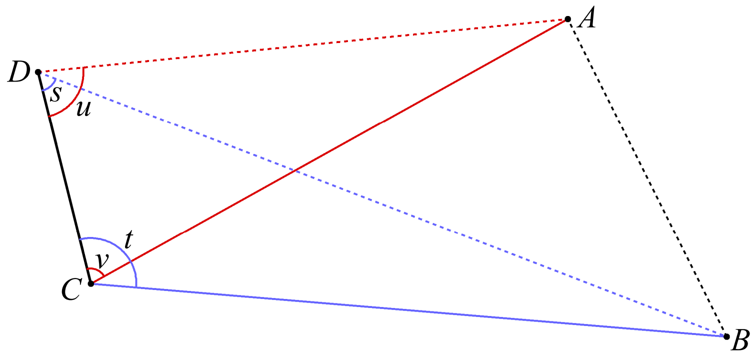
Trekants-beregning

for B- og A- niveau i stx og hf



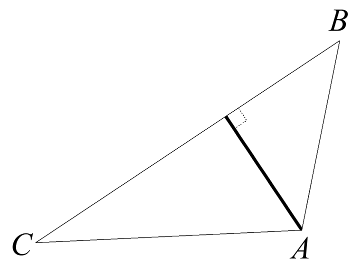
2012 Karsten Juul

Indhold

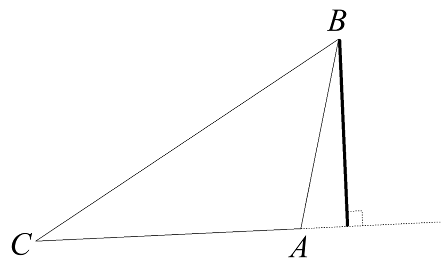
1: Højde og areal

1.1 Definition Højde.

<u>Højden</u> fra A er det linjestykke der går fra A og vinkelret ind på den modstående side.

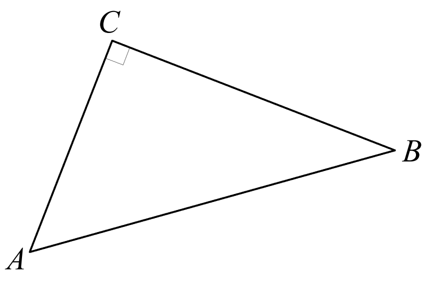


<u>Højden</u> fra B er det linjestykke der går fra B og vinkelret ind på den modstående sides forlængelse.



1.2 Eksempel En side kan være en højde.

<u>Højden</u> fra A er linjestykket AC



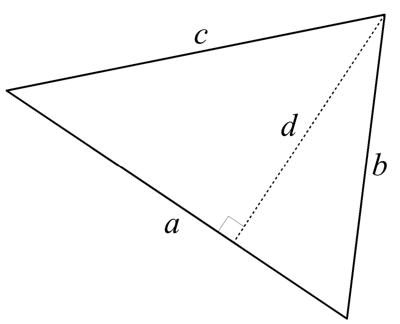
1.3 Sætning Areal af trekant.

Trekantens <u>areal</u> er

$$Areal \ = \ \tfrac{1}{2} \cdot d \cdot a$$

når

d er en højde i trekanten
a er den side der er vinkelret på d .



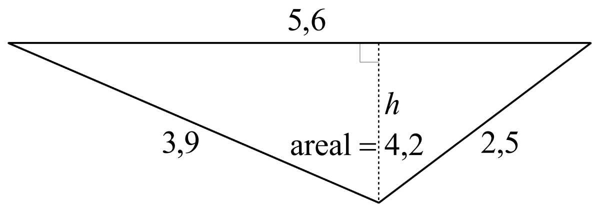
1.4 **Eksempel** Areal er kendt.

På billedet ser vi:

Trekantens areal er $4{,}2$

h er en højde

h er vinkelret på siden der er $5{,}6$



Af dette får vi at

$$4{,}2 \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot h\cdot 5{,}6$$

Vi har brugt sætningen om trekants areal (ramme 1.3).

