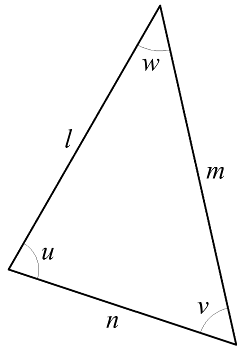
Trekants-beregning

for C-niveau i stx

2013 Karsten Juul

1. En sides modstående vinkel



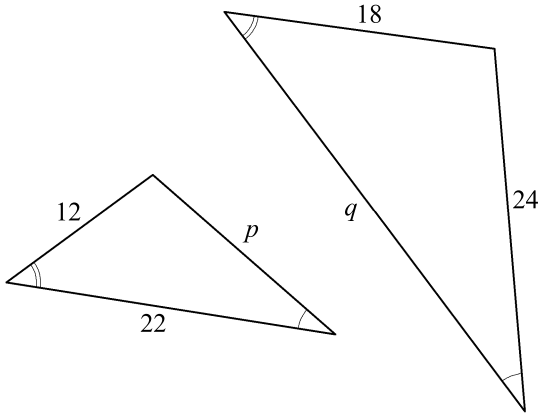
v er modstående vinkel til siden l
fordi l ikke støder op til v .

Vi ser at m og n støder op til v ,
så m og n er ikke modstående til v .

u er modstående til m .

w er modstående til n .

2. Ensvinklede trekanter



<u>**De to trekanter har samme vinkler, så**</u>

- de to trekanter har samme form
- den store trekant er en forstørrelse af den lille

<u>**Udregne forstørrelsesfaktoren**</u>

Når vi ganger siderne i den lille med forstørrelsesfaktoren k ,
så får vi siderne i den store:

$$12 \cdot k = 18$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 12 og får

$$k = \mathbf{1{,}5}$$

<u>**Hvorfor er forstørrelsesfaktoren ikke 2 ?**</u>

Vi kan ikke bruge siderne 12 og 24 til at udregne forstørrelsesfaktoren
fordi siderne 12 og 24 ikke har ens modstående vinkler.

<u>**Vi bruger forstørrelsesfaktoren 1,5 til at udregne q :**</u>

Siderne 22 og q har modstående vinkler der er ens. Derfor er

$$22 \cdot \mathbf{1{,}5} = q$$

Vi udregner venstresiden og får

$$q = 33$$

<u>**Vi bruger forstørrelsesfaktoren 1,5 til at udregne p :**</u>

Siderne p og 24 har modstående vinkler der er lens. Derfor er

$$p \cdot \mathbf{1{,}5} = 24$$

Vi dividerer begge sider med 1,5 og får

$$p = 16$$

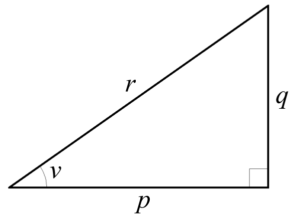
3. Ord for siderne i en retvinklet trekant

Siden p er en katete fordi den støder op til den rette vinkel.

Siden r er hypotenusen fordi den ikke støder op til den rette vinkel.

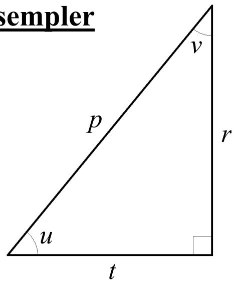
Siden p er den hosliggende katete til vinkel v fordi p er den af kateterne der støder op til vinkel v .

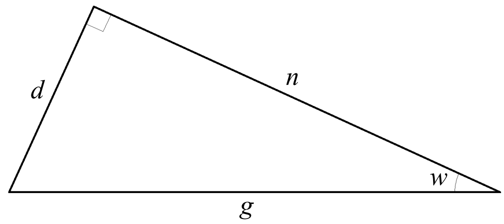
Siden q er den modstående katete til vinkel v fordi q er den af kateterne der ikke støder op til vinkel v .

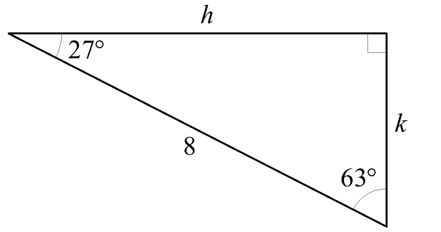


Ordene katete og hypotenuse kan kun bruges i en retvinklet trekant.

