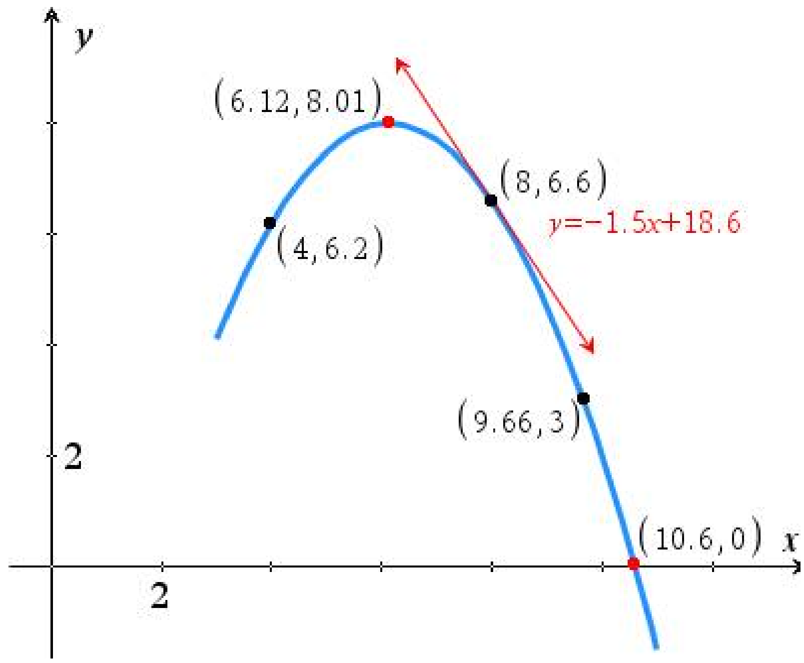
Undersøge funktion ved hjælp af graf.

For hf-mat-C.



2018 Karsten Juul

Bestemme x eller y

1. Bestemme x eller y .

Besvarelse

Højden af en plante beskrives ved funktionen

$$f(x) = 16 \cdot 1{,}08^x$$

hvor $f(x)$ er højden (målt i cm) og x er tiden (målt i uger).

På Nspire har vi tegnet grafen for f .

Vi vil bestemme højden på tidspunktet 10 uger.

Vi afsætter et punkt på grafen
og ændrer x-koordinaten til 10.

Vælg i værktøjsmenuen
Geometri / Punkter og linjer / Punkt på .
Klik på grafen, vendt lidt og klik igen.
Tryk på Esc for at fjerne ikonen "Punkt på" .

Så flyttes punktet på plads, og vi ser at der på skærmen står y-koordinaten 34,5428 .
Se figuren nedenfor.

På tidspunktet 10 uger er højden 34,5 cm .

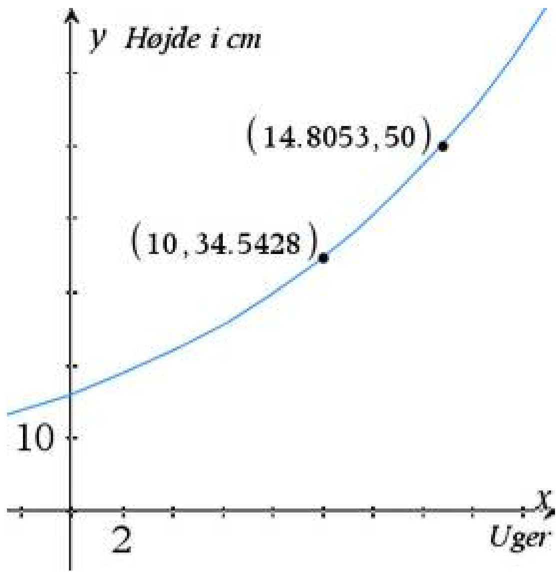
Vi vil bestemme tidspunktet hvor højden er 50 cm .

Vi afsætter et punkt på grafen
og ændrer y-koordinaten til 50.