Nspire løser denne ligning mht. h for $h>0$ og får $\underline{\underline{h=1{,}5}}$.

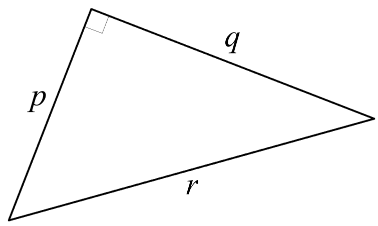
2: Pythagoras' sætning

2.1 **Definition** Katete og hypotenuse.

Siderne p og q er trekantens <u>kateter</u>.
Det kan vi se fordi vinklen imellem p og q er ret.

Siden r er <u>hypotenusen</u>.
Det kan vi se fordi r ikke er en af kateterne.

Hvis en trekant ikke er retvinklet, så har den hverken hypotenuse eller kateter.

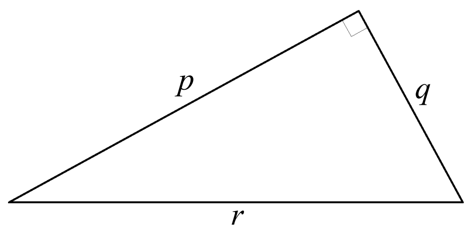


2.2 **Sætning** Pythagoras' sætning.

For en <u>retvinklet</u> trekant gælder:

$$p^2+q^2 \;=\; r^2$$

når p og q er kateter, og
r er hypotenuse



2.3 **Eksempel** Hypotenuse og en katete er kendt.

Vi ser:

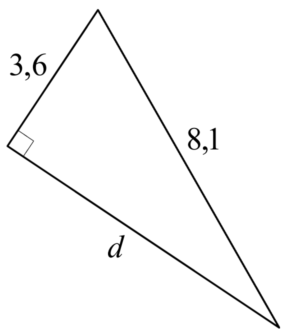
kateterne er d og 3,6

hypotenusen er 8,1

Derfor er

$3{,}6^2 + d^2 = 8{,}1^2$

Nspire løser denne ligning mht. d for $d > 0$ og får $\underline{\underline{d = 7{,}3}}$.



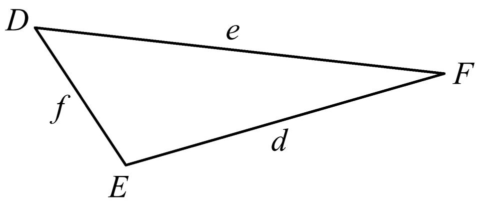
2.4 **Bemærkning** En sprogbrug.

Hvis der står

i trekant DEF er $f = 14$

gælder

det er siden over for vinkelspidsen F der er 14.



Sprogbrugen er nemlig sådan at når

<u>et stort bogstav er en vinkelspids i en trekant</u>,

gælder

<u>det tilsvarende lille bogstav er siden over for vinkelspidsen</u>,

hvis der ikke fremgår andet.

<u>Eksempel på udnyttelse af denne sprogbrug:</u>

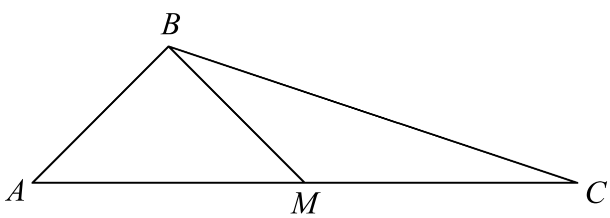
I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er $a^2 + b^2 = c^2$.

<u>Advarsel:</u>

Se figuren til højre.
Her dur det ikke hvis du skriver $m = 2{,}6$.

Læseren kan ikke vide om det er AB eller BC der er 2,6 .

Skriv m på den side du mener.
Du skal altid tegne en figur i en geometriopgave.

