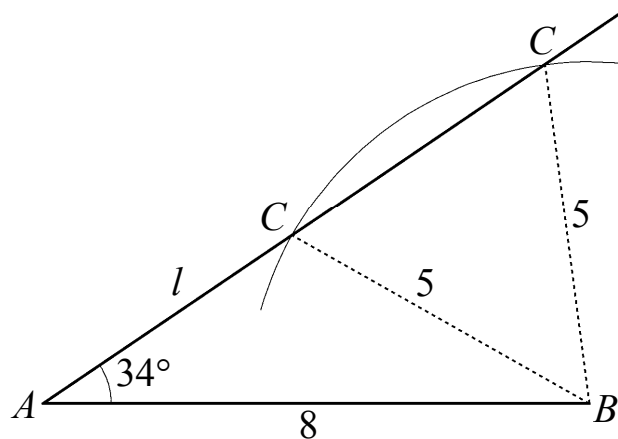


Trekants- beregning

for B- og A- niveau i stx og hf
udgave 2



2014 Karsten Juul

Indhold

1. Vinkler	1
2. Trekants højde og areal	1
2.1 Højde.....	1
2.2 Højde-grundlinje-formel for trekants areal.....	1
2.3 Eksempel hvor areal er kendt.....	1
3. Pythagoras sætning	2
3.1 Katete og hypotenuse.....	2
3.2 Pythagoras' sætning.....	2
3.3 Bestem <u>katete</u> med Pythagoras' sætning.....	2
3.4 Bestem <u>hypotenuse</u> med Pythagoras' sætning.....	2
4. Sprogbrug	3
4.1 Modstående vinkel eller side.....	3
4.2 Betegnelse for modstående vinkel eller side.....	3
4.3 Ord for siderne i en retvinklet trekant.....	3
5. Ensvinklede trekanter	4
5.1 Ord og metoder i opgaver om ensvinklede trekanter.....	4
5.2 Simpel opgave om ensvinklede trekanter.....	4
5.3 S sammensat opgave om ensvinklede trekanter.....	5
6. Cosinus, sinus, tangens og Nspire	5
7. Cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant	6
7.1 De tre regler for cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant.....	6
7.2 Eksempler på udregninger med cos, sin og tan i retvinklet trekant.....	6
8. Sinusformlen for areal af trekant	7
8.1 Sinusformlen for areal af trekant.....	7
8.2 Bevis for sinusformlen for areal af trekant.....	7
8.3 Eksempler på brug af sinusformlen for areal af trekant.....	7
9. Sinusrelationen	8
9.1 Sinusrelationen.....	8
9.2 Bevis for sinusrelationen.....	8
9.3 Bestem vinkel med sinusrelationen.....	8
9.4 Bestem side med sinusrelationen.....	8
9.5 Opgave med to løsninger.....	9
10. Cosinusrelationen	10
10.1 Cosinusrelationen.....	10
10.2 Bevis for cosinusrelationen.....	10
10.3 Bestem vinkel med cosinusrelationen.....	10
10.4 Bestem side med cosinusrelationen.....	10
11. Nogle begreber	11
11.1 Højde.....	11
11.2 Median.....	11
11.3 Vinkelhalveringslinje.....	11
11.4 Nogle betegnelser.....	11
12. S sammensat opgave	12
13. Kvadratsætninger	12
De 11 opgavetyper med sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant	13
De 4 formler til udregning af sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant	14
De 4 opgavetyper vi løser ved hjælp af cosinusrelationen eller sinusrelationen	15
De 3 opgavetyper med sinusformlen for trekants areal	16
De 3 formler for <u>vilkårlig</u> trekant	16
14. Et andet bevis for cosinusrelationen	17
14.1 Cosinusrelationen.....	17
14.2 Bevis for cosinusrelationen.....	17

En tidligere version af dette hæfte har skiftet adresse til:

http://mat1.dk/trekantsberegning_for_b_og_a_niveau_i_stx_og_hf_2012.pdf

I følgende hæfte er der øvelser, men ikke alle er relevante for brugerne af nærværende hæfte.

http://mat1.dk/oelvelser_til_haeftet_kortfattet_trekantsberegning_for_gymnasiet_og_hf.pdf

Trekantsberegning for B- og A-niveau i stx og hf, udgave 2 © 2014 Karsten Juul. Nyeste udgave af dette hæfte kan downloades fra <http://mat1.dk/noter.htm>. Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes, og oplyser hold, niveau, lærer og skole.

19/2-2016

1. Vinkler.

I en trekant er de tre vinkler altid 180° tilsammen:
 $u + v + r = 180^\circ$
 $r = 180^\circ - u - v$

I ligebenet trekant er vinkler ved grundlinje lige store, dvs. når $p = q$ er $u = v$.

Hvis l og m er parallelle, er $u = v$.

En vinkel i en trekant er **spids** hvis den er under 90°
ret hvis den er 90°
stump hvis den er over 90° .

2. Trekants højde og areal.

2.1 Højde.

Højden fra A er det linjestykke der går fra A og vinkelret ind på den modstående side.

Højden fra B går vinkelret ind på den modstående sides forlængelse.

Siden AC er højden fra A.

2.2 Højde-grundlinje-formel for trekants areal.

For trekanter gælder: $areal = \frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje}$

Trekants areal = $\frac{1}{2} \cdot d \cdot a$

En af højderne i trekanten. Grundlinje, dvs. den af siderne der er vinkelret på den valgte højde.

Formlen bruges ikke kun til at bestemme areal. Hvis vi kender to af tallene areal, højde og grundlinje, så kan vi bestemme det sidste af tallene.

2.3 Eksempel hvor areal er kendt.

$Areal = \frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje}$

$105 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28$

Løsning af ligningen **uden** hjælpemidler:

$$105 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28$$

$$105 = h \cdot 14$$

$$\frac{105}{14} = \frac{h \cdot 14}{14}$$

$$7,5 = h$$

$$h = \underline{\underline{7,5}}$$

Løsning af ligningen **med** hjælpemidler:

Nspire løser ligningen $105 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28$ mht. h og får $h = 7.5$.

$\text{solve}\left(105 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28, h\right) \rightarrow h = 7.5$

$h = \underline{\underline{7,5}}$

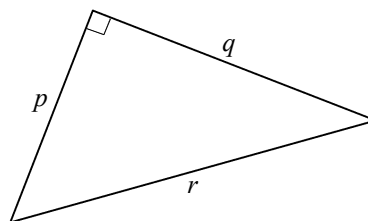
3. Pythagoras' sætning.

3.1 Katete og hypotenuse.

Siderne p og q er trekantens **kateter**.
Det kan vi se fordi vinklen imellem p og q er ret.

Siden r er **hypotenusen**.
Det kan vi se fordi r ikke er en af kateterne.

Advarsel: Hvis en trekant ikke er retvinklet, så har den hverken hypotenuse eller kateter.



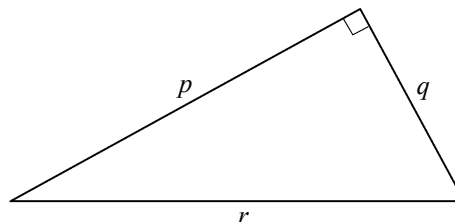
3.2 Pythagoras' sætning.

Pythagoras' sætning som formel

For en retvinklet trekant gælder:

$$p^2 + q^2 = r^2 \quad \leftarrow \text{Gælder kun i retvinklet trekant.}$$

når p og q er kateter,
og r er hypotenuse.



Pythagoras' sætning i ord

Den ene katete i anden **plus** den anden katete i anden **er** hypotenusen i anden.