Vælg i værktøjsmenuen
Geometri / Punkter og linjer / Punkt på .
Klik på grafen, vendt lidt og klik igen.
Tryk på Esc for at fjerne ikonen "Punkt på" .

Så flyttes punktet på plads, og vi ser at der på skærmen står x-koordinaten 14,8053 .
Se figuren nedenfor.

Højden er 50 cm på tidspunktet 14,8 uger .



Andengradspolynomium

2. Forskrift for andengradspolynomium

2a. Regel Et andengradspolynomium er en funktion der har en forskrift af typen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad , \quad a \neq 0 \, .$$

Hvis vi erstatter a, b og c med bestemte tal,
og tallet på a's plads ikke er 0,
så har vi et andengradspolynomium.

2b. Eksempel

Hvis

$$a = 3 \, , \; b = -2 \; \text{ og } \; c = 5$$

er

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 5$$

Dette skriver vi sådan:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

2c. Eksempel

I andengradspolynomiet

$$f(x) = x^2 + 0{,}5x - 4$$

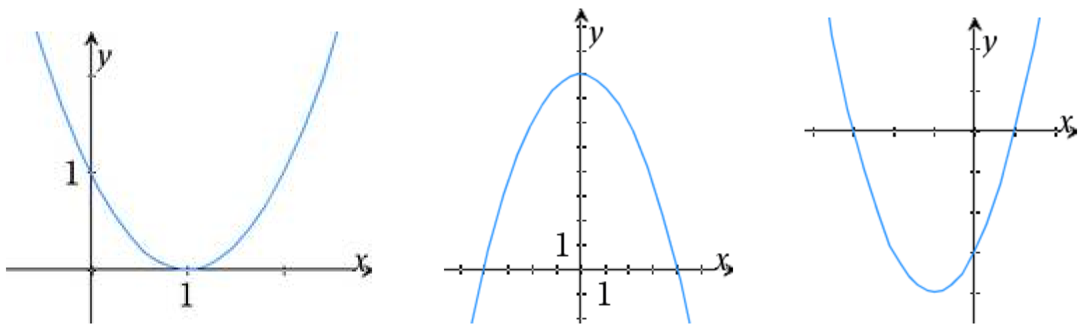
er

$$a = 1 \, , \; b = 0{,}5 \; \text{ og } \; c = -4$$

3. Graf for andengradspolynomium

Grafen for et andengradspolynomium kaldes en parabel .

Nedenfor er eksempler på parabler.



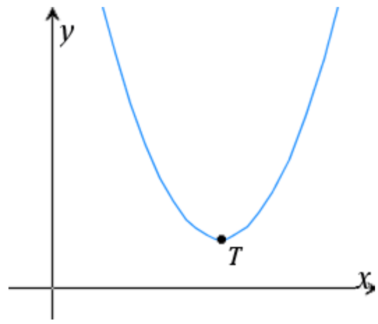
$f(x) = x^2 - 2x + 1$ $\qquad$ $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ $\qquad$ $h(x) = x^2 + 2x - 3$

4. Toppunkt for parabel

Hvis parablens grene vender op:

> Det nederste punkt på parablen kaldes parablens toppunkt .

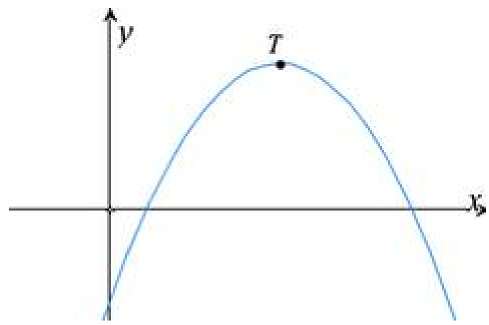
På figuren er toppunktet kaldt T .



Hvis parablens grene vender ned:

> Det øverste punkt på parablen kaldes parablens toppunkt .