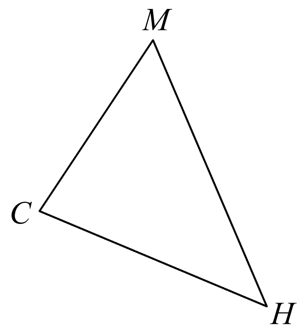


3: Ensvinklede trekanter

3.1 Definition En sides modstående vinkel.

Forestil dig at du sidder på linjestykket CM
og holder i de to vinkler ved linjestykkets endepunkter.

Den vinkel du ikke holder i (altså H) er
den modstående vinkel til siden CM.



3.2 Sætning Ensvinklede trekanter.

De to trekanter har samme vinkler.
Derfor er der en skalafaktor.

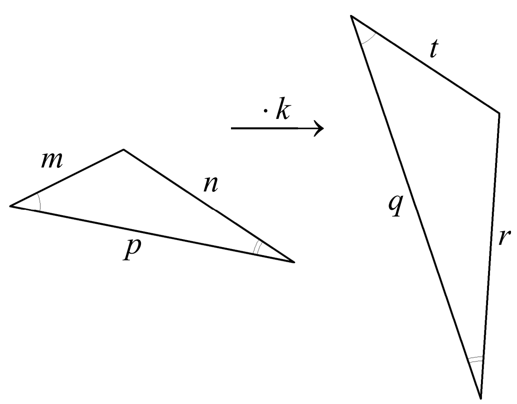
k er det tal som kaldes skalafaktoren.

Når vi ganger siderne i venstre trekant med k,
så får vi siderne i højre trekant:

$m \cdot k = t$ da m og t har ens modstående vinkler.

$p \cdot k = q$ da p og q har ens modstående vinkler.

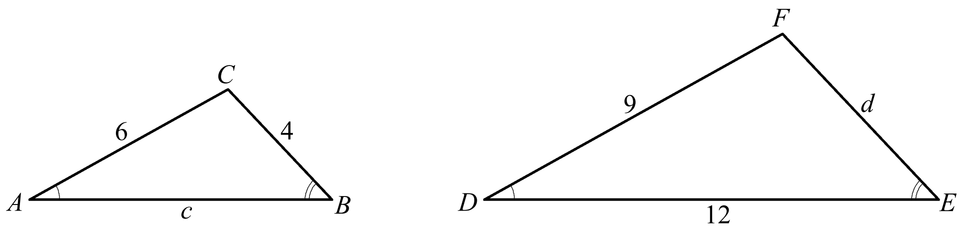
$n \cdot k = r$ da n og r har ens modstående vinkler.



Pilen på figuren viser hvilken vej vi ganger.
Hvis vi i stedet valgte at gange siderne i højre trekant,
så ville k stå for et andet tal.

Det er tilladt at bruge et andet bogstav i stedet for k.
(Læseren ved ikke på forhånd at k står for skalafaktoren, så det er nødvendigt at vi skriver det).

3.3 **Eksempel** Udregne og bruge skalafaktor.



Vi begrunder at der er en skalafaktor:

De to trekanter har samme vinkler.
Derfor er der en skalafaktor q .

Vi udregner skalafaktoren q :

Siderne med længder 6 og 9 har ens modstående vinkler. Derfor er

$$6 \cdot q = 9$$

Vi dividerer begge sider med 6 og får

$$\underline{q = 1{,}5} \ .$$

Vi bruger skalafaktoren 1,5 til at udregne d :

Siderne med længder 4 og d har modstående vinkler der er lige store. Derfor er

$$4 \cdot 1{,}5 = d$$

Vi udregner venstresiden og får

$$\underline{\underline{d = 6}} \ .$$

Vi bruger skalafaktoren 1,5 til at udregne c :

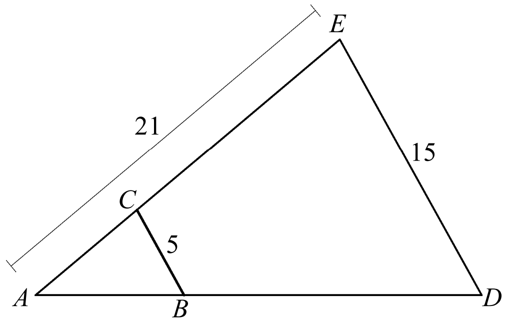
Siderne med længder c og 12 har modstående vinkler der er lige store. Derfor er

$$c \cdot 1{,}5 = 12$$

Vi dividerer begge sider med $1{,}5$ og får

$$\underline{\underline{c = 8}} \ .$$

3.4 **Eksempel** Ensvinklede trekanter.



