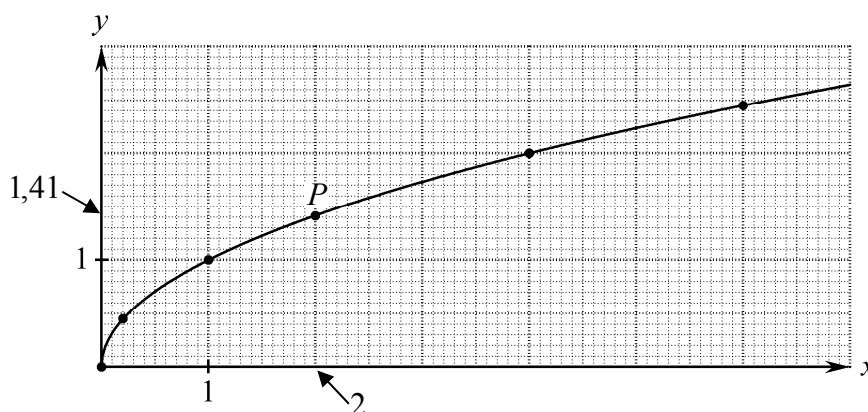
Så afsætter vi støttepunkter i koordinatsystemet:

På figuren har vi afsat punkterne fra tabellen.

Vi har vist hvordan vi har fundet ud af hvor  $P(2, 1,41)$  skal afsættes.

Derefter tegner vi grafen:

Det ser ud til at der er nok punkter til at vi kan gætte grafens forløb. Derfor tegner vi en blød kurve gennem punkterne.



### Øvelse 4.2

Tegn et koordinatsystem hvor  $x$ -aksen går fra  $-3$  til  $3$ , og  $y$ -aksen går fra  $0$  til  $5$ .

(1) Brug metoden fra eksempel 4.1 til at tegne grafen for sammenhængen

$$y = 2^x .$$

(2) Find ud af om punktet  $P(-0,5, 0,65)$  ligger over, under eller på grafen.

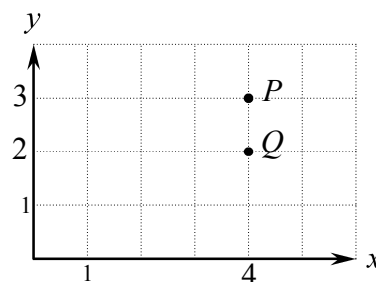
**Opgave 4.3:** Find ud af om punktet  $P(4, 3)$  ligger over, under eller på grafen for sammenhængen

$$(2) \quad y = \frac{8}{x} .$$

**Svar:** Når vi skal tegne grafen, indsætter vi  $x$ -koordinaten i ligningen (2) og udregner  $y$ -koordinaten:

$$\text{Når } x = 4 \text{ er } y = \frac{8}{4} = 2 .$$

Altså ligger punktet  $Q(4, 2)$  på grafen, så vi ser at  $P$  ligger over grafen .



**Opgave 4.4:** Ligger punktet  $Q(16, 5)$  på grafen for sammenhængen (1)? (Se eksempel 4.1)

**Svar:** Når vi skal tegne grafen, indsætter vi  $x$ -koordinaten i ligningen (1) og udregner  $y$ -koordinaten:

$$\text{Når } x = 16 \text{ er } y = \sqrt{16} = 4 .$$

Altså ligger punktet  $R(16, 4)$  på grafen, så vi ser at

$Q$  ligger ikke på grafen for (1) .

**Opgave 4.5:** På grafen for sammenhængen (1) ligger et punkt  $H$  som har  $y$ -koordinat 6. Hvilket tal giver højresiden i (1) hvis  $x$  erstattes med  $H$ 's  $x$ -koordinat? (Se eksempel 4.1)

**Svar:** Resultatet vil være  $y$ -koordinaten for grafpunktet, dvs. 6 .

**Opgave 4.6:** Løs ligningen  $5 = \sqrt{x}$  og skriv hvad løsningen fortæller om grafen fra 4.1.

**Svar:** Vi opløfter begge ligningens sider til anden og får  $25 = x$  .

Løsningen er altså 25 .

Dette fortæller at grafpunktet med  $y$ -koordinat 5 har  $x$ -koordinat 25 .