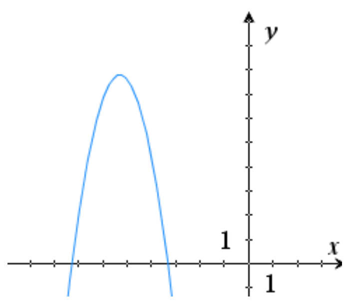
På figuren er toppunktet kaldt T .

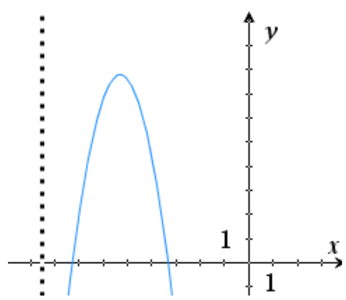


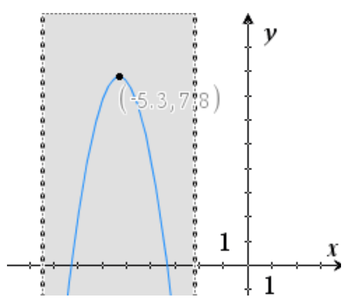
5. Bestem parabels toppunkt.

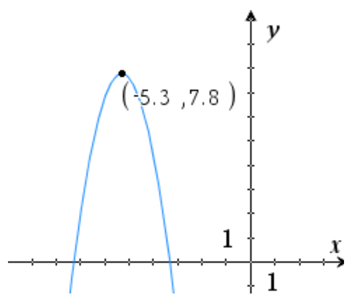
Øverste venstre figur nedenfor viser en parabel på Nspire-skærmen.
Vi vil bestemme koordinaterne til parablens toppunkt.
Da grenene vender ned, er det maksimum vi skal bestemme.
(Hvis grenene vender op, så er det minimum vi skal bestemme).

Vælg i værktøjsmenuen Undersøg grafer / Maksimum .
Klik til venstre for toppunktet (se øverste højre figur).
Klik til højre for toppunktet (se nederste venstre figur),
Nu er toppunktet bestemt (se nederste højre figur).









6. Bestem skæringspunkter med *x*-aksen

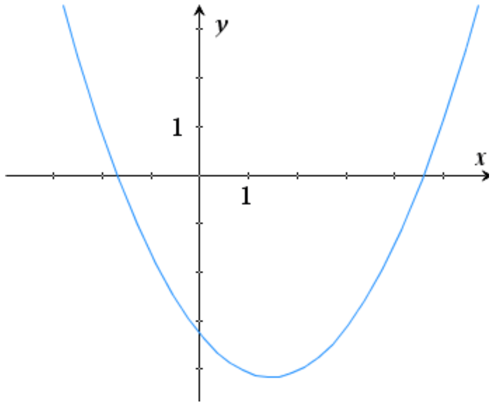
Figuren viser en parabel.
Vi vil bestemme koordinaterne til parablens
Skæringspunkter med *x*-aksen.

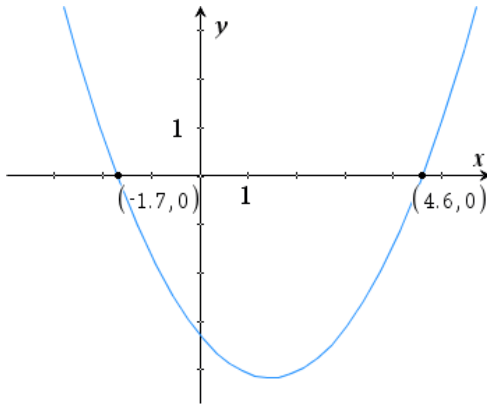
Vi finder dem én ad gangen.
Vi kan f.eks. starte med det venstre.

Vælg i værktøjsmenuen Undersøg grafer / Nulpunkt .
Klik til venstre for nulpunktet,
og klik til højre for nulpunktet.

Nu står skæringspunktets koordinatsæt på skærmen.

Bestem det andet skærinspunkt på samme måde.





7. Bestem skæringspunkt med *y*-aksen

Figuren viser en parabel.
Vi vil finde parablens skæringspunkt med *y*-aksen.