<u>Trekanterne er ensvinklede</u>

Det er oplyst at siderne BC og DE parallelle.

Trekanterne ABC og ADE er altså <u>ensvinklede</u>.

<u>Hvad vil vi udregne?</u>

Vi vil udregne $|CE|$.

<u>Plan for udregninger:</u>

Ved hjælp af reglerne for ensvinklede trekanter kan vi udregne længder af sider i trekanterne, men CE er ikke side i en af trekanterne. Vi udregner derfor først $|AC|$. Så kan vi derefter udregne $|CE|$ ved at trække $|AC|$ fra 21.

<u>Skalafaktoren *k*:</u>

Da trekanterne er ensvinklede, skal alle sider i trekant ABC ganges med samme tal k for at få den tilsvarende side i trekant ADE. Tilsvarende sider er sider der ligger over for lige store vinkler.

<u>Vi udregner *k*:</u>

Da siderne med længder 5 og 15 ligger over for samme vinkel, må gælde

$$5 \cdot k = 15$$

Vi dividerer begge sider med 5 og får

$$k = 3$$

<u>Vi udregner $|\mathbf{AC}|$:</u>

Da AC og siden med længde 21 ligger over for vinklerne B og D der er lige store, gælder

$$|AC| \cdot 3 = 21$$

Vi dividerer begge sider med 3 og får

$$|AC| = 7$$

<u>Vi udregner $|\mathbf{CE}|$:</u>

Vi får nu at

$$|CE| = 21 - 7$$

dvs.

$$\underline{\underline{|CE| = 14}}$$

4: Cosinus og sinus i retvinklet trekant

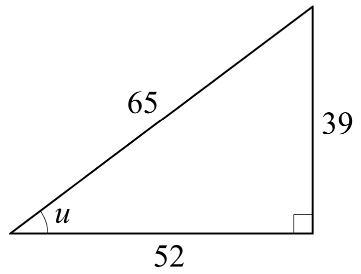
4.1 Definition   Vinkels hosliggende katete og modstående katete.

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u
og holder i de to vinkelben.
De to sider du holder i, kaldes <u>vinklens hosliggende sider</u>.

At en vinkel er <u>spids</u>, betyder at vinklen er mindre end 90°.

En af de sider du holder i, er en katete.
Denne side kaldes <u>vinklens hosliggende katete</u>.

Der er én side tilbage som du ikke holder i.
Denne side kaldes <u>vinklens modstående katete</u>.



I den viste trekant gælder altså:
Vinkel u's hosliggende katete er 52.
Vinkel u's modstående katete er 39.

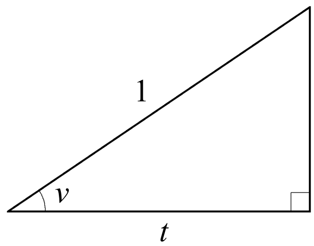
4.2 Teori   Definition af Cosinus og sinus.

Når v er en spids vinkel, er

cosinus til vinklen v =
v's hosliggende katete i en trekant med hypotenuse 1.

Vi skriver

$$\cos(v) = t\ .$$

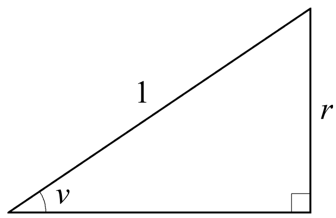


Når v er en spids vinkel, er

sinus til vinklen v =
v's modstående katete i en trekant med hypotenuse 1.