### **Øvelse 4.7**

Ligningen

$$y = 61 - 14x$$

viser sammenhængen mellem to variable  $x$  og  $y$

- (1) Beregn hvad  $y$  er når  $x$  er 3, og skriv hvad resultatet fortæller om grafen.
- (2) Beregn hvad  $x$  er når  $y$  er 40, og skriv hvad resultatet fortæller om grafen.
- (3) Ligger punktet  $P(3, 20)$  på grafen?
- (4) Ligger punktet  $Q(4, 5)$  på grafen?
- (5) Ligger punktet  $P(3, 20)$  under grafen?

### Øvelse 4.8

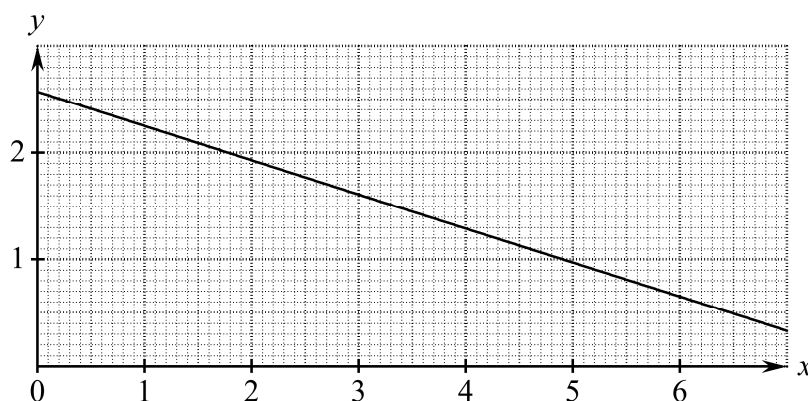
I denne opgave står  $u$  og  $v$  for to bestemte tal. Du skal besvare spørgsmålene uden først at finde ud af hvad  $u$  og  $v$  er for tal. Spørgsmålene kan besvares ved at se på grafen. Ligningen

$$y = v + x \cdot u$$

viser sammenhængen mellem to variable  $x$  og  $y$ .

Figuren viser grafen for denne sammenhæng.

- (1) Hvis du kendte  $u$  og  $v$  og udregnede  $v + 3 \cdot u$ , ville resultatet så være større end 2?
- (2) Hvis du kendte  $u$  og  $v$  og udregnede  $v + 3 \cdot u$  og  $v + 5 \cdot u$ , hvilket af de to resultater ville så være størst?
- (3) Hvis du kendte  $u$  og  $v$  og løste ligningen  $2 = v + x \cdot u$ , ville du så få et resultat der var større end 1?
- (4) Findes der et tal  $t$  mindre end 6 så  $1 = v + t \cdot u$ ?



### Øvelse 4.9

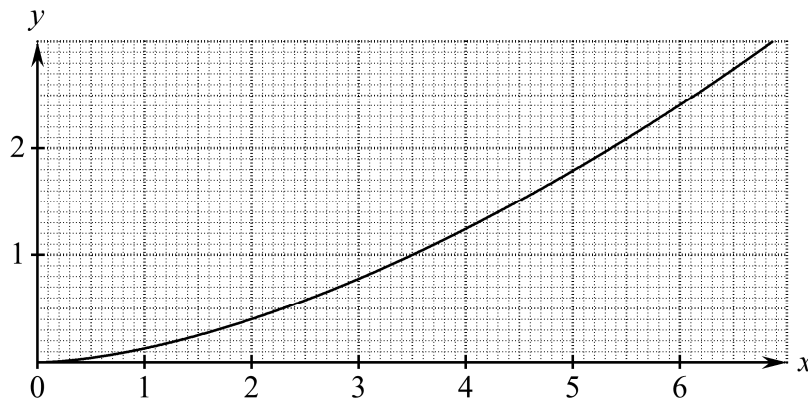
I denne opgave står  $m$  og  $k$  for to bestemte tal. Du skal besvare spørgsmålene uden først at finde ud af hvad  $m$  og  $k$  er for tal. Spørgsmålene kan besvares ved at se på grafen. Ligningen

$$y = \frac{x^k}{m}$$

viser sammenhængen mellem to variable  $x$  og  $y$ .

Figuren viser grafen for denne sammenhæng.