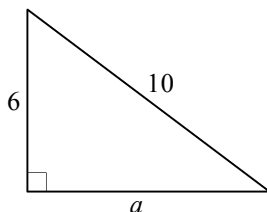
3.3 Bestem katete med Pythagoras' sætning.

Vi ser:

kateterne er a og 6
hypotenusen er 10

Derfor er

$$a^2 + 6^2 = 10^2$$



Løsning af ligningen **uden** hjælpemidler:

$$a^2 = 10^2 - 6^2$$

$$a = \sqrt{10^2 - 6^2} \quad \text{da } 0 < a$$

$$a = \sqrt{64}$$

$$a = \underline{\underline{8}}$$

Løsning af ligningen **med** hjælpemidler:

Nspire løser ligningen $a^2 + 6^2 = 10^2$ mht. a for $0 < a$ og får $a=8$.

$$\text{solve}(a^2 + 6^2 = 10^2, a) | 0 < a \rightarrow a=8$$

$$a = \underline{\underline{8}}$$

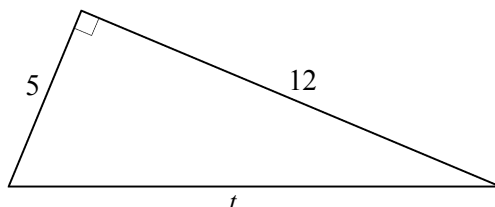
3.4 Bestem hypotenuse med Pythagoras' sætning.

Vi ser:

kateterne er 5 og 12
hypotenusen er t

Derfor er

$$5^2 + 12^2 = t^2$$



Løsning af ligningen **uden** hjælpemidler:

$$5^2 + 12^2 = t^2$$

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = t \quad \text{da } 0 < t$$

$$\sqrt{169} = t$$

$$t = \underline{\underline{13}}$$

Løsning af ligningen **med** hjælpemidler:

Nspire løser ligningen $5^2 + 12^2 = t^2$ mht. t for $0 < t$ og får $t=13$.

$$\text{solve}(5^2 + 12^2 = t^2, t) | 0 < t \rightarrow t=13$$

$$t = \underline{\underline{13}}$$

4. Sprogbrug.

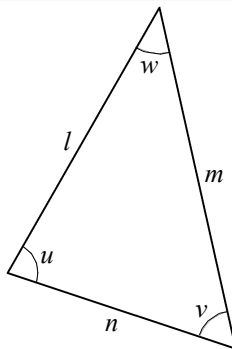
4.1. Modstående vinkel eller side.

v er **modstående vinkel** til siden l ,
og l er **modstående side** til vinklen v ,
fordi l ikke støder op til v .

Vi ser at m og n støder op til v ,
så m og n er ikke modstående til v .

u er **modstående** til m .

w er **modstående** til n .



4.2 Betegnelse for modstående vinkel eller side.

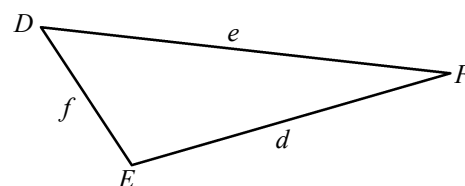
Hvis der står i trekant DEF er $f = 14$
gælder det er siden over for vinkelspidsen F der er 14.

Sprogbrugen er nemlig sådan at

når et stort bogstav er en vinkelspids i en trekant,

gælder det tilsvarende lille bogstav er siden over for vinkelspidsen,

hvis der ikke fremgår andet.



Eksempel på udnyttelse af denne sprogbrug:

I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er $a^2 + b^2 = c^2$.

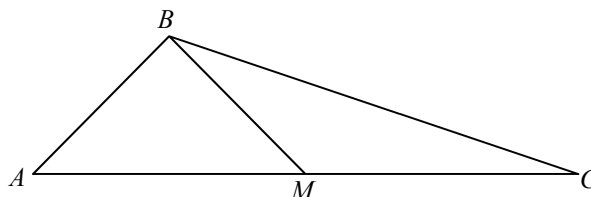
Advarsel: Se figur til højre.

Det dur ikke hvis du skriver $m = 2,6$.

Læseren kan ikke vide om det er AB eller BC der er 2,6.

Skriv m på den side du mener.

Du skal altid tegne en skitse i en geometriopgave.



4.3 Ord for siderne i en retvinklet trekant.

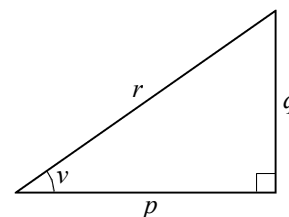
Siden p er en **katete** fordi den støder op til den rette vinkel.

Siden r er **hypotenusen** fordi den ikke støder op til den rette vinkel.

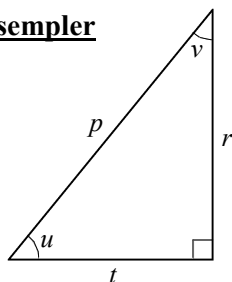
Siden p er den **hosliggende katete til vinkel v** fordi p er den af kateterne der støder op til vinkel v .

Siden q er den **modstående katete til vinkel v** fordi q er den af kateterne der ikke støder op til vinkel v .

Advarsel: Ordene **katete** og **hypotenusen** kan **kun** bruges i en **retvinklet trekant**.

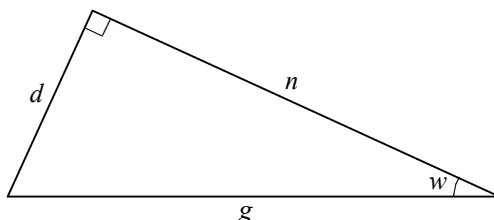


Eksempler



r er hosliggende katete til v

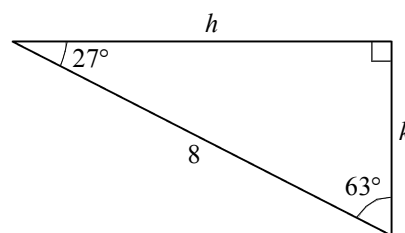
t er modstående katete til v



n er hosliggende katete til w

d er modstående katete til w

g er hypotenusen



h er modstående katete til vinklen på 63°

Hypotenusen er 8

5. Ensvinklede trekanter.

5.1 Ord og metoder i opgaver om ensvinklede trekanter.

På figuren har jeg brugt buer til at vise hvilke vinkler der er lige store:

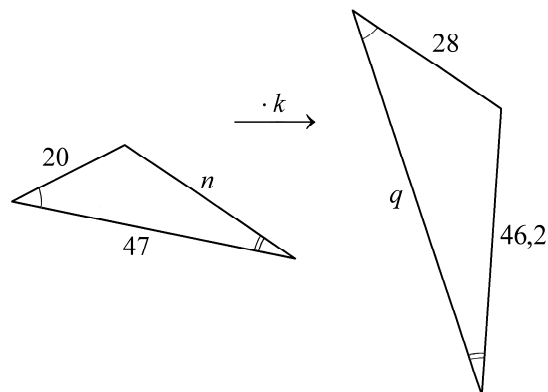
De to vinkler med dobbeltbuer er lige store.

De to vinkler med enkeltbuer er lige store.

De to sidste vinkler må så være lige store da vinklerne i en trekant tilsammen er 180° .

At de to trekanter har samme vinkler, udtrykker vi ved at sige at trekanterne er **ensvinklede**.

Regel: Når to trekanter har samme vinkler, er der en **skalafaktor**. Når vi ganger siderne i den ene trekant med skalafaktoren, så får vi siderne i den anden trekant.