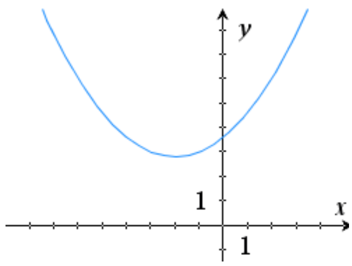
Vælg i værktøjsmenuen

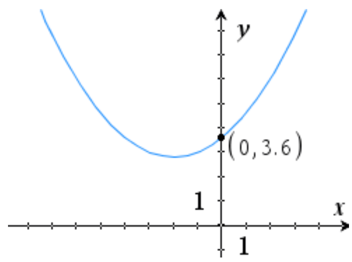
Geometri / Punkter og linjer / Punkt .

Før markør hen til skæringspunktet
så der står ”Skæringspunkt”, og klik.

Højreklik på punktet og vælg ”Koordinater og ligninger”.
Så fremkommer koordinatsættet på skærmen.

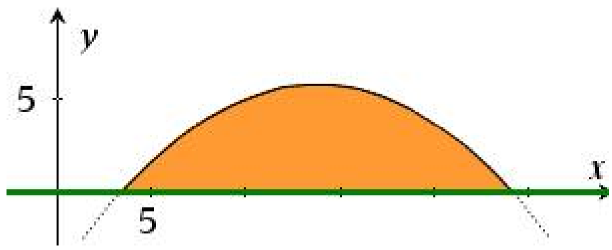
Vi ser at skæringspunktet er $(0, 3{,}6)$





8. Bestem facadens højde og bredde

Besvarelse



Figuren viser facaden på en bygning.

På begge akser er enheden meter.

Facaden har form som en del af grafen for funktionen

$$f(x) = -0{,}053x^2 + 1{,}46x - 4{,}24$$

Facadens højde

I Nspire vælger vi Undersøg grafer / Maksimum og klikker på begge sider af toppunktet.
Så skriver Nspire toppunktets koordinatsæt $(13{,}7736\,,5{,}81472)$.

Facadens højde er 5,81 m .

Facadens bredde

Først finder vi det venstre af grafens skæringspunkter med x-aksen.
I Nspire vælger vi Undersøg grafer / Nulpunkt og klikker på begge sider af skæringspunktet.
Så skriver Nspire skæringspunktets koordinatsæt $(3{,}29925\ ,\ 0)$.

Med samme metode finder vi at det andet skæringspunkt er $(24{,}2479\ ,\ 0)$.

Forskellen på de to skæringspunkters x-koordinater er

$$24{,}2479 - 3{,}29925 = 20{,}9487$$

Facadens bredde er 20,95 m .

9. Tegn graf i interval

Vi vil tegne grafen for funktionen.

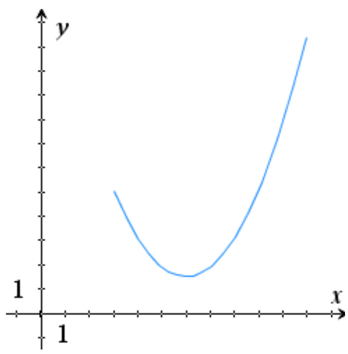
$$f(x) = 0{,}4x^2 - 4{,}8x + 15{,}9 \quad , \quad 3 \leq x \leq 11 \ .$$

Vi skal kun tegne grafen i intervallet $3 \leq x \leq 11$,
dvs. for x-værdier melle 3 og 11 .

I Nspire skal vi efter forskriften taste en **lodret streg**
efterfulgt af intervallet:

$$|\,3 \leq x \leq 11$$

Den lodrette streg er på tegnpaletten ved siden af tegnet & .



Logaritmefunktioner

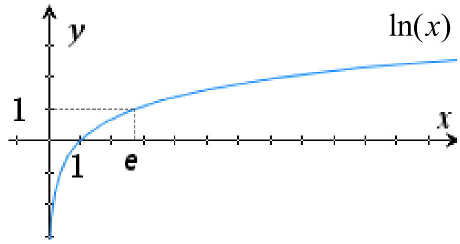
10. Den naturlige logaritmefunktion

På figuren er tegnet grafen for en funktion der hedder

den naturlige logaritmefunktion

og som betegnes

$\ln(x)$.