Eksempler







r er hosliggende katete til v
t er modtående katete til v

n er hosliggende katete til w
d er modtående katete til w
g er hypotenuse

h er modstående katete til vinklen på 63°
Hypotenusen er 8

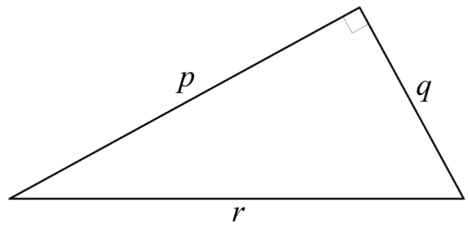
4. Pythagoras' sætning

Pythagoras' sætning gælder kun i retvinklede trekanter.

Pythagoras' sætning som formel

$$p^2 + q^2 = r^2$$

når p og q er kateter, og r er hypotenuse.

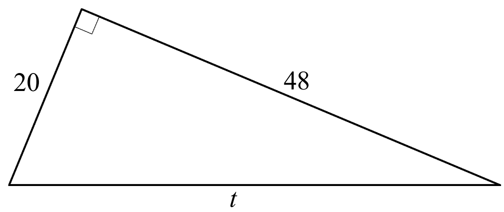


Pythagoras' sætning i ord

Den ene katete i anden **plus** den anden katete i anden **er** hypotenusen i anden.

5. Udregn hypotenuse når vi kender de to kateter

Opgave: Bestem t på figuren.



Svar: 20 og 48 er kateter, og t er hypotenuse, så

$$20^2 + 48^2 = t^2$$

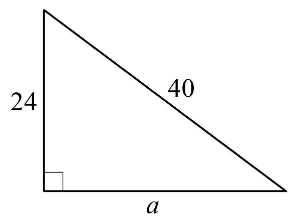
Nspire løser denne ligning mht. t for t større end 0 og får $t = 52$

$\text{solve}(20^2+48^2=t^2,t)|t>0 \blacktriangleright t=52$

$t = 52$

6. Udregn katete når vi kender katete og hypotenuse

Opgave: Bestem a på figuren.



Svar: 24 og a er kateter, og 40 er hypotenuse, så

$$24^2 + a^2 = 40^2$$

Nspire løser denne ligning mht. a for a større end 0 og får $a = 32$

$\text{solve}(24^2+a^2=40^2,a)|a>0 \blacktriangleright a=32$

$t = 32$

7. Udregne cosinus, sinus eller tangens til et gradtal

I mange opgaver med trekanter har vi brug for at regne med noget der hedder cosinus , sinus og tangens .

I et matematikfelt i et notevindue i Nspire taster vi cos(26°) og ctrl-enter (cmd-enter på Mac) :

$\cos(26°) = 0.898794$

Husk gradtegnet.
Så virker det uanset om Nspire er indstillet til at regne med et andet vinkelmål end grader.
Og så er ligningen både sædvanligt sprog og Nspiresprog.
Hvis vi i sædvanligt sprog ikke skriver °, så betyder det at vinkelmålet er radianer.

Når vi læser denne ligning, siger vi:

cosinus til 26° er 0,898794 .

Flere udregninger:

$\sin(138°) = 0.669131$

$\tan(15.2°) = 0.271694$

Når vi læser disse ligninger, siger vi

sinus til 138° er 0,669131 .
tangens til 15,2° er 0,271694 .

8. Løse ligning med cosinus, sinus eller tangens

Hvis v er en vinkel i en trekant og

$7 \cdot \cos(v) = 4$

så skal vi løse denne ligning.
Ligningen har mange positive og negative løsninger, men
da v er en vinkel i en trekant, skal vi kun finde løsninger mellem 0° og 180°.

Nspire
løser ligningen $7 \cdot \cos(v) = 4$ mht. v for $0° < v < 180°$

Her står i sædvanligt sprog hvad det er for en operation vi får Nspire til at udføre.
Det skal vi altid skrive når vi bruger solve.

og får $v = 55{,}1501°$.