På figuren har jeg vist at jeg har valgt at kalde skalafaktoren k , og at jeg har valgt at det er siderne i venstre trekant der skal ganges med skalafaktoren.

- (1) $20 \cdot k = 28$ da siderne der er 20 og 28 har lige store modstående vinkler (dobbeltbuer).
- (2) $47 \cdot k = q$ da siderne der er 47 og q har lige store modstående vinkler (ingen buer).
- (3) $n \cdot k = 46,2$ da siderne der er n og 46,2 har lige store modstående vinkler (enkeltbuer).

Af (1) får vi $k = \frac{28}{20} = 1,4$ Vi har nu udregnet k og kan bruge k til at udregne q og n .

Af (2) får vi $q = 47 \cdot 1,4 = 65,8$

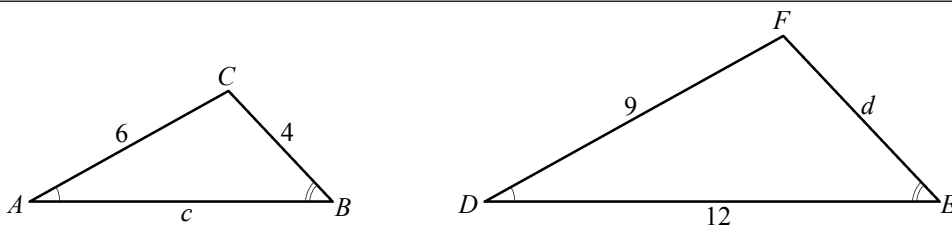
Af (3) får vi $n = \frac{46,2}{1,4} = 33$

5.2 Simpel opgave om ensvinklede trekanter.

Opgave

Trekanterne ABC og DEF på figuren er ensvinklede.

Bestem d og c .



Svar

Trekanterne er ensvinklede, så der er der en skalafaktor q som vi ganger sider i ABC med for at få sider i DEF .

Når der i opgaven står ordet **ensvinklede**, skal vi normalt udregne en skalafaktor.

$6 \cdot q = 9$ da siderne der er 6 og 9, har ens modstående vinkler.

$q = 1,5$ Vi har divideret begge sider med 6. Vi har nu udregnet q og kan bruge q til at udregne d og c .

$4 \cdot q = d$ da siderne der er 4 og d , har ens modstående vinkler.

$4 \cdot 1,5 = d$

$d = 6$

$c \cdot q = 12$ da siderne der er c og 12, har ens modstående vinkler.

$c \cdot 1,5 = 12$

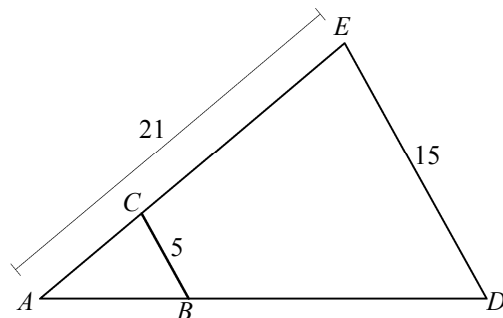
$c = 8$ Vi har divideret begge sider med 1,5.

5.3 Sammensat opgave om ensvinklede trekanter.

Opgave

På figuren er BC parallel med DE .

Bestem $|CE|$.



Svar

Da BC er parallel med DE , er trekanterne ABC og ADE ensvinklede, så der er en skalafaktor k .

Udregning af k :

$5 \cdot k = 15$ da siderne der er 5 og 15, har samme modstående vinkel.

$$\frac{5 \cdot k}{5} = \frac{15}{5}$$

$k = 3$ Vi har nu udregnet k og kan bruge k til at udregne $|AC|$.

Udregning af $|AC|$:

$|AC| \cdot 3 = 21$ da AC og siden der er 21, har ens modstående vinkler.

$$\frac{|AC| \cdot 3}{3} = \frac{21}{3}$$

$$|AC| = 7$$

Udregning af $|CE|$:

$$|CE| = 21 - 7$$

$$\underline{\underline{|CE| = 14}}$$

Ved hjælp af reglerne for ensvinklede trekanter kan vi udregne længder af sider i trekanterne, men CE er ikke side i en af trekanterne. Vi udregner derfor først $|AC|$. Så kan vi derefter udregne $|CE|$ ved at trække $|AC|$ fra 21.

6. Cosinus, sinus, tangens og Nspire.

I mange opgaver med trekanter har vi brug for at regne med noget der hedder **cosinus**, **sinus** og **tangens**.

I et matematikfelt i et notevindue i Nspire taster vi $\cos(26^\circ)$ og **ctrl-enter** (**cmd-enter** på Mac):

$$\cos(26^\circ) = 0.898794$$

Når vi læser denne ligning, siger vi:

$$\text{cosinus til } 26^\circ \text{ er } 0,898794.$$

Flere udregninger: $\sin(138^\circ) = 0.669131$ $\tan(15.2^\circ) = 0.271694$

Når vi læser disse ligninger, siger vi **sinus til 138°** er **0,669131** og **tangens til $15,2^\circ$** er **0,271694**.

Hvis v er en vinkel i en trekant og $7 \cdot \cos(v) = 4$, så skal vi løse denne ligning.

Ligningen har mange positive og negative løsninger, men

da v er en vinkel i en trekant, skal vi kun finde løsninger **mellem 0° og 180°** .

HUSK: Over solve-linjen skriver vi med sædvanligt matematikprog hvad der foregår i solve-linjen.

Nspire løser ligningen $7 \cdot \cos(v) = 4$ mht. v for $0^\circ < v < 180^\circ$ og får $v = 55,1501^\circ$.

$$\text{solve}(7 \cdot \cos(v)=4, v) | 0^\circ < v < 180^\circ \blacktriangleright v=55.1501 \longleftarrow \text{HUSK altid: Højreklik, Attributter, Grader for at være helt sikker.}$$

Hvis v er en vinkel i en retvinklet trekant, skal vi kun finde løsninger **mellem 0° og 90°** .

7. Cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant.

7.1 De tre regler for cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant.

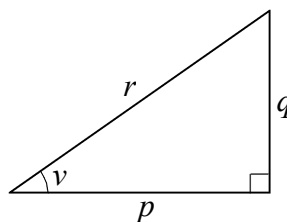
Når

v er en spids vinkel i en retvinklet trekant

r er hypotenusen

p er v 's hosliggende katete

q er v 's modstående katete



så gælder:

$$r \cdot \cos(v) = p \quad \text{dvs.} \quad \text{hypotenuse gange } \cos(v) \text{ er } v\text{'s hosliggende katete}$$

$$r \cdot \sin(v) = q \quad \text{dvs.} \quad \text{hypotenuse gange } \sin(v) \text{ er } v\text{'s modstående katete}$$

$$p \cdot \tan(v) = q \quad \text{dvs.} \quad v\text{'s hosliggende katete gange } \tan(v) \text{ er } v\text{'s modstående katete}$$

I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end v , p , q , r .

Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglerne i ord som vi har gjort til venstre for formlerne.

7.2 Eksempler på udregninger med cos, sin og tan i retvinklet trekant.

7.2 a Opgave Bestem vinkel A .

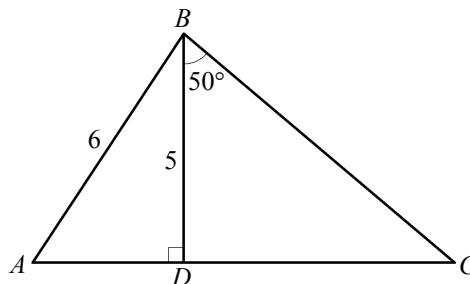
Svar

Af den retvinklede trekant ABD får vi $6 \cdot \sin(A) = 5$.