Bogstavet e er navn for et bestemt tal (ligesom π er). Hvis man vil skrive dette tal i **Nspire**, så skal man vælge det specielle **e** som står ved siden af π på tegnpaletten.

Der gælder

$$e \approx 2{,}71828 \quad \text{og} \quad \ln(e) = 1 \ .$$

Tallet e er

grundtallet for den naturlige logaritmefunktion

fordi $\ln(e) = 1$.

Der gælder

$$\ln(1) = 0 \ .$$

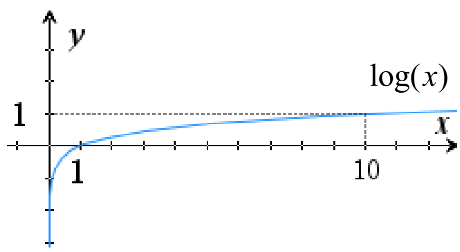
11. Logaritmefunktionen med grundtal 10

På figuren er tegnet grafen for en funktion der hedder

logaritmefunktionen med grundtal 10

og som betegnes

$\log(x)$.



Der gælder

$$\log(10) = 1 \ .$$

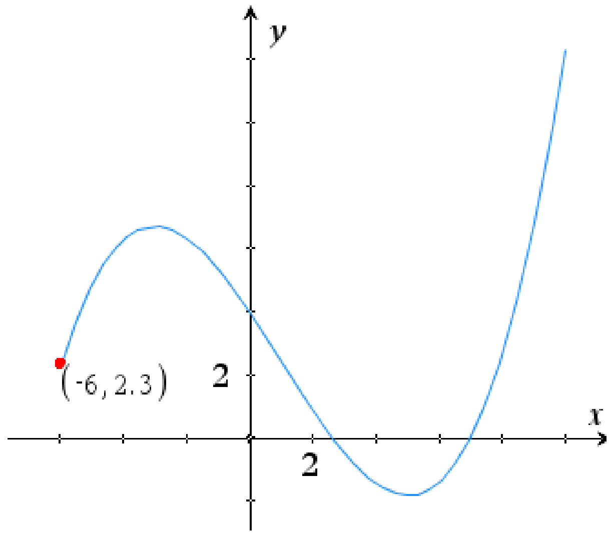
Det er derfor man siger at 10 er grundtallet.

Der gælder

$$\log(1) = 0 \ .$$

Monotoniintervaller

12. Hvad er monotoniintervaller?



Figuren viser Nspires graf-vindue med en funktion f.

For det røde punkt er $x = -6$ og $y = 2{,}3$.

Vi trækker i det røde punkt og ser hvordan x og y ændres.

<u>Vi trækker punktet langs grafen fra venstre mod højre. Så ser vi</u>

Fra x er -6 til x er -3 bliver y større og større.
Fra x er -3 til x er 5 bliver y mindre og mindre.
Fra x er 5 til x er 10 bliver y større og større.

<u>Vi siger at **monotoniintervallerne** for f er følgende:</u>

f er voksende i intervallet $-6 \le x \le -3$
f er aftagende i intervallet $-3 \le x \le 5$
f er voksende i intervallet $5 \le x \le 10$

<u>Bemærkning:</u> Når vi kort siger

intervallet $5 \le x \le 10$

så mener vi

intervallet der er fastlagt ved dobbeltuligheden $5 \le x \le 10$

Der er altså ikke tale om at ordet "interval" betyder " dobbeltulighed" .