Vi skriver

$$\sin(v) = r\ .$$



4.3 Eksempel   Udregning af cosinus eller sinus.

På Nspire får vi udregnet at

$$\cos(49{,}5°) = 0{,}649448$$
$$\sin(49{,}5°) = 0{,}760406$$

På Nspire kan udregningerne se sådan ud:
cos(49.5) = 0.649448
sin(49.5) = 0.760406

Nspire **<u>skal</u>** være indstillet til at regne med enheden **<u>grader</u>**.
Før du bruger cos, sin eller tan, skal du altid taste **sin(90.0) enter** . Resultatet skal være **1** .
Det viser sig at det er nødvendigt at du laver denne kontrol, selv om du tror at du har indstillet Nspire til grader.

4.4 Eksempel Udregning af vinkel med cosinus eller sinus.

Vi vil finde en spids vinkel u så

$$\cos(u) \; = \; 0{,}800$$

Her står at vinkel u er mellem $0°$ og $90°$.

Nspire løser denne ligning mht. u for $0° < u < 90°$
og får $u = 36{,}8699°$

Så har vi fundet ud af at

$$\underline{\underline{u = 36{,}9°}}$$

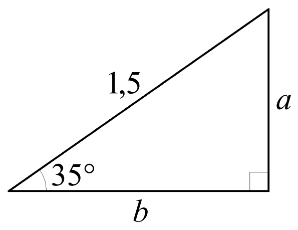
Ligninger med sin kan vi løse på samme måde.

På Nspire kan udregningen se sådan ud:

solve(cos(u)=0.8,u)|0<u<90 ▸ u=36.8699

4.5 Teori Retvinklet trekant hvor hypotenusen ikke er 1.

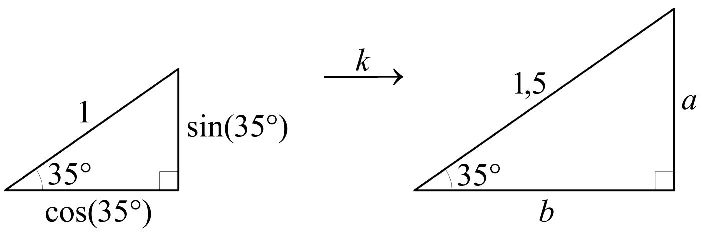
I trekanten til højre er hypotenusen $1{,}5$.



Vi vil bruge cos og sin. Derfor tegner vi en ny trekant
hvor vinklerne er de samme, men hvor hypotenusen er 1 .

Kateterne i den nye trekant er tallene $\cos(35°)$ og $\sin(35°)$.
(Se ramme 4.2)

<u>Da de to trekanter har samme vinkler, er der en skalafaktor k:</u>



<u>Vi finder skalafaktoren:</u>

Siderne med længder 1 og $1{,}5$ ligger over for ens vinkler (begge er $90°$)
så

$$1 \cdot k = 1{,}5$$

dvs.

$$k = 1{,}5 \,.$$

<u>Vi bruger skalafaktoren:</u>

$$1{,}5 \cdot \sin(35°) = a \qquad 1{,}5 \cdot \cos(35°) = b$$

<u>Resultat:</u>

$$\underline{\underline{a = 0{,}860365}} \qquad \underline{\underline{b = 1{,}22873}}$$

Vi ser at for alle retvinklede trekanter kan vi skrive formler der svarer til

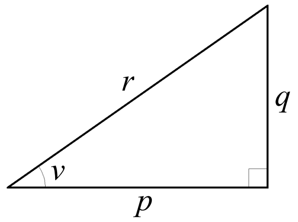
$$1{,}5 \cdot \cos(35°) = b \qquad \text{og} \qquad 1{,}5 \cdot \sin(35°) = a$$

Dette er indholdet af sætningen i ramme 4.6.

4.6 **Sætning** Cosinus og sinus i retvinklet trekant.