Nspire løser ligningen $6 \cdot \sin(A) = 5$ mht. A for $0^\circ < A < 90^\circ$

og får $A = 56,4427^\circ \approx 56,4^\circ$.

$$\text{solve}(6 \cdot \sin(A)=5, A) | 0 < A < 90^\circ \rightarrow a=56.4427$$



7.2 b Opgave Bestem $|BC|$.

Svar

Af den retvinklede trekant BCD får vi $|BC| \cdot \cos(50^\circ) = 5$.

Nspire løser ligningen $|BC| \cdot \cos(50^\circ) = 5$ mht. $|BC|$ for

$|BC| > 0$ og får $|BC| = 7,77862 \approx 7,78$.

$$\text{solve}(BC \cdot \cos(50^\circ)=5, BC) | 0 < BC \rightarrow bc=7.77862$$

7.2 c Opgave

30 meter fra et træ sigter vi op mod toppen.

Vinklen mellem sigtelinje og vandret er 52° .

Trekanten til højre er en model af denne situation.

Bestem træets højde.

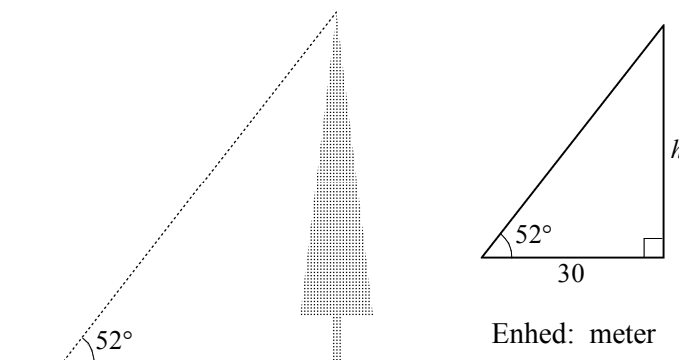
Svar

Af denne retvinklede trekant får vi

$$30 \cdot \tan(52^\circ) = h$$

$$h = 30 \cdot \tan(52^\circ) = 38,3982 \approx 38$$

Træets højde er **38 m**.



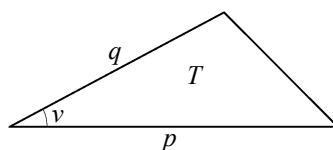
8. Sinusformlen for areal af trekant.

8.1 Sinusformlen for areal af trekant.

Sinusformlen for areal af trekant er

$$T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin(v)$$

hvor T er arealet, p og q er to sider i trekanten, og v er vinklen **mellem** disse sider.



Formlen bruges ikke kun til at bestemme areal. Hvis vi kender tre af tallene T , p , q og v , så kan vi bestemme det sidste af tallene.

Sinusformlen for areal af trekant udtrykt i ord:

*Areal af trekant = $\frac{1}{2}$ · den ene side · den anden side · sinus til vinklen **imellem** de to sider .*

8.2 Bevis for sinusformlen for areal af trekant.

På figuren tegner vi en højde h der deler trekanten op i to trekanter. Af den venstre af disse og af formelen for sinus i retvinklet trekant får vi:

$$q \cdot \sin(v) = h$$

Af højde-grundlinje-formelen for trekants areal får vi:

$$\text{areal} = \frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje}$$

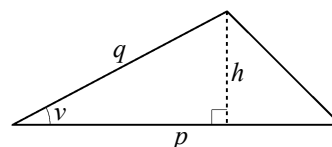
$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot p$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot h$$

Heri erstatter vi h med $q \cdot \sin(v)$. Ovenfor så vi at $q \cdot \sin(v) = h$.

$$T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin(v)$$

Dette er sinusformlen for trekants areal, så vi har bevist at den gælder.



8.3 Eksempler på brug af sinusformlen for areal af trekant.

Opgave

Arealet af trekant ABD er 31,6 .

Bestem længden af BD .

Bestem arealet af trekant BCD .

Svar

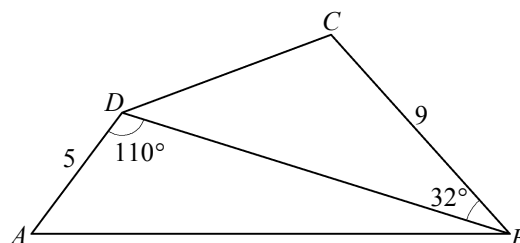
Da areal af trekant ABD er 31,6 , får vi af sinusformlen for areal af trekant: $31,6 = 0,5 \cdot 5 \cdot |BD| \cdot \sin(110^\circ)$.

Nspire løser ligningen $31,6 = 0,5 \cdot 5 \cdot |BD| \cdot \sin(110^\circ)$ mht. $|BD|$ og får $|BD| = 13,4512 \approx 13,5$

$$\text{solve}(31.6=0.5 \cdot 5 \cdot BD \cdot \sin(110^\circ), BD) \rightarrow bd=13.4512$$

Af trekant BCD og sinusformlen for areal af trekant får vi:

$$\text{Areal af trekant } BCD \text{ er } 0,5 \cdot 9 \cdot 13,4512 \cdot \sin(32^\circ) = 32,0762 \approx 32,1$$



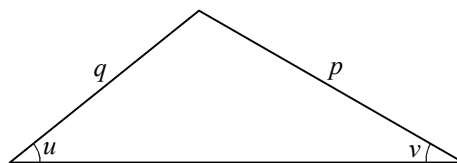
9. Sinusrelationen.

9.1 Sinusrelationen.

Sinusrelationen gælder i alle trekanter og siger at

$$\frac{p}{\sin(u)} = \frac{q}{\sin(v)}$$

hvor siden p er modstående til vinklen u
siden q er modstående til vinklen v



Vi bruger IKKE sinusrelationen i retvinklet trekant, da vi har simple formuler til retvinklet trekant.

9.2 Bevis for sinusrelationen.

På figuren har vi tilføjet en højde h , der deler trekanten i to trekanter.

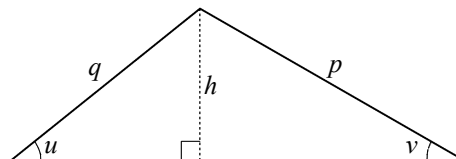
Da disse er retvinklede, er $q \cdot \sin(u) = h$ og $p \cdot \sin(v) = h$.

$$q \cdot \sin(u) = p \cdot \sin(v) \quad \text{da begge sider er lig } h.$$

$$\frac{q \cdot \sin(u)}{\sin(u) \cdot \sin(v)} = \frac{p \cdot \sin(v)}{\sin(u) \cdot \sin(v)} \quad \text{Vi har divideret begge ligningens sider med } \sin(u) \cdot \sin(v).$$

$$\frac{q}{\sin(v)} = \frac{p}{\sin(u)} \quad \text{Vi har forkortet de to brøker.}$$

Dette er sinusrelationen, så vi har bevist at den gælder.



9.3 Bestem vinkel med sinusrelationen.

Opgave Bestem vinklen u på figuren.

Svar

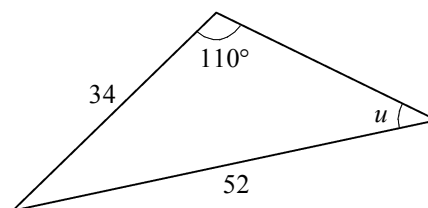
Af sinusrelationen får vi $\frac{34}{\sin(u)} = \frac{52}{\sin(110^\circ)}$.