$\text{solve}(7 \cdot \cos(v°)=4, v) | 0<v<180 \;\blacktriangleright\; v=55.1501$

Læg mærke til hvor der er gradtegn.
Når vi skriver sådan, så virker det uanset om Nspire er indstillet til at regne med et andet vinkelmål end grader.
I sædvanligt sprog er der IKKE gradtegn på et bogstav.

Hvis u er en vinkel i en retvinklet trekant, skal vi kun finde løsninger mellem 0° og 90°:

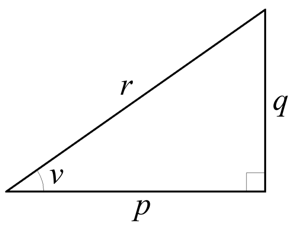
Nspire
løser ligningen $4{,}5 \cdot \tan(u) = 8{,}2$ mht. v for $0° < u < 90°$

og får $v = 61{,}2429°$.

$\text{solve}(4.5 \cdot \tan(u°)=8.2, u) | 0<u<90 \;\blacktriangleright\; u=61.2429$

9. Regler for cos, sin og tan i retvinklet trekant

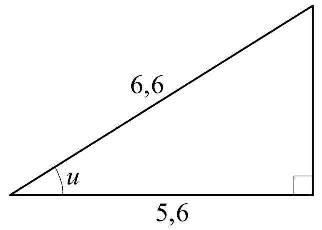
Når
v er en spids vinkel i en retvinklet trekant
r er hypotenusen
p er v's hosliggende katete
q er v's modstående katete



gælder:

$r \cdot \cos(v) = p$	hypotenuse **gange** cosinus til vinklen **er** vinklens hosliggende katete
$r \cdot \sin(v) = q$	hypotenuse **gange** sinus til vinklen **er** vinklens modstående katete
$p \cdot \tan(v) = q$	vinklens hosliggende katete **gange** tangens til vinklen **er** vinklens modstående katete
↑ reglerne som formler	↑ reglerne i ord

11. Opgave: Bestem vinklen u på figuren.



Svar: Der indgår hypotenusen, en vinkel og vinklens hosliggende katete, så vi skal bruge cosinus:

$$6{,}6 \cdot \cos(u) = 5{,}6$$

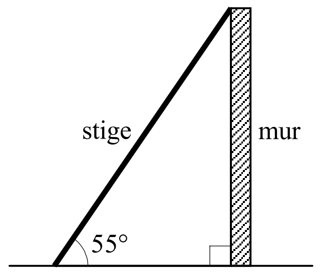
Nspire løser denne ligning mht. u for u mellem 0° og 90° og får $u = 31{,}9527°$

solve(6.6· cos(u°)=5.6,u)|0<u<90 ▸ u=31.9527

$u =$ 32°

---

12. Opgave: Figuren viser en stige der når op til toppen af en 3 m høj mur. Stigen danner en vinkel på 55° med jordoverfladen. Bestem længden af stigen.



Svar: Der indgår hypotenusen, en vinkel og vinklens modstående katete, så vi skal bruge sinus:

$$s \cdot \sin(55°) = 3$$ hvor s er stigens længde

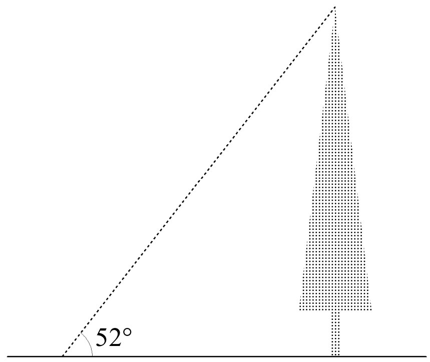
Nspire løser denne ligning mht. s for s større end 0 og får $s = 3{,}66232$

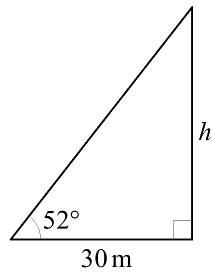
solve(s· sin(55°)=3,s)|s>0 ▸ s=3.66232

Stigens længde er 3,66 cm

---

13. Opgave: 30 meter fra et træ sigter vi op mod toppen. Vinklen mellem sigtelinje og vandret er 52°. Trekanten til højre er en model af denne situation.