Når

v er en spids vinkel i en retvinklet trekant
r er hypotenusen
p er v's hosliggende katete
q er v's modstående katete



så gælder:

$$r \cdot \cos(v) = p$$
$$r \cdot \sin(v) = q$$

I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end ovenfor.
Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglen i ord, f.eks. sådan:

<u>Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:</u>

– Når vi ganger *cosinus til vinklen*
  med *hypotenusen*
  så får vi *vinklens hosliggende katete*

– Når vi ganger *sinus til vinklen*
  med *hypotenusen*
  så får vi *vinklens modstående katete*

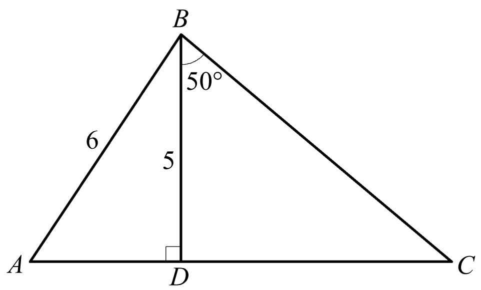
4.7 **Eksempel** Cosinus og sinus i retvinklet trekant.

Af den retvinklede trekant ABD får vi

$$6 \cdot \sin(A) = 5$$

Nspire løser denne ligning mht. A for $0° < A < 90°$ og får $A = 56{,}4427°$. Dvs.:

$$\underline{\underline{A = 56{,}4°}}$$



Af den retvinklede trekant BCD får vi

$$|BC| \cdot \cos(50°) = 5$$

Nspire løser denne ligning mht. $|BC|$ for $|BC| > 0$ og får $|BC| = 7{,}77862$. Dvs.:

$$\underline{\underline{|BC| = 7{,}78}}$$

På Nspire kan udregningerne se sådan ud:

```
solve(6·sin(va)=5,va)|0<va<90 ▸ va=56.4427
solve(bc·cos(50)=5,bc)|0<bc ▸ bc=7.77862
```

5: Tangens i retvinklet trekant

5.1 Teori Definition af tangens.

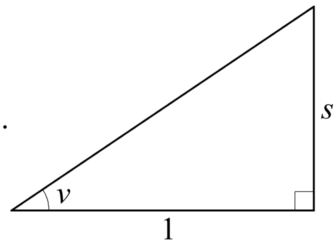
Når v er en spids vinkel, er

tangens til v =

v's modstående katete i en trekant hvor v's hosliggende katete er 1.

Vi skriver

$\tan(v) = s$.



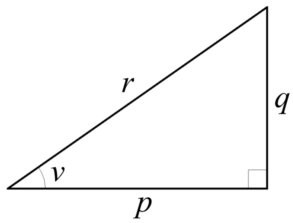
5.2 Sætning Tangens i retvinklet trekant.

Når

v er en spids vinkel i en retvinklet trekant
p er v's hosliggende katetet
q er v's modstående katete

så gælder:

$p \cdot \tan(v) = q$



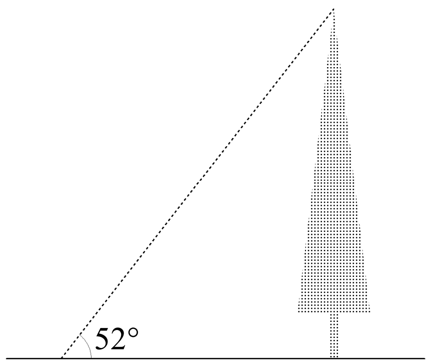
I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end ovenfor.
Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglen i ord, f.eks. sådan:

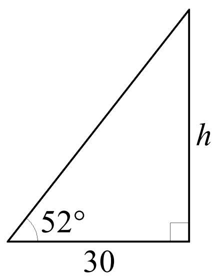
Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

– Når vi ganger *tangens til vinklen*
med *vinklens hosliggende katete*
så får vi *vinklens modstående katetet*

5.3 Eksempel Tangens i retvinklet trekant.

30 meter fra et træ sigter vi op mod toppen. Vinklen mellem sigtelinje og vandret er $52°$.
Trekanten til højre er en model af denne situation.