Nspire løser ligningen $\frac{34}{\sin(u)} = \frac{52}{\sin(110^\circ)}$ mht. u for $0^\circ < u < 180^\circ$

og får $u = 37,9094^\circ$ eller $u = 142,091^\circ$

dvs. $u = 37,9^\circ$ for u må være mindre end 90° da en af de andre vinkler er over 90° .

$$\text{solve}\left(\frac{34}{\sin(u)} = \frac{52}{\sin(110^\circ)}, u\right) | 0^\circ < u < 180^\circ \rightarrow u = 37.9094 \text{ or } u = 142.091$$



9.4 Bestem side med sinusrelationen.

Opgave Bestem siden b på figuren.

$B =$ står uden for matematikfeltet. Attributter skal være = og grader. Tilføj $^\circ$ efter facit.



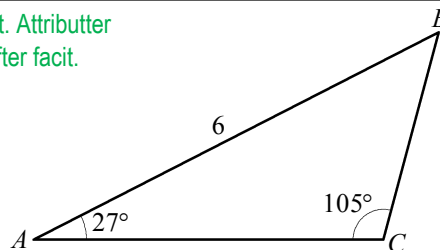
Svar

Vi får brug for siden b 's modstående vinkel: $B = 180^\circ - 27^\circ - 105^\circ = 48^\circ$

Af sinusrelationen får vi: $\frac{b}{\sin(48^\circ)} = \frac{6}{\sin(105^\circ)}$

Nspire løser $\frac{b}{\sin(48^\circ)} = \frac{6}{\sin(105^\circ)}$ mht. b for $0 < b$ og får $b = 4,61616$. Dvs.: $b = 4,62$

$$\text{solve}\left(\frac{b}{\sin(48^\circ)} = \frac{6}{\sin(105^\circ)}, b\right) \rightarrow b = 4.61616$$



9.5 Opgave med to løsninger.

Opgaven

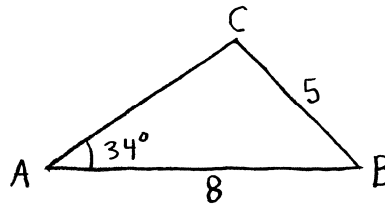
I trekant ABC er

$$(*) \quad A = 34^\circ, \quad a = 5 \quad \text{og} \quad c = 8.$$

Vi vil udregne vinkel C .

Skitsen

Vi tegner en skitse:



Udregningen

Vi sætter ind i sinusrelationen:

$$\frac{5}{\sin(34^\circ)} = \frac{8}{\sin(C)}$$

Mspire løser denne ligning mht. C for $0^\circ < C < 180^\circ$ og får:

$$C = 63,5^\circ \quad \text{eller} \quad C = 116,5^\circ$$

De to trekanter

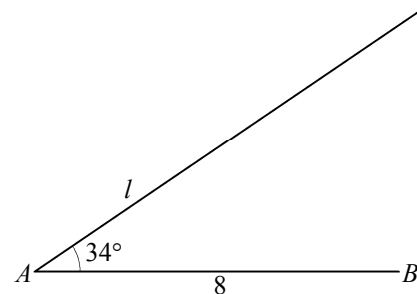
Det viser sig at der er to trekanter der opfylder (*).

I den ene af disse trekanter er $C = 63,5^\circ$,

og i den anden er $C = 116,5^\circ$.

Vi vil tegne de to trekanter.

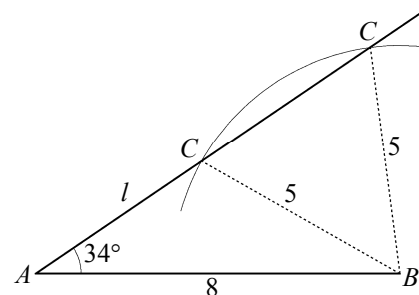
Først tegner vi AB og vinkel A .



Punktet C ligger på l , og afstanden fra B til C er 5.

Derfor tegner vi en cirkel med centrum B og radius 5:

Nu har vi de to trekanter ABC .



10. Cosinusrelationen.

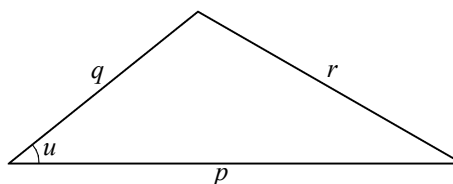
10.1 Cosinusrelationen.

Cosinusrelationen gælder i alle trekanter og siger at

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

hvor p , q og r er trekantens sider

siden r er modstående til vinklen u



Vi bruger IKKE cosinusrelationen i retvinklet trekant, da vi har simple formuler til retvinklet trekant.

10.2 Bevis for cosinusrelationen.

På figuren har vi tilføjet en højde.

$$n = p - m$$

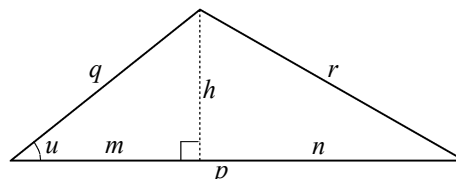
Dette ser vi på figuren.

$$n^2 = (p - m)^2$$

Vi har opløftet begge sider til anden.

$$(1) \quad n^2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

Vi har omskrevet højresiden ved hjælp af en af kvadratsætningerne. [Se afsnit 13.](#)



Højden deler trekanten i to **retvinklede** deltrekanter. Af den venstre får vi

$$(2) \quad q \cdot \cos(u) = m$$

Hypotenusen gange $\cos(u)$ er u 's hosliggende katete.

$$h^2 + n^2 = r^2 \quad \text{og} \quad h^2 + m^2 = q^2$$

Vi har brugt Pythagoras på hver af de to deltrekanter.

$$h^2 = r^2 - n^2 \quad \text{og} \quad h^2 = q^2 - m^2$$

Vi har trukket samme tal fra på begge sider.

$$r^2 - n^2 = q^2 - m^2$$

Da begge sider er lig h^2 .

$$r^2 = q^2 - m^2 + n^2$$

Vi har lagt n^2 til begge sider.

$$r^2 = q^2 - m^2 + p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

Vi har erstattet n^2 med højresiden fra (1).

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

De to led $-m^2$ og m^2 er gået ud mod hinanden

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

Vi har erstattet m med venstresiden af (2).

Dette er cosinusrelationen, så vi har bevist at den gælder.

10.3 Bestem vinkel med cosinusrelationen.

Opgave Bestem vinklen C på figuren.

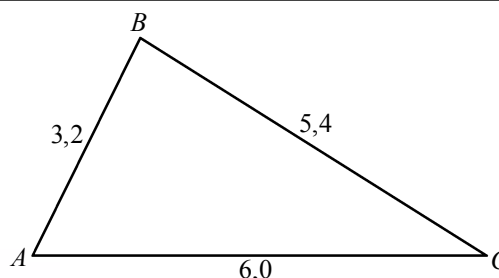
Svar

Af cosinusrelationen får vi: $3,2^2 = 5,4^2 + 6,0^2 - 2 \cdot 5,4 \cdot 6,0 \cdot \cos(C)$

Nspire løser ligningen $3,2^2 = 5,4^2 + 6,0^2 - 2 \cdot 5,4 \cdot 6,0 \cdot \cos(C)$

mht. C for $0^\circ < C < 180^\circ$ og får $C = 32,0559^\circ$. Dvs.: $C = 32,1^\circ$.

$$\text{solve}(3.2^2 = 5.4^2 + 6.0^2 - 2 \cdot 5.4 \cdot 6.0 \cdot \cos(C), C) | 0^\circ < C < 180^\circ \rightarrow c = 32.0559$$



10.4 Bestem side med cosinusrelationen.

Opgave Bestem siden p på figuren.