- (1) Hvis du kendte  $m$  og  $k$  og udregnede  $\frac{3^k}{m}$ , ville resultatet så være større end 2?
- (2) Hvis du kendte  $m$  og  $k$  og udregnede  $\frac{3^k}{m}$  og  $\frac{4^k}{m}$ , hvilket af de to resultater ville så være størst?
- (3) Bestem et tal  $t$  så  $1,5 = \frac{t^k}{m}$ .



## Afsnit 5. Voksende og aftagende sammenhænge

**Opgave 5.1:** Vi tænder et stearinlys.

- (1)  $x =$  lysets højde (i cm)  
 $y =$  den tid (i minutter) lyset har været tændt

Hvilken af påstandene (2) og (3) nedenfor er korrekt?

- (2) Jo større  $x$  er, jo mindre er  $y$ .  
(3) Jo større  $x$  er, jo større er  $y$ .

**Svar:** Oplysningerne fra (1) indsætter vi i (2) og (3) og får:

- (2a) Jo større *lysets højde* er, jo mindre er *den tid det har været tændt*.  
(3a) Jo større *lysets højde* er, jo større er *den tid det har været tændt*.

Vi ser at det er (2a) der stemmer med vores hidtidige erfaringer, så svaret på opgaven er

Det er (2) der er korrekt.

**Opgave 5.2:** Vi sætter en robot til at grave en grøft.

- (4)  $x =$  grøftens længde (i cm)  
 $y =$  den tid (i minutter) robotten har gravet

Hvilken af påstandene (5) og (6) nedenfor er korrekt?

- (5) Jo større  $x$  er, jo mindre er  $y$ .  
(6) Jo større  $x$  er, jo større er  $y$ .

**Svar:** Oplysningerne fra (4) indsætter vi i (5) og (6) og får:

- (5a) Jo større *grøftens længde* er, jo mindre er *den tid robotten har gravet*.  
(6a) Jo større *grøftens længde* er, jo større er *den tid robotten har gravet*.

Vi ser at det er (6a) der er korrekt, så svaret på opgaven er

Det er (6) der er korrekt.

### DEFINITION 5.3 Hvornår er en sammenhæng aftagende, og hvornår voksende?

En sammenhæng mellem to variable  $x$  og  $y$  kalder vi aftagende hvis der gælder

Jo større  $x$  er, jo mindre er  $y$ ,

og voksende hvis der gælder

Jo større  $x$  er, jo større er  $y$ .

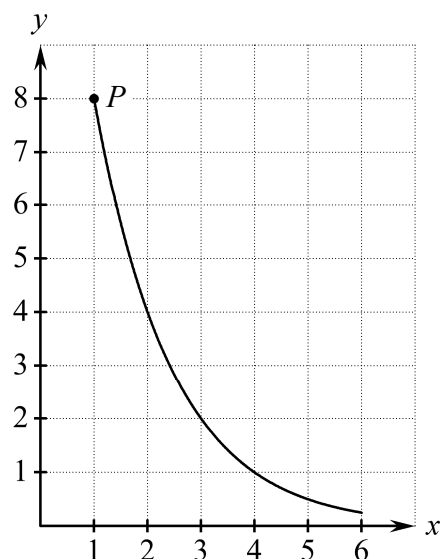
### Bemærkning

Rammen ovenfor oplyser hvilke sammenhænge man kalder aftagende, og hvilke man kalder voksende. En oplysning om hvad bestemte ord skal betyde, kalder man en DEFINITION.

**Opgave 5.4:** Figuren viser grafen for en sammenhæng mellem to variable  $x$  og  $y$ . Er denne sammenhæng aftagende, voksende eller ingen af delene?

**Svar:** Vi ser at hvis vi trækker punktet  $P$  langs kurven sådan at dets  $x$ -koordinat bliver større og større, så vil dets  $y$ -koordinat blive mindre og mindre. Der gælder altså at

jo større  $x$  er, jo mindre er  $y$ ,  
 så af definition 5.3 får vi:  
Det er en aftagende sammenhæng.



**Øvelse 5.5**

Hver dag fra 1. til 24. december får Bo én kalendergave.

$x$  = antal dage der er tilbage til jul

$y$  = antal kalendergaver som Bo har fået

- (1) Gælder at *jo større  $x$  er, jo større er  $y$* ?
- (2) Gælder at *jo større  $x$  er, jo mindre er  $y$* ?
- (3) Er sammenhængen voksende?
- (4) Er sammenhængen aftagende?