Svar: Der indgår en vinkel og de to kateter, så vi skal bruge tangens:

$$30 \cdot \tan(52°) = h$$

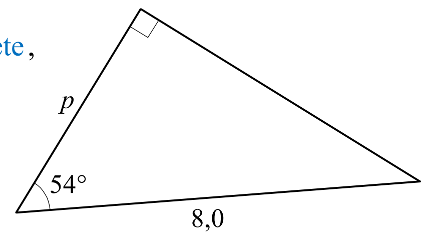
Nspire udregner ligningens venstre side:

30· tan(52°) = 38.3982

Træets højde er 38 m

---

14. Opgave: Bestem siden p på figuren.



Svar: Der indgår hypotenusen, en vinkel og vinklens hosliggende katete, så vi skal bruge cosinus:

$$8{,}0 \cdot \cos(54°) = p$$

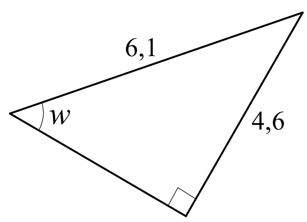
Nspire udregner ligningens venstre side:

8· cos(54°) = 4.70228

$p =$ 4,7

---

15. Opgave: Bestem vinklen w på figuren.



Svar: Der indgår hypotenusen, en vinkel og vinklens modstående katete, så vi skal bruge sinus:

$$6{,}1 \cdot \sin(w) = 4{,}6$$

Nspire løser denne ligning mht. w for w mellem 0° og 90° og får $w = 48{,}9466°$

solve(6.1· sin(w°)=4.6,w)|0<w<90 ▸ w=48.9466

$w =$ 49°

16. Sinusrelationen

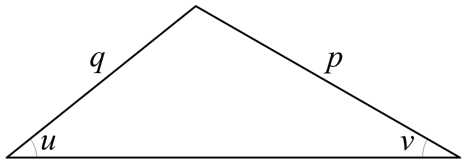
Når

siden p er modstående til vinklen u

siden q er modstående til vinklen v

er

$$\frac{p}{\sin(u)} = \frac{q}{\sin(v)}$$



Denne regel hedder **sinusrelationen** .

Sinusrelationen gælder i alle trekanter,
men det er klodset at bruge sinusrelationen i en retvinklet trekant da vi her kan bruge en simplere formel.

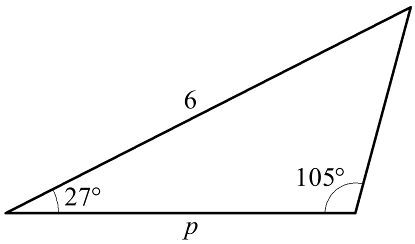
17. Hvornår bruger vi sinusrelationen?

Hvis trekanten ikke er retvinklet og vi kender to vinkler og en side, og vi skal finde en side, så bruger vi sinusrelationen.
Hvis vi ikke kender vinklen over for den side vi skal finde, så udregner vi først denne vinkel. Det kan vi da summen af de tre vinkler er 180°.

Hvis trekanten ikke er retvinklet og vi kender to sider og vinklen over for en af dem, og vi skal finde en vinkel, så bruger vi sinusrelationen.
Det er vinklen over for den anden kendte side vi finder. Den sidste vinkel kan vi finde da summen af de tre vinkler er 180°.

18. Udregn side med sinusrelation

Opgave: Bestem siden p på figuren.



Svar: Vi kender to vinkler og en side, og skal finde en side, så vi bruger sinusrelationen.

Vinklen over for p er

$180°–27°–105° = 48°$

Nu kan vi bruge sinusrelationen:

$$\frac{p}{\sin(48°)} = \frac{6}{\sin(105°)}$$

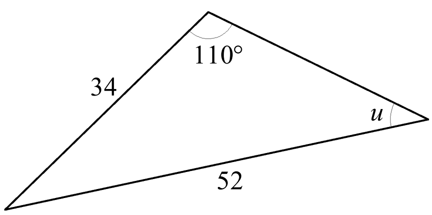
Nspire løser denne ligning mht. p for p større end 0 og får $p = 4{,}61616$

$$\text{solve}\left(\frac{p}{\sin(48°)}=\frac{6}{\sin(105°)},p\right)|p>0 \quad \blacktriangleright \; p=4.61616$$

$p =$ 4,6

19. Udregn vinkel med sinusrelation

Opgave: Bestem vinklen u på figuren.