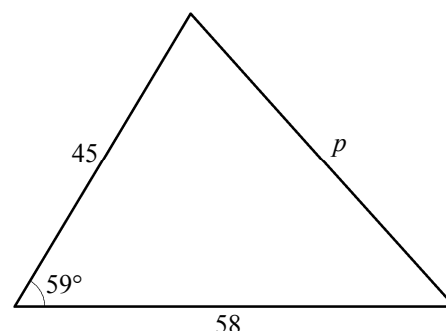
Svar

Af cosinusrelationen får vi: $p^2 = 58^2 + 45^2 - 2 \cdot 58 \cdot 45 \cdot \cos(59^\circ)$

Nspire løser ligning $p^2 = 58^2 + 45^2 - 2 \cdot 58 \cdot 45 \cdot \cos(59^\circ)$

mht. p for $0 < p$ og får $p = 51,9663$. Dvs.: $p = 52,0$.

$$\text{solve}(p^2 = 58^2 + 45^2 - 2 \cdot 58 \cdot 45 \cdot \cos(59^\circ), p) | 0 < p \rightarrow p = 51.9663$$



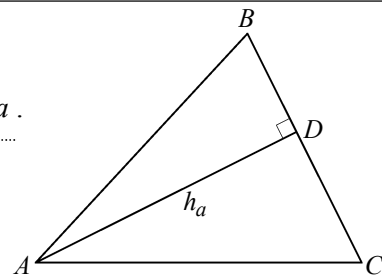
11. Nogle begreber.

11.1 Højde.

En **højde** i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til et punkt på den modstående side og er vinkelret på denne side.

I enhver trekant er der tre højder. På figuren er vist højden h_a fra A på siden a .

F.eks.: Hvis det i en opgave er oplyst at AD er højden på BC (se figur), så har du fået oplyst at vinkel D er ret. Så kan du bruge reglerne for retvinklet trekant.



11.2 Median.

En **median** i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side.

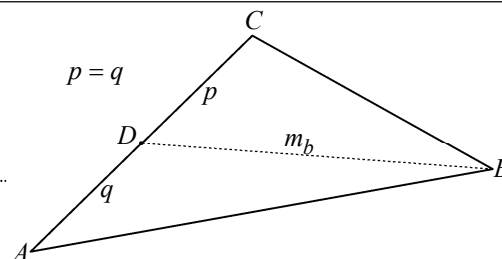
I enhver trekant er der tre medianer.

På figuren er vist medianen m_b fra B på siden b

Hvis det i en opgave er oplyst at BD er median på AC (se figur), så har du fået oplyst at AD og DC er lige lange:

F.eks.: Hvis du kender AD eller kan udregne AD , så kan du udregne AC ved at gange AD med 2.

F.eks.: Hvis du kender AC eller kan udregne AC , så kan du udregne AD ved at dividere AC med 2.



11.3 Vinkelhalveringslinje.

En **vinkelhalveringslinje** i en trekant er en linje der går gennem en af vinkelspidserne og halverer vinklen.

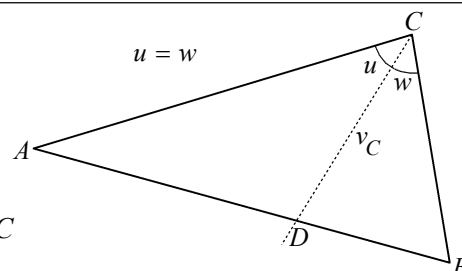
I enhver trekant er der tre vinkelhalveringslinjer.

På figuren er vist vinkelhalveringslinjen v_C for vinkel C .

Hvis det i en opgave er oplyst at CD er vinkelhalveringslinje for vinkel C (se figur), så har du fået oplyst at vinklerne u og v er lige store:

F.eks.: Hvis du kender u eller kan udregne u , så kan du udregne vinkel C i trekant ABC ved at gange u med 2.

F.eks.: Hvis du kender vinkel C i trekant ABC eller kan udregne den, så kan du udregne vinkel u ved at dividere vinkel C med 2.



11.4 Nogle betegnelser.

$\angle ABC$ er vinkel B i trekant ABC .

Eksempel: På figuren er $\angle RSQ = v$.

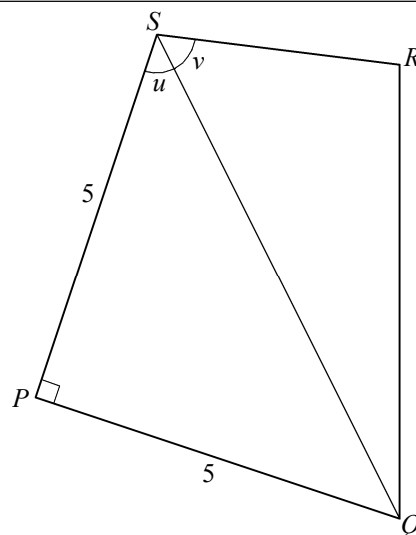
AB er **linjestykket** med endepunkter A og B .

$|AB|$ er **længden** af linjestykket AB .

Eksempel: På figuren er PQ og PS ikke samme linjestykke, men $|PQ| = |PS|$.

I en trekant ABC betegner A , B og C både punkter og vinkler.

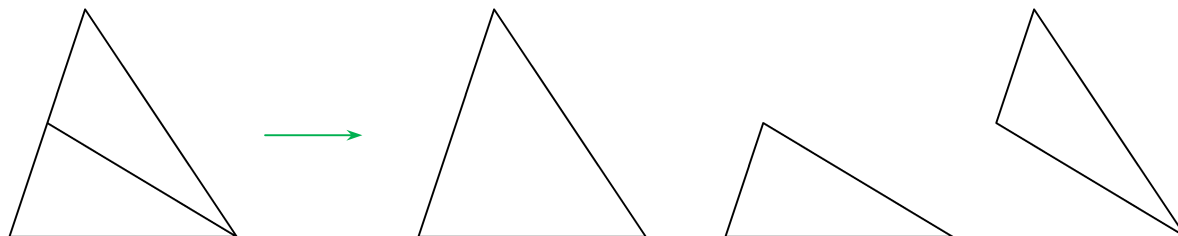
Eksempel: Man kan skrive $P = 90^\circ$ eller $\angle P = 90^\circ$.



12. Sammensat opgave.

En grundopgave i trekantsberegning kan du løse ved at finde opgaven i oversigten side 13-16. En sammensat opgave kan du ikke løse ved at finde opgaven i en lærebog da der er alt for mange muligheder. Meningen med en sammensat opgave er at du skal se hvordan du kan løse den ved hjælp af grundopgaver.

I mange sammensatte opgaver er der tegnet et linjestykke som deler en trekant op i to deltrekanter. For at finde ud af hvad du skal gøre, kan du tegne de tre trekanten hver for sig og skrive tal og bogstaver på dem.



Når du har tegnet de tre trekanten, ser du om der er en af dem hvor du kan regne noget ud. Hvis det du har regnet ud, også er en side eller vinkel i en af de andre trekanten, så skriver du også resultatet her.

Det er især vigtigt at tegne den store trekant da det viser sig at linjen inden i den er distraherende når man regner på den store trekant.

13. Kvadratsætninger.

De tre kvadratsætninger:

Kvadratet på en sum: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Kvadratet på en differens: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

To tals sum gange samme tals differens: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Sprogbrug: kvadratet på et tal = tallet opløftet til anden.