13. Hvordan bestemmer vi monotoniintervaller?

Besvarelse

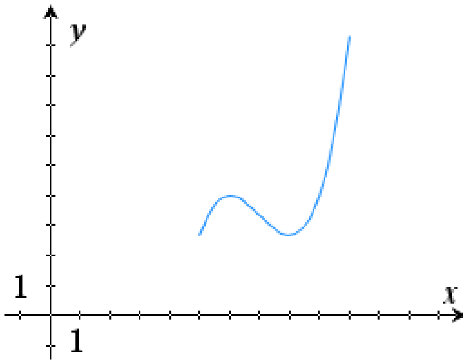
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 48x - 104 \quad , \quad 5 \leq x \leq 10 .$$

Vi skal bestemme monotoniintervallerne ved hjælp af grafen.

Vi taster forskrift og interval, og får Nspire til at tegne grafen.

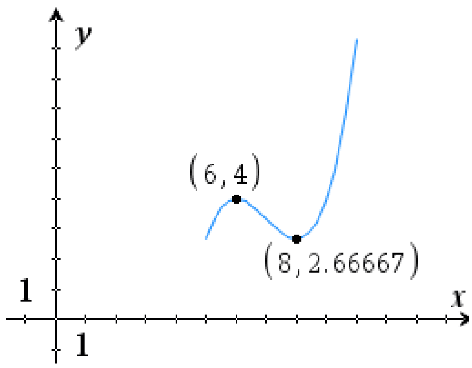
Se hvordan side 5 nederst.



På grafen ser vi at vi skal bruge x-koordinaten til grafens ”bakketop” og til grafens ”dalbund”.

I menuen vælger vi Undersøg grafer / Maksimum og klikker på begge sider af ”bakketoppen”. Så skriver Nspire koordinatsættet $(6,4)$.

I menuen vælger vi Undersøg grafer / Minimum og klikker på begge sider af ”dalbunden”. Så skriver Nspire koordinatsættet $(8, 2{,}66667)$.



Monotoniintervallerne skiller altså ved x-værdierne 6 og 8 .
På grafen ser vi om funktionen er voksende eller aftagende i et interval.

Monotoniintervaller for f:

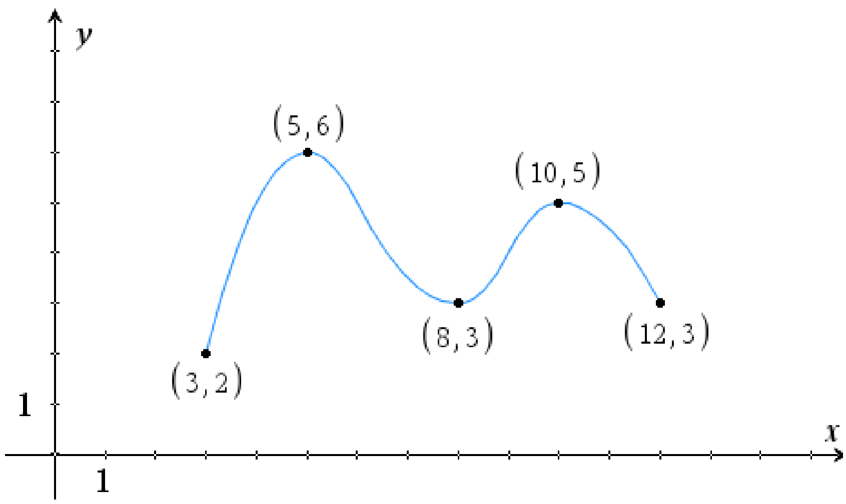
f er voksende i intervallet $5 \leq x \leq 6$

f er aftagende i intervallet $6 \leq x \leq 8$

f er voksende i intervallet $8 \leq x \leq 10$

Størst og mindst

14. Størst og mindst



Figuren viser grafen for en funktion f .

Vi ser:

Det største y er 6 .
y er størst når x er 5 .

Det mindste y er 2 .
y er mindst når x er 3 .

y-koordinaterne til punkterne på grafen er 2 og 6 og alle tal mellem 2 og 6 .