Svar: Vi kender to sider og vinklen over for en af dem og skal finde en vinkel, så vi bruger sinusrelationen:

$$\frac{34}{\sin(u)} = \frac{52}{\sin(110°)}$$

Nspire løser denne ligning mht. u for u mellem 0° og 180° og får $u = 37{,}9094°$ eller $u = 142{,}091°$

$$\text{solve}\left(\frac{34}{\sin(u°)}=\frac{52}{\sin(110°)},u\right)|0<u<180 \quad \blacktriangleright \; u=37.9094 \text{ or } u=142.091$$

u må være mindre end 90° da en af de andre vinkler er over 90°, så

$u =$ 37,9°

20. Cosinusrelationen

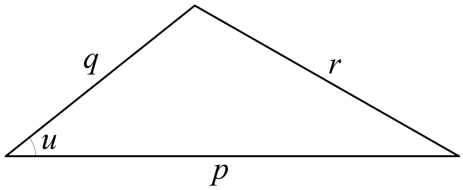
Når

siderne er p , q og r

siden r er modstående til vinklen u

er

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$



Denne regel hedder **cosinusrelationen** .

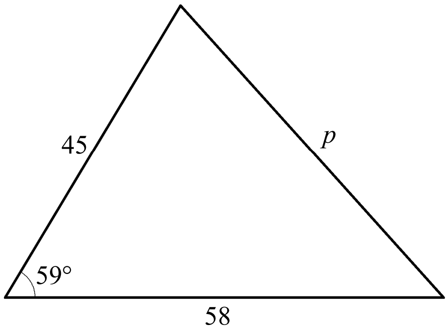
Cosinusrelationen gælder i alle trekanter,
men det er klodset at bruge cosinusrelationen i en retvinklet trekant da vi her kan bruge en simplere formel.

21. Hvornår bruger vi cosinusrelationen?

Hvis trekanten ikke er retvinklet og vi kender to sider og vinklen mellem, og vi skal finde den sidste side, så bruger vi cosinusrelationen.

Hvis trekanten ikke er retvinklet og vi kender de tre sider, og vi skal finde en vinkel, så bruger vi cosinusrelationen.

22. Udregn side med cosinusrelation



Opgave: Bestem siden p på figuren.

Svar: Vi kender to sider og vinklen mellem, og vi skal finde den sidste side, så bruger vi cosinusrelationen.

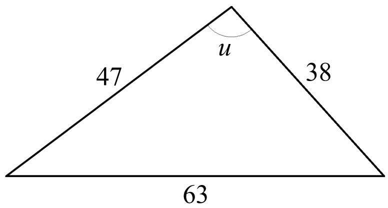
$$p^2 = 58^2 + 45^2 - 2 \cdot 58 \cdot 45 \cdot \cos(59°)$$

Nspire løser denne ligning mht. p for $p > 0$ og får $p = 51{,}9663$.

$$\text{solve}\left(p^2=58^2+45^2-2\cdot 58\cdot 45\cdot \cos(59°),p\right)|p>0 \;\blacktriangleright\; p=51.9663$$

$p =$ 52,0

23. Udregn vinkel med cosinusrelation



Opgave: Bestem vinklen v på figuren.

Svar: Vi kender de tre sider, og vi skal finde en vinkel, så bruger vi cosinusrelationen.

$$63^2 = 38^2 + 47^2 - 2 \cdot 38 \cdot 47 \cdot \cos(u)$$

Nspire løser denne ligning mht. u for u mellem 0° og 180° og får $u = 95{,}0754°$.

$$\text{solve}\left(63^2=38^2+47^2-2\cdot 38\cdot 47\cdot \cos(u°),u\right)|0<u<180 \;\blacktriangleright\; u=95.0754$$

$u =$ 95,1°

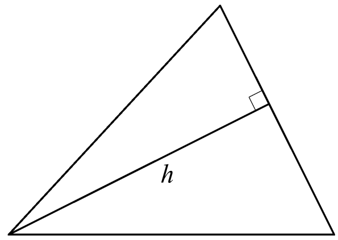
24. Højde, median og vinkelhalveringslinje

25. Højde

En højde i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til et punkt på den modstående side og er vinkelret på denne side.