Enhed: meter

Af denne retvinklede trekant får vi

$30 \cdot \tan(52°) = h$

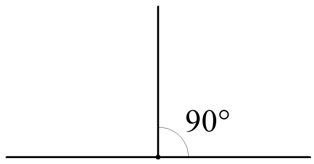
Nspire udregner venstresiden og får 38,3982 . Dvs.:

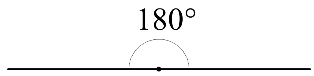
Træets højde er $\underline{\underline{38 \text{ m}}}$

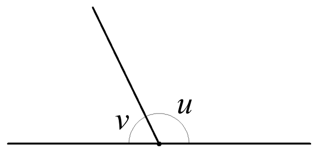
På Nspire kan udregningen se sådan ud:
$30 \cdot \tan(52) = 38.3982$

6: Vinkler

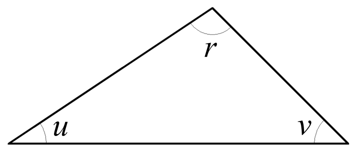
6.1 **Regler** Vinkler.







$u + v = 180°$
$v = 180° - u$



Når vi lægger vinklerne i en trekant sammen, så får vi altid 180° :

$u + v + r = 180°$
$r = 180° - u - v$

<u>En vinkel i en trekant er</u>

spids hvis den er under 90°

ret hvis den er 90°

stump hvis den er over 90° .

6.2 **Teori** Definition af cosinus til en stump vinkel og til 90°.

<u>Hvis v er 90°</u>

så er $\cos(v) = 0$

dvs. $\cos(90°) = 0$

<u>Hvis v er mellem 90° og 180°:</u>

Vi trækker v fra 180°. Så får vi en vinkel u som er under 90°.

Da u er under 90°, ved vi fra ramme 4.2 hvad der forstås ved $\cos(u)$.

Vi definerer at

$$\cos(v) = -\cos(u) \quad \text{hvor} \quad u = 180° - v .$$

6.3 **Teori** Definition af sinus til en stump vinkel og til 90°.

<u>Hvis v er 90°</u>

så er $\sin(v) = 1$

dvs. $\sin(90°) = 1$

<u>Hvis v er mellem 90° og 180°:</u>

Vi trækker v fra 180°.

Så får vi en vinkel u som er under 90°.

Da u er under 90°, ved vi fra ramme 4.2 hvad der forstås ved $\sin(u)$.

Vi definerer at

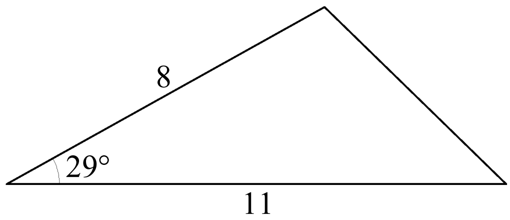
$$\sin(v) = \sin(u) \quad \text{hvor} \quad u = 180° - v .$$

7: Udregne areal ved hjælp af sinus

7.1 Teori Udregne trekants areal ved hjælp af sinus.

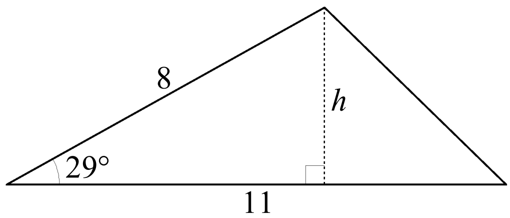
I den viste trekant kender vi to sider og vinklen imellem dem.

Vi vil udregne trekantens areal.