15. Bestemme største eller mindste *y*.

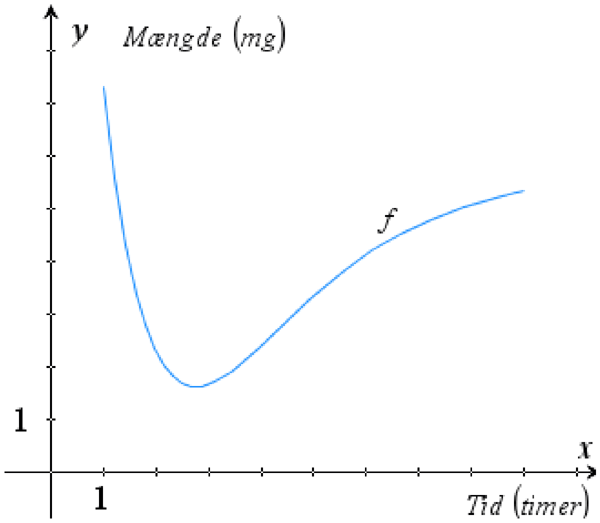
Besvarelse

I en model beskrives mængden af et stof ved funktionen

$$f(x) = 15{,}4 \cdot (1{,}2 - x) \cdot 1{,}9^{-x} + 5{,}7 \quad , \quad 1 \le x \le 9 \; .$$

hvor $f(x)$ er mængden (målt i mg) og x er tiden (målt i timer).

Vi taster forskriften for f og får Nspire til at tegne grafen. Se figur. Se hvordan side 5 nederst.



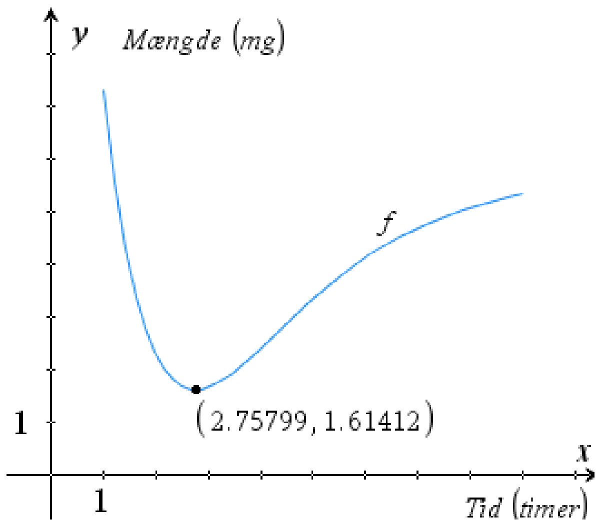
Ved hjælp af grafen vil vi bestemme

den mindste mængde af stoffet

og

det tidspunkt hvor mængden er mindst.

I menuen vælger vi Undersøg grafer / Minimum og klikker til venstre for og til højre for det nederste punkt på grafen. Så skriver Nspire koordinatsættet. Se figuren nedenfor.



Den mindste mængde af stoffet er 1,6 mg .

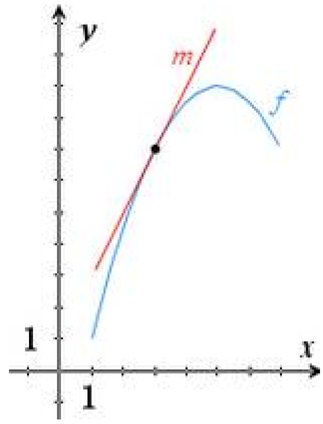
På tidspunktet 2,8 timer er mænden af stoffet mindst.

Tangent

16. Hvad er en tangent?

Figuren viser en linje m samt grafen for en funktion f .
Linjen m er

tangent til grafen for f i punktet P .



14a. Regel: Tangenten i P er den linje gennem P der bedst følger grafen nær P .

P er røringspunkt for tangenten m .

Grafpunkterne nær en tangents røringspunkt ligger normalt ikke på tangenten selv om det ser sådan ud på en tegning da stregen ikke er uendelig tynd.