I enhver trekant er der tre højder.

På figuren er h en af højderne.

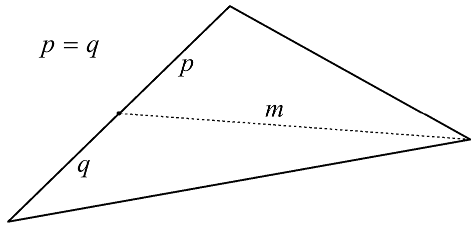


26. Median

En median i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side.

I enhver trekant er der tre medianer.

På figuren er m en af medianerne.

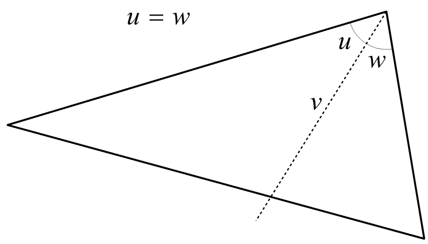


27. Vinkelhalveringslinje

En vinkelhalveringslinje i en trekant er en linje der går gennem en af vinkelspidserne og halverer vinklen.

I enhver trekant er der tre vinkelhalveringslinjer.

På figuren er v en af vinkelhalveringslinjerne.



28. Eksempler med højde, median og vinkelhalveringslinje

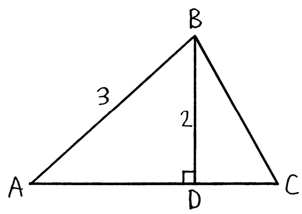
29. Eksempel med højde

I en trekant ABC er AB lig 3 og højden fra B er 2 . Vi vil udregne vinkel A .
Vi tegner en skitse. Da BD er højde, er vinkel D ret, så af trekant ABD får vi

$$3 \cdot \sin(A) = 2$$

Nspire løser denne ligning mht. A for $0° < A < 180°$ og får $A = 41{,}8103°$.

$A =$ 41,8°



30. Eksempel med median

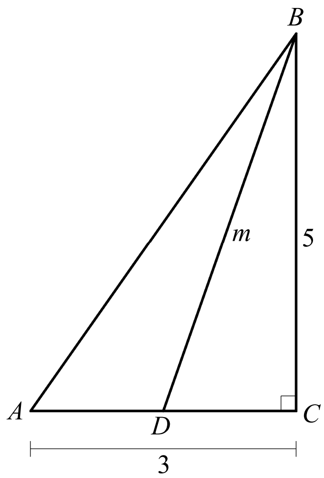
Vi vil udregne længden af medianen m på tegningen.

Da m er median, er DC halvdelen af 3 dvs. 1,5 .
Af den retvinklede trekant BCD får vi

$$m^2 = 1{,}5^2 + 5^2$$

Nspire løser denne ligning mht. m for $m > 0$ og får $m = 5{,}22015$

$m =$ 5,22



31. Eksempel med vinkelhalveringslinje

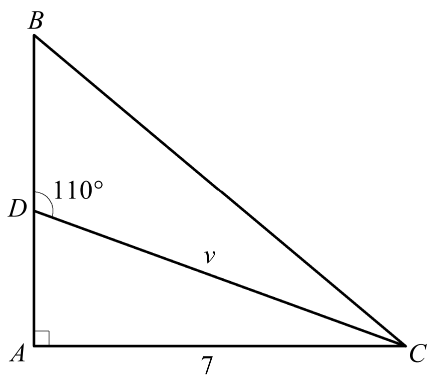
På tegningen er v vinkelhalveringslinje
Vi vil udregne c som er længden af AB .