Vi tegner en højde h .
Så har vi to retvinklede trekanter.
I den venstre er (se ramme 4.6)

$$8 \cdot \sin(29°) \;=\; h$$



Arealet af hele trekanten er (se ramme 1.3)

$$areal \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot 11 \cdot h$$

$$areal \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin(29°)$$

$$areal \;=\; 21{,}3316$$

$$areal \;=\; \underline{\underline{21{,}3}}$$

Vi ser at hvis vi har en trekant hvor vi kender to sider og vinklen mellem dem, så kan vi altid finde trekantens areal ved at skrive en ligning der svarer til $areal \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin(29°)$.

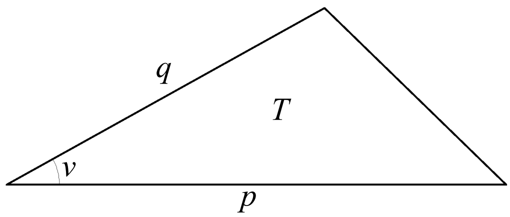
Vi har altså indset gyldigheden af sætningen i ramme 7.2 .

7.2 Sætning Sinusformlen for areal af trekant.

<u>Sinusformlen for areal af trekant</u> er

$$T = \tfrac{1}{2}\, pq \sin(v)$$

hvor T er arealet, p og q er to sider i trekanten,
og v er vinklen mellem disse sider.



<u>Sinusformlen for areal af trekant</u> udtrykt i ord:

Areal af trekant =
en halv
gange den ene side
gange den anden side
gange sinus til vinklen imellem de to sider.

8: Sinusrelationen

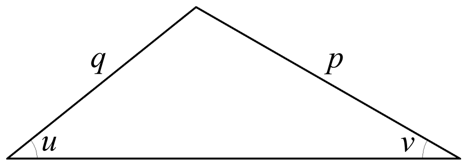
8.1 Sætning Sinusrelationen.

Hvis der i en trekant gælder

siden p er modstående til vinklen u
siden q er modstående til vinklen v

så er

$$\frac{p}{\sin(u)} = \frac{q}{\sin(v)}$$

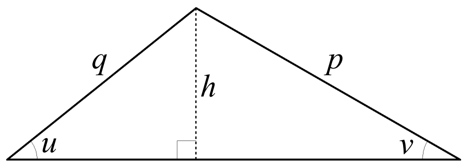


Denne regel hedder sinusrelationen .

8.2 Bevis for sinusrelationen.

På figuren har vi tilføjet en højde h .
Højden deler trekanten i to trekanter.
Da disse to trekanter er retvinklede, er

$$q \cdot \sin(u) = h \qquad \text{og} \qquad p \cdot \sin(v) = h$$



Heraf får vi

$$q \cdot \sin(u) = p \cdot \sin(v)$$

Vi dividerer begge ligningens sider med $\sin(u) \cdot \sin(v)$ og får

$$\frac{q \cdot \sin(u)}{\sin(u) \cdot \sin(v)} = \frac{p \cdot \sin(v)}{\sin(u) \cdot \sin(v)}$$

Vi forkorter de to brøker:

$$\frac{q}{\sin(v)} = \frac{p}{\sin(u)}$$

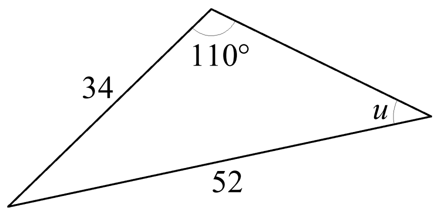
Nu har vi bevist at sinusrelationen gælder.

8.3 Eksempel Udregning af vinkel med sinusrelationen.

Vi vil udregne vinklen u på figuren

Vi bruger sinusrelationen:

$$\frac{34}{\sin(u)} = \frac{52}{\sin(110°)}$$



Nspire løser denne ligning mht. u for $0° < u < 180°$
og får

$$u = 37{,}9094° \qquad \text{eller} \qquad u = 142{,}091°$$

dvs. $u = \underline{\underline{37{,}9°}}$

for u må være mindre end 90° da en af de andre vinkler er over 90°.

8.4 **Eksempel** Udregning af side med sinusrelationen.

Vi vil udregne siden b på figuren.