Eksempel: kvadratet på 4 = 16 og kvadratet på 3x = 9x².

Eksempler på brug af kvadratsætningerne:

Kvadratet på en sum:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 5^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 = 9x^2 + 25 + 30x$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

Kvadratet på en differens:

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 + 5^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 = 9x^2 + 25 - 30x$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

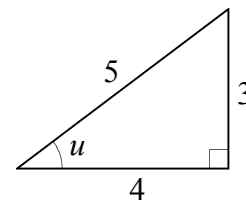
To tals sum gange samme tals differens:

$$(3x + 5) \cdot (3x - 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

De 11 opgavetyper med sider og vinkler i retvinklet trekant

I trekanten til højre er siderne med længde 3 og 4 **kateter**, fordi vinklen mellem dem er ret. Siden med længde 5 er **hypotenuse**, fordi den ikke er en af kateterne.



Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben. Den katete du holder i, er **vinklens hosliggende katete**. Den anden katete er **vinklens modstående katete**.

Type 1

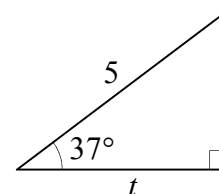
Kendt: Hypotenusen og en spids vinkel.

Udregn: Vinklens hosliggende katete.

$$5 \cdot \cos(37^\circ) = t$$

Nspire udregner venstre side
 vinklens hosliggende katete

spids vinkel
 hypotenusen



Type 2

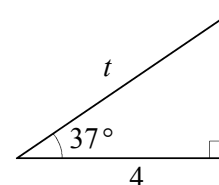
Kendt: En spids vinkel og dens hosliggende katete.

Udregn: Hypotenusen.

$$t \cdot \cos(37^\circ) = 4$$

Nspire løser mht. t
 vinklens hosliggende katete

spids vinkel
 hypotenusen



Type 3

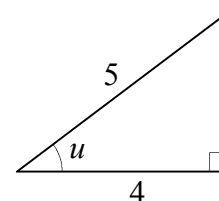
Kendt: Hypotenusen og en katete.

Udregn: Vinklen mellem disse.

$$5 \cdot \cos(u) = 4$$

Nspire løser mht. u for $0^\circ < u < 90^\circ$
 vinklens hosliggende katete

spids vinkel
 hypotenusen



Type 4

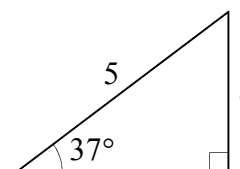
Kendt: Hypotenusen og en spids vinkel.

Udregn: Vinklens modstående katete.

$$5 \cdot \sin(37^\circ) = t$$

Nspire udregner venstre side
 vinklens modstående katete

spids vinkel
 hypotenusen



Type 5

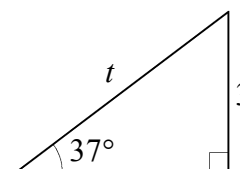
Kendt: En spids vinkel og dens modstående katete.

Udregn: Hypotenusen.

$$t \cdot \sin(37^\circ) = 3$$

Nspire løser mht. t
 vinklens modstående katete

spids vinkel
 hypotenusen



Type 6

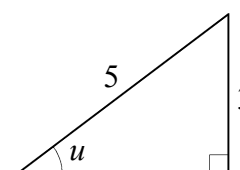
Kendt: Hypotenusen og en katete.

Udregn: Katetens modstående vinkel.

$$5 \cdot \sin(u) = 3$$

Nspire løser mht. u for $0^\circ < u < 90^\circ$
 vinklens modstående katete

spids vinkel
 hypotenusen



Type 7

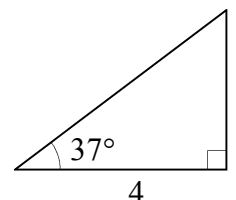
Kendt: En spids vinkel og dens hosliggende katete.

Udregn: Vinklens modstående katete.

$$4 \cdot \tan(37^\circ) = t$$

Nspire udregner venstre side

vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 8

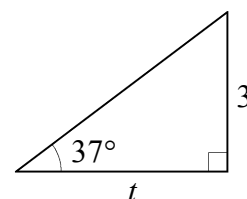
Kendt: En spids vinkel og dens modstående katete.

Udregn: Vinklens hosliggende katete.

$$t \cdot \tan(37^\circ) = 3$$

Nspire løser mht. t

vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 9

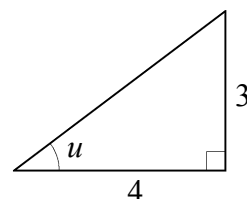
Kendt: De to kateter.

Udregn: En spids vinkel.

$$4 \cdot \tan(u) = 3$$

Nspire løser mht. u for $0^\circ < u < 90^\circ$

vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 10

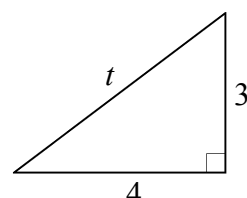
Kendt: De to kateter.

Udregn: Hypotenusen.

$$3^2 + 4^2 = t^2$$

Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse
kateter



Type 11

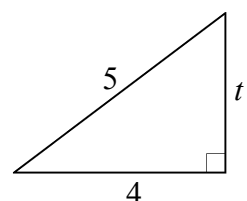
Kendt: Hypotenusen og en katete.

Udregn: Den anden katete.

$$t^2 + 4^2 = 5^2$$

Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse
kateter



De 4 formler til udregning af sider og vinkler i retvinklet trekant

Hver af de 11 metoder ovenfor bruger en af følgende fire formler:

I en retvinklet trekant gælder

$$(1) \text{ den_ene_katete}^2 + \text{den_anden_katete}^2 = \text{hypotenusen}^2$$

For en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$(2) \text{ hypotenusen} \cdot \cos(\text{vinkel}) = \text{vinklens_hosliggende_katete}$$

$$(3) \text{ hypotenusen} \cdot \sin(\text{vinkel}) = \text{vinklens_modstående_katete}$$

$$(4) \text{ vinklens_hosliggende_katete} \cdot \tan(\text{vinkel}) = \text{vinklens_modstående_katete}$$

De 4 opgavetyper vi løser ved hjælp af cosinusrelationen eller sinusrelationen

Type 12: Udregn side med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

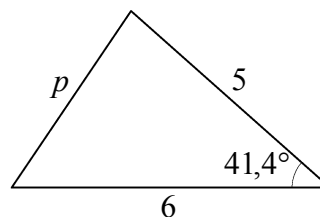
Kendt: En vinkel mellem to sider og disse to sider.

Udregn: Siden over for vinklen.

$$p^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(41,4^\circ)$$

↑ altid 2
↑ vinklensben
↑ siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$



Type 13: Udregn vinkel med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

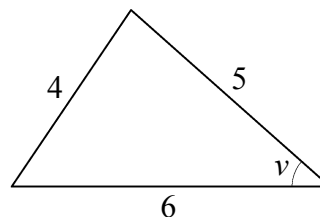
Kendt: De tre sider.

Udregn: Vinklen.

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(v)$$

↑ altid 2
↑ vinklensben
↑ siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. v for $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$



Type 14: Udregn side med sinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

Kendt: En side og to vinkler.

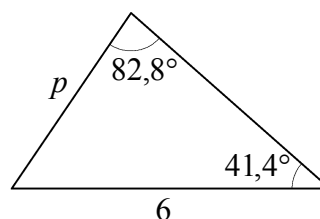
Udregn: En af de andre sider.

$$\frac{p}{\sin(41,4^\circ)} = \frac{6}{\sin(82,8^\circ)}$$

↑ siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°
↑ siden der er p enheder, ligger over for vinklen der er 41,4°

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

Hvis det var siden over for den ukendte vinkel vi skulle finde, så måtte vi først udregne denne vinkel ved at udnytte at summen af de tre vinkler er 180° .