**Øvelse 5.6**

Vi lægger nogle frø i et fuglehus.

$x$  = antal minutter til frøene er spist

$y$  = antal frø der er tilbage

- (1) Brug 5.3 til at finde ud af om sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  er voksende.
- (2) Brug 5.3 til at finde ud af om sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  er aftagende.

**Øvelse 5.7**

Ligningen

$$y = 200 - \frac{x}{10}$$

viser sammenhængen mellem de to variable  $x$  og  $y$ .

Brug 5.3 til at finde ud af om sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  er voksende, aftagende eller ingen af delene.

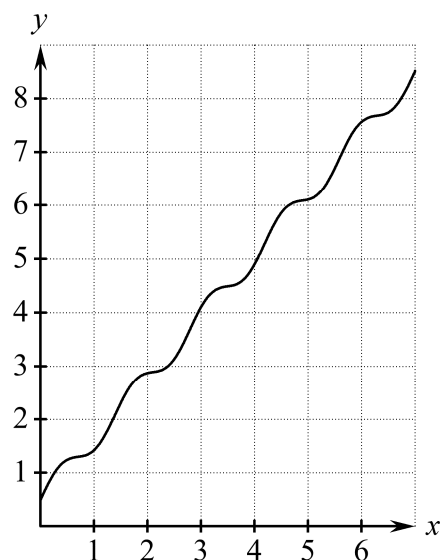
**Øvelse 5.8**

Vi trækker et punkt langs grafen.

$x$  = punktets  $x$ -koordinat


$y$  = punktets  $y$ -koordinat

- (1) Gælder at *jo større  $x$  er, jo større er  $y$* ?
- (2) Er sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  voksende?



## Afsnit 6. Proportionale variable

### Eksempel 6.1 (Oplæg til 6.2)

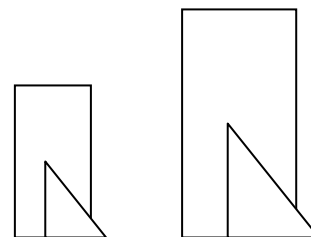
I dette eksempel måler vi ved hjælp af følgende enhed: 

Til højre er vist en lille og en stor udgave af samme figur.

På begge figurer måler vi rektanglets højde og får 2 og 3.

På begge figurer måler vi trekantens vandrette side og får 0,8 og 1,2.

I begge tilfælde er længden på den store figur 1,5 gange længden på den lille figur:



$$3 = 1,5 \cdot 2$$

$$1,2 = 1,5 \cdot 0,8$$

Når  $x$  er en længde på den lille figur og  $y$  er den tilsvarende længde på den store figur, gælder:

$$y = 1,5 \cdot x$$

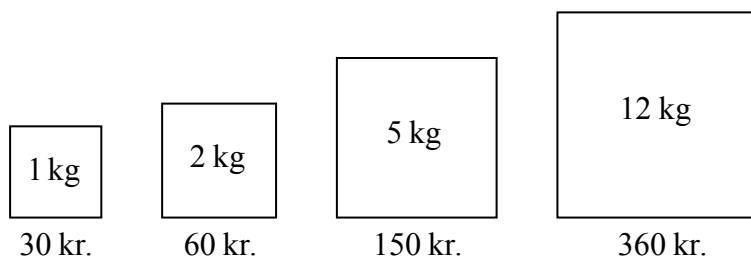
### DEFINITION 6.2 Hvad er proportionale variable?

Vi siger at to variable  $x$  og  $y$  er proportionale hvis der findes et tal  $k$  så

$$(1) \quad y = k \cdot x$$

Rammen oplyser hvad ordet *proportionale* betyder. En oplysning om hvad et bestemt ord skal betyde, kalder man en DEFINITION.

**Opgave 6.3:** En vare fås i pakker af forskellig størrelse. Figuren viser priserne.



Undersøg om prisen er proportional med mængden, og skriv en ligning der viser sammenhængen mellem pris og mængde.

Svar:

Spørgsmålet er:

Er pris og mængde proportionale?

Det vi skal undersøge er altså:

Skal vi gange mængderne med samme tal for at få priserne?