Vinkel D i trekant ACD er $180° - 110° = 70°$.
Vinkel C i trekant ACD er $180° - 70° - 90° = 20°$.
Vinkel C i trekant ABC er $2 \cdot 20° = 40°$ da v halverer vinklen.
Af den retvinklede trekant ABC får vi

$$7 \cdot \tan(40°) = c$$

Nspire udregner venstre side og får $5{,}8737 = c$

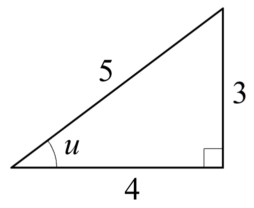
$c =$ 5,87



De 11 opgavetyper med sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant

I trekanten til højre er siderne med længde 3 og 4 **<u>kateter</u>**, fordi vinklen mellem dem er ret. Siden med længde 5 er **<u>hypotenuse</u>**, fordi den ikke er en af kateterne.

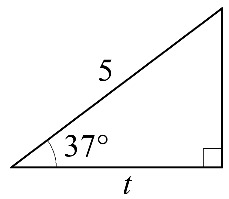
Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben. Den katete du holder i, er **<u>vinklens hosliggende katete</u>**. Den anden katete er **<u>vinklens modstående katete</u>**.



<u>Type 1</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.
<u>Udregn:</u> Vinklens hosliggende katete.

$5 \cdot \mathbf{cos}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

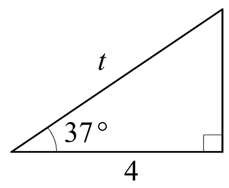
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 2</u>
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens hosliggende katete.
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{cos}(37°) = 4$ Nspire løser mht. t

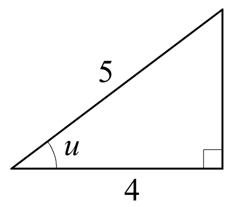
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 3</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.
<u>Udregn:</u> Vinklen mellem disse.

$5 \cdot \mathbf{cos}(u) = 4$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

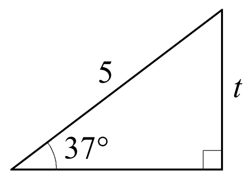
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 4</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.
<u>Udregn:</u> Vinklens modstående katete.

$5 \cdot \mathbf{sin}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

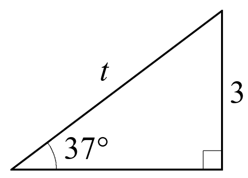
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 5</u>
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens modstående katete.
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{sin}(37°) = 3$ Nspire løser mht. t

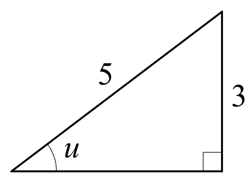
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 6</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.
<u>Udregn:</u> Katetens modstående vinkel.

$5 \cdot \mathbf{sin}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

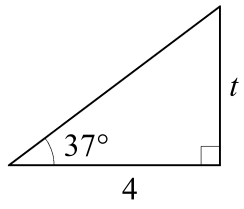
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



Type 7
Kendt: En spids vinkel og dens hosliggende katete.
Udregn: Vinklens modstående katete.

$4 \cdot \mathbf{tan}(37°) \;=\; t$ Nspire udregner venstre side

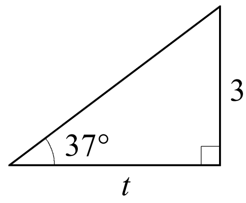
vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 8
Kendt: En spids vinkel og dens modstående katete.
Udregn: Vinklens hosliggende katete.

$t \cdot \mathbf{tan}(37°) \;=\; 3$ Nspire løser mht. t

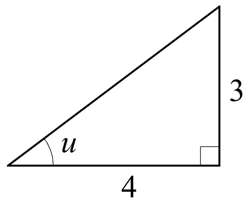
vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 9
Kendt: De to kateter.
Udregn: En spids vinkel.

$4 \cdot \mathbf{tan}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

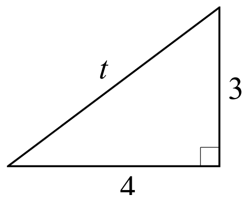
vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 10
Kendt: De to kateter.
Udregn: Hypotenusen.