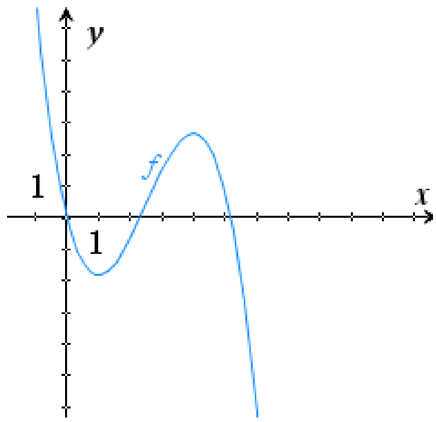
17. Bestemme tangent.

Besvarelse

Vi har fået Nspire til at tegne grafen for funktionen

$$f(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 4x \ .$$

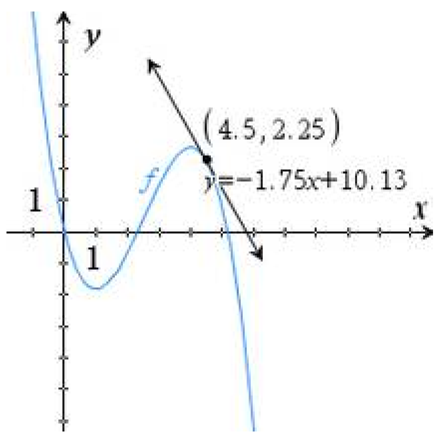
Se figuren til højre.



Vi vil bestemme tangenten til grafen i det grafpunkt hvis x-koordinat er 4,5 .

Vi afsætter et punkt på grafen og retter x-koordinaten til 4,5 . Så flyttes punktet på plads.

Vi vælger Geometri / Punkter og linjer / Tangentlinje og klikker på det afsatte punkt.
Så tegnes tangenten, og tangentens ligning skrives.
Se nederste figur.



Tangentens ligning er $y = -1{,}75x + 10{,}13$.

18. Væksthastighed

18a. Regel:

På grafen for en funktion f er et punkt P.
Vi kalder P's x-koordinat for t.
Vi kalder tangentens hældningskoefficient for a.
Hvis x er tiden, så er a væksthastigheden for størrelsen $f(x)$ på tidspunktet t.

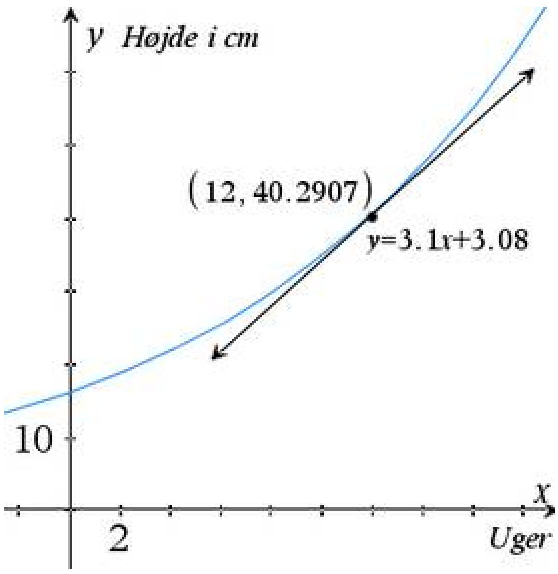
18b. Besvarelse

Højden af en plante beskrives ved funktionen

$$f(x) = 16\cdot 1{,}08^x$$

hvor $f(x)$ er højden (målt i cm) og x er tiden (målt i uger).

Vi taster forskriften og får Nspire til at tegne grafen.
Vi afsætter et punktpå grafen og ændrer x-koordinaten til 12.
Vi får Nspire til at tegne tangenten i punktet. Se hvordan i ramme 17.
Nspire skriver tangentens ligning.



Vi ser at tangentens ligning er $y = 3.1x + 3{,}08$.
Af denne linje ser vi at linjens hældningskoefficient er $3{,}1$.

Det er tallet foran x der viser hvor stejl linjen er og dermed hvor hurtigt y vokser.

Det betyder at på tidspunktet 12 uger, er plantens væksthastighed 3,1 cm pr. uge .