For den lille pakke ses at vi skal gange mængden med 30 for at få prisen:

$$1 \cdot 30 = 30$$

Vi ganger de andre mængder med 30:



$$2 \cdot 30 = 60$$

$$5 \cdot 30 = 150$$

$$12 \cdot 30 = 360$$

Heraf ser vi:

Vi skal gange mængderne med samme tal for at få priserne.

Dette er det samme som at sige:

Pris og mængde er proportionale

At vi i alle tilfælde får prisen ved at gange vægten med 30, kan skrives sådan:

$$\underline{y = 30 \cdot x}$$

når  $x$  står for antal kg, og  $y$  står for antal kr.

**Advarsel:** Hvis vi havde glemt at skrive hvad  $x$  og  $y$  står for, så ville ligningen ikke fortælle noget om sammenhængen mellem pris og mængde.

**Opgave 6.4:** Om to variable  $x$  og  $y$  er oplyst følgende:

$x$  og  $y$  er proportionale .

Desuden er oplyst følgende sammenhørende værdier af  $x$  og  $y$ :

$x$	24	36	92
$y$	18	27	69

Hvad er  $y$  når  $x$  er 10?

Hvad er  $x$  når  $y$  er 15?

Svar:

Bestemme  $k$  :

Da  $x$  og  $y$  er proportionale, er der et tal  $k$  så

$$(1) \quad y = k \cdot x .$$

Vi starter med at finde ud af hvad  $k$  er for et tal. Så kan vi bruge dette tal til at besvare de to spørgsmål.

I tabellen ser vi at når  $x = 24$  er  $y = 18$ . Dette indsætter vi i (1):

$$18 = 24 \cdot k$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 24:

$$\frac{18}{24} = \frac{24 \cdot k}{24}$$

Heraf får vi:

$$0,75 = k$$

Der gælder altså:

$$(2) \quad \underline{y = 0,75 \cdot x}$$

*Svaret fortsætter på næste side!*

Bestemme  $y$ :

For at finde  $y$  når  $x$  er 10, sætter vi  $x$  til 10 i (2):

$$y = 0,75 \cdot 10$$

Heraf får vi  $y = 7,5$  så

$$y \text{ er } \underline{\underline{7,5}} \text{ når } x \text{ er } 10$$

Bestemme  $x$ :

For at finde  $x$  når  $y$  er 15, sætter vi  $y$  til 15 i (2):

$$15 = 0,75 \cdot x$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 0,75:

$$\frac{15}{0,75} = \frac{0,75 \cdot x}{0,75}$$

Heraf får vi  $20 = x$  så

$$x \text{ er } \underline{\underline{20}} \text{ når } y \text{ er } 15$$

**Øvelse 6.5**

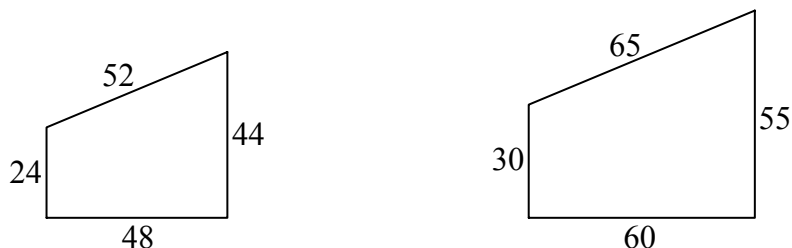
En type fliser fås i fem størrelser. Bredde og længde er i mm, og pris er i kr.:

$b$ : 100 mm	$b$ : 120 mm	$b$ : 150 mm	$b$ : 210 mm	$b$ : 280 mm
$l$ : 140 mm	$l$ : 168 mm	$l$ : 210 mm	$l$ : 294 mm	$l$ : 392 mm
96,50 kr.	127,30 kr.	184,00 kr.	335,20 kr.	575,30 kr.

- (1) Er længden proportional med bredden?
- (2) Er prisen proportional med arealet?

**Øvelse 6.6**

Figuren viser en stor og en lille firkant.



Hvis  $x$  kan være enhver af siderne i den lille firkant, og  $y$  betegner den tilsvarende side i den store firkant, så er  $x$  og  $y$  proportionale. Gør rede for dette, og skriv en ligning der viser sammenhængen mellem  $x$  og  $y$ .

**Øvelse 6.7**

Om to proportionale variable  $x$  og  $y$  er oplyst at når  $x$  er 12, så er  $y$  lig 719,40.