Type 15: Udregn vinkel med sinusrelation
Trekanten er ikke retvinklet.

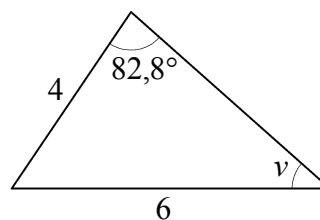
Kendt: To sider og vinklen over for en af dem.

Udregn: Vinklen over for den anden af de to sider.

$$\frac{4}{\sin(v)} = \frac{6}{\sin(82,8^\circ)}$$

↑ siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°
↑ siden der er 4 enheder, ligger over for vinklen af størrelse v

Nspire løser ligningen mht. v for $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$



Nspire giver både en løsning under 90° og en løsning over 90° . Husk at begrunde hvilken af løsningerne der skal bruges. I dette tilfælde kan begrundelsen være: "Vinklen er under 90° da siden over for vinklen ikke er den største i trekanten." I nogle opgaver er det oplyst om vinklen er stump (dvs. over 90°) eller spids (dvs. under 90°).

De 3 opgavetyper med sinusformlen for trekants areal

Type 16

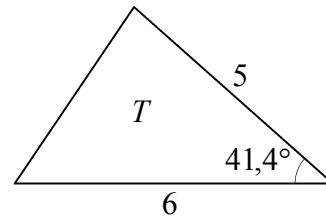
Kendt: To sider og vinklen mellem dem.

Udregn: Arealet.

Arealet er $T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(41,4^\circ)$

altid $\frac{1}{2}$
vinklen skal være mellem disse sider

Nspire udregner ligningens højre side.



Type 17

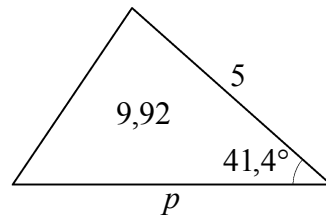
Kendt: Arealet, vinklen mellem to sider og en af de to sider.

Udregn: Den anden af de to sider.

$9,92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot p \cdot \sin(41,4^\circ)$

altid $\frac{1}{2}$
vinklen skal være mellem disse sider

Nspire løser ligningen mht. p .



Type 18

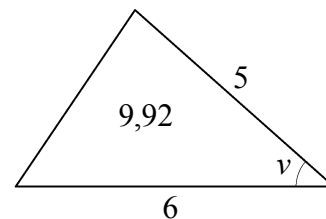
Kendt: Arealet og to sider.

Udregn: Vinklen mellem de to sider.

$9,92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(v)$

altid $\frac{1}{2}$
vinklen skal være mellem disse sider

Nspire løser ligningen mht. v for $0^\circ < v < 180^\circ$.



Ligningen har både en løsning under 90° og en løsning over 90° . Hvis opgaven er i en prøve, så vil der være flere oplysninger så det fremgår hvilken af de to trekanter opgaven drejer sig om.

De 3 formler for vilkårlig trekant

Hver af metoderne 12-18 bruger en af følgende tre formler:

I alle trekanter gælder

(5) $T = \frac{1}{2} pq \sin(v)$ når T er trekantens areal og v er vinklen mellem siderne p og q .

(6) $\frac{p}{\sin(u)} = \frac{q}{\sin(v)}$ når p er siden over for vinklen u og q er siden over for vinklen v .

(7) $r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$ når p , q og r er siderne og u er vinklen mellem p og q .

14. Et andet bevis for cosinusrelationen.

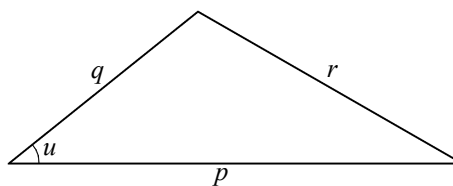
14.1 Cosinusrelationen.

Cosinusrelationen gælder i alle trekanter og siger at

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

hvor p , q og r er trekantens sider

siden r er modstående til vinklen u



Vi bruger IKKE cosinusrelationen i retvinklet trekant, da vi har simple formuler til retvinklet trekant.

14.2 Bevis for cosinusrelationen.

På figuren har vi tilføjet en højde.

Vi bruger pythagoras på den højre af de to retvinklede trekanter

og får:

$$r^2 = h^2 + n^2$$

I denne ligning erstatter vi h^2 med $q^2 - m^2$ (pythagoras brugt på den venstre af de to retvinklede trekanter, se (1)), og vi erstatter n med $p - m$ (da m og n tilsammen er p). Så får vi

$$r^2 = q^2 - m^2 + (p - m)^2$$

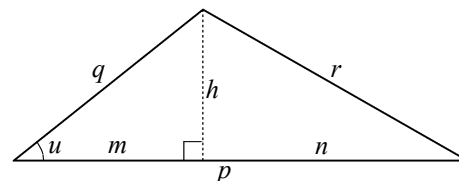
Heri (dvs. i $r^2 = q^2 - m^2 + (p - m)^2$) erstatter vi m med $q \cos(u)$ (Venstre trekant: hypotenuse gange cos er vinkels hosliggende katete, se (2)).

$$r^2 = q^2 - (q \cos(u))^2 + (p - q \cos(u))^2$$

Nspire reducerer højre side (se (3)) og får

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos(u)$$

Dette er cosinusrelationen som hermed er bevist.



Bemærkninger

- (1) $m^2 + h^2 = q^2$ er pythagoras brugt på den venstre af de to retvinklede trekanter
 $h^2 = q^2 - m^2$ vi har trukket m^2 fra begge sider

- (2) I den venstre af de to retvinklede trekanter ser vi at
 q er hypotenuse
 m er hosliggende katete til vinklen u
så $q \cdot \cos(u) = m$ da hypotenuse gange cosinus til vinkel er lig vinkels hosliggende katete.

- (3) Når Nspire reducerer, ser det sådan ud:

$$q^2 - (q \cdot \cos(u))^2 + (p - q \cdot \cos(u))^2 = -2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u) + p^2 + q^2$$

Vi ser at Nspire får samme tre led som vi har skrevet, men Nspire skriver de tre led i en anden rækkefølge.

De tre led er $-2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$, p^2 og q^2 .

Stikordsregister

areal	1, 7, 16	Pythagoras' sætning	2, 14
areal og sinus	7	ret vinkel	1
bevis for cosinusrelationen	10, 17	retvinklet trekant	13, 14
bevis for sinusformlen for areal af trekant	7	sammensat opgave	12
bevis for sinusrelationen	8	sinus	6, 7
cosinus	6	sinus i retvinklet trekant	6, 13, 14
cosinus og Nspire	5	sinus og Nspire	5
cosinus i retvinklet trekant	6, 13, 14	sinusformel for areal	7
cosinusrelationen	10, 15, 17	sinusrelationen	8, 15
ensvinklede trekanter	4, 5	skalafaktor	4
hosliggende katete	3, 13, 14	spids vinkel	1
hypotenuse	2, 13, 14	stump vinkel	1
højde	1, 11	tangens	6
højde-grundlinje-formel for trekants areal	1	tangens i retvinklet trekant	6, 14
katete	2, 13, 14	tangens og Nspire	5
kvadratsætninger	12	to løsninger	9
median	11	vilkårlig trekant	16
modstående katete	3, 13, 14	vinkel	1, 11
modstående side	3	vinkelhalveringslinje	11
modstående vinkel	3		