$3^{\mathbf{2}} + 4^{\mathbf{2}} \;=\; t^{\mathbf{2}}$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

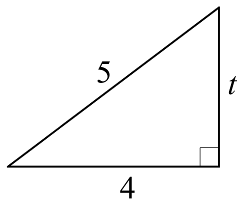
hypotenuse
kateter



Type 11
Kendt: Hypotenusen og en katete.
Udregn: Den anden katete.

$t^{\mathbf{2}} + 4^{\mathbf{2}} \;=\; 5^{\mathbf{2}}$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse
kateter



De 4 formler til udregning af sider og vinkler i retvinklet trekant

Hver af de 11 metoder ovenfor bruger en af følgende fire formler:

I en retvinklet trekant gælder

(1) $\quad den\_ene\_katete^{\mathbf{2}} + den\_anden\_katete^{\mathbf{2}} \;=\; hypotenusen^{\mathbf{2}}$

For en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

(2) $\quad hypotenusen \cdot \mathbf{cos}(\,vinkel\,) \;=\; vinklens\_hosliggende\_katete$

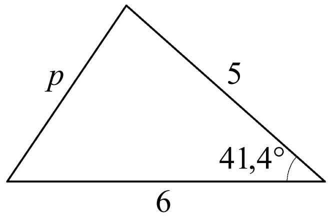
(3) $\quad hypotenusen \cdot \mathbf{sin}(\,vinkel\,) \;=\; vinklens\_modstående\_katete$

(4) $\quad vinklens\_hosliggende\_katete \cdot \mathbf{tan}(\,vinkel\,) \;=\; vinklens\_modstående\_katete$

De 4 opgavetyper vi løser ved hjælp af cosinusrelationen eller sinusrelationen

<u>Type 12:</u> Udregn side med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> En vinkel mellem to sider og disse to sider.
<u>Udregn:</u> Siden over for vinklen.



altid 2

$$p^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(41{,}4°)$$

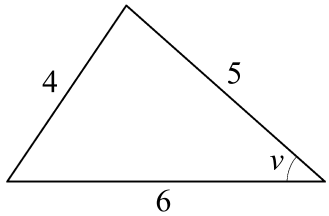
vinklens ben

siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

<u>Type 13:</u> Udregn vinkel med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> De tre sider.
<u>Udregn:</u> Vinklen.



altid 2

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(v)$$

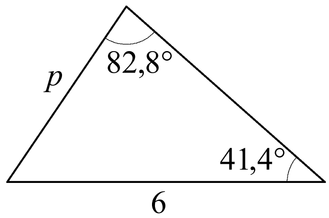
vinklens ben

siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. v for $0° \leq v \leq 180°$

<u>Type 14:</u> Udregn side med sinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> En side og to vinkler.
<u>Udregn:</u> En af de andre sider.



$$\frac{p}{\sin(41.4°)} = \frac{6}{\sin(82.8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

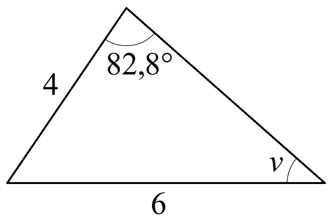
siden der er p enheder, ligger over for vinklen der er 41,4°

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

Hvis det var siden over for den ukendte vinkel vi skulle finde, så måtte vi først udregne denne vinkel ved at udnytte at summen af de tre vinkler er $180°$.

<u>Type 15:</u> Udregn vinkel med sinusrelation
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> To sider og vinklen over for en af dem.
<u>Udregn:</u> Vinklen over for den anden af de to sider.



$$\frac{4}{\sin(v)} = \frac{6}{\sin(82{,}8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

siden der er 4 enheder, ligger over for vinklen af størrelse v

Nspire løser ligningen mht. v for $0° \leq v \leq 180°$

Nspire giver både en løsning under $90°$ og en løsning over $90°$. <u>Husk at begrunde hvilken af løsningerne der skal bruges</u>. I dette tilfælde kan begrundelsen være: "Vinklen er under $90°$ da siden over for vinklen ikke er den største i trekanten." I nogle opgaver er det oplyst om vinklen er <u>stump</u> (dvs. over $90°$) eller <u>spids</u> (dvs. under $90°$).