- (1) Hvad er  $y$  når  $x$  er 19?
- (2) Hvad er  $x$  når  $y$  er 1858,48?
- (3) Hvor mange enheder bliver  $y$  større når  $x$  ændres fra 12 til 13?

### Øvelse 6.8

De variable  $x$  og  $y$  er proportionale.

$x$	13	17	18	
$y$		68		84

Hvad skal der stå i de tomme pladser i tabellen? (Husk at skrive hvordan du regner dig frem til tallene).

### Øvelse 6.9

I et computerspil regner man den samlede gevinst ud ved at lægge den faste gevinst sammen med den variable gevinst. Den faste gevinst er 30. Den variable gevinst er proportional med antallet af krydser, og hvis antallet af krydser er 5, er den variable gevinst 8.

- (1) Hvad er den variable gevinst når antallet af krydser er 12?
- (2) Hvad er antallet af krydser når den samlede gevinst er 47,6?

### Øvelse 6.10

Ved at trække i et punkt på skærmen kan vi ændre et kvadrat og et rektangel. Ligningen

$$y = 2,5 \cdot x$$

viser sammenhængen mellem følgende to variable:

$x$  = trekantens omkreds

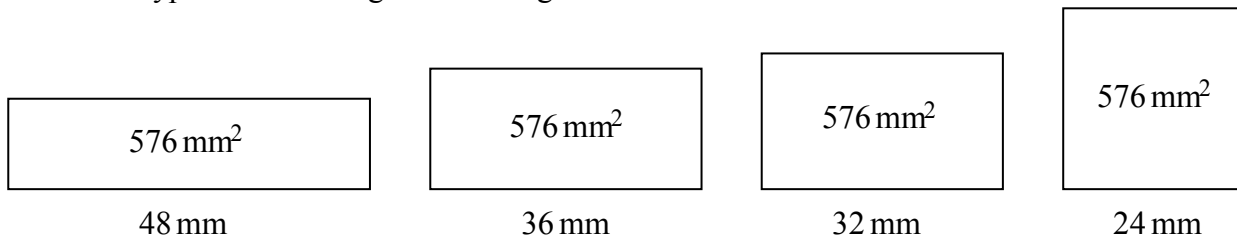
$y$  = siden i kvadratet

- (1) Hvad er kvadratets areal når trekantens omkreds er 16?
- (2) Hvad er trekantens omkreds når kvadratets areal er 400?

## Afsnit 7. Omvendt proportionale variable

### Eksempel 7.1 (Oplæg til 7.2)

En bestemt type flise fås i følgende fire udgaver:



Vi vil undersøge sammenhængen mellem følgende to variable:

$$x = \text{bredde (i mm)}$$

$$y = \text{højde (i mm)}$$

I alle tilfælde er arealet

$$x \cdot y = 576$$

I denne ligning dividerer vi begge sider med  $x$  og får:

$$(1) \quad y = \frac{576}{x}$$

Hvis vi vælger en mindre bredde  $x$ , så får vi en større højde  $y$ , så arealet er det samme.

For at udregne de fire flisers højder indsætter vi bredderne i (1) og får at højderne er

12 mm, 16 mm, 18 mm og 24 mm.

### DEFINITION 7.2 Hvad er omvendt proportionale variable?

Vi siger at to variable  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale hvis der findes et tal  $k$  så

$$(1) \quad y = \frac{k}{x}$$

Rammen oplyser hvad ordene *omvendt proportionale* betyder. En oplysning om hvad bestemte ord skal betyde, kalder man en DEFINITION.

**Opgave 7.3:** Den tid det tager at stille et skur op, afhænger af hvor mange arbejdere der er:

- Hvis der er 4 arbejdere, tager det 3 timer.
- Hvis der er 3 arbejdere, tager det 4 timer.
- Hvis der er 2 arbejdere, tager det 6 timer.
- Hvis der er 1 arbejder, tager det 14 timer.

Find ud af om *tid* og *antal* arbejdere er omvendt proportionale.

Svar: Ifølge 7.2 skal vi finde ud af om vi i alle tilfælde skal dividere antal arbejdere op i samme tal for et få tiden.

Først finder vi det tal vi skal dividere op i når der er 4 arbejdere. Dette tal  $k$  opfylder:

$$3 = \frac{k}{4}$$

I denne ligning ganger vi begge sider med 4:

$$3 \cdot 4 = \frac{k}{4} \cdot 4$$

Heraf får vi:

$$12 = k$$

For de andre tilfælde dividerer vi antal arbejdere op i 12:

$$\frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{12}{1} = 12$$

Vi ser at vi i det sidste tilfælde ikke får den korrekte tid ved at dividere antal arbejdere op i 12. Vi skal altså ikke i alle tilfælde dividere antal arbejdere op i samme tal for at få det antal timer arbejdet tager. Dvs.:

Tid og antal arbejdere er ikke omvendt proportionale

**Opgave 7.4:** De variable  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale .

$x$		12		36
$y$	9	6	3	

Find ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen.

Svar:

Bestemme  $k$  :

Da  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale, er der et tal  $k$  så

$$(1) \quad y = \frac{k}{x} .$$

Vi starter med at finde ud af hvad  $k$  er for et tal. Så kan vi bruge dette tal til at finde de tre tal.

I tabellen ser vi at når  $x = 12$  er  $y = 6$  . Dette indsætter vi i (1):

$$6 = \frac{k}{12}$$

Vi ganger begge ligningens sider med 12:

$$6 \cdot 12 = \frac{k}{12} \cdot 12$$

Heraf får vi:

$$72 = k$$

Der gælder altså:

$$(2) \quad y = \frac{72}{x}$$

*Svaret fortsætter på næste side!*

Bestemme  $y$ :

For at finde  $y$  når  $x$  er 36, sætter vi  $x$  til 36 i (2):

$$y = \frac{72}{36}$$

Heraf får vi  $y = 2$  så

$$y \text{ er } \underline{\underline{2}} \text{ når } x \text{ er } 36$$

Bestemme  $x$ :

For at finde  $x$  når  $y$  er 9, sætter vi  $y$  til 9 i (2):

$$9 = \frac{72}{x}$$

Vi ganger begge ligningens sider med  $x$ :

$$9 \cdot x = \frac{72}{x} \cdot x$$

Vi forkorter nævneren væk:

$$9 \cdot x = 72$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 9:

$$\frac{9 \cdot x}{9} = \frac{72}{9}$$

Heraf får vi  $x = 8$  så

$$x \text{ er } \underline{\underline{8}} \text{ når } y \text{ er } 9$$

På tilsvarende måde får vi:

$$x \text{ er } \underline{\underline{24}} \text{ når } y \text{ er } 3$$

### **Øvelse 7.5**

En type rør fås i fem længder. Tabellen viser længde og diameter for disse.

Længde i mm	40	50	100	200	400
Diameter i mm	5	4	2	1	0,5

Er længde og diameter omvendt proportionale?

### **Øvelse 7.6**

To variable  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Når  $x = 30$  er  $y = 20$ .

(1) Hvad er  $y$  når  $x = 48$ ?

(2) Hvad er  $x$  når  $y = 50$ ?

### Øvelse 7.7

De variable  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale.

$x$	8	9	10
$y$	45		

Find ud af hvad der skal stå på de tomme pladser.

### Øvelse 7.8

Vi har 600 kr. til at købe bær.

- (1) Hvor meget kan vi købe hvis prisen er 24 kr. pr. kg?
- (2) Hvor meget kan vi købe hvis prisen er 30 kr. pr. kg?
- (3) Hvilken udregning skal vi foretage når vi kender prisen pr. kg og vil finde ud af hvor meget vi kan købe?
- (4) Indfør betegnelser (fx  $x$  og  $y$ ) for *kg-pris* og *mængde* vi kan købe, og skriv svaret på (3) som en ligning.

### Øvelse 7.9

På en skærm kan vi ændre et rektangel ved at trække i et punkt. Ligningen

$$y = \frac{12}{x}$$

viser sammenhængen mellem følgende variable:

$x$  = bredde

$y$  = højde

- (1) Hvad er højden når bredden er 2?
- (2) Hvor meget mindre bliver højden hvis vi ændrer bredden fra 2 til 3?
- (3) Man kan spørge om højden aftager lige meget hver gang bredden bliver 1 enhed større. Undersøg sagen og giv en nærmere beskrivelse af hvordan det forholder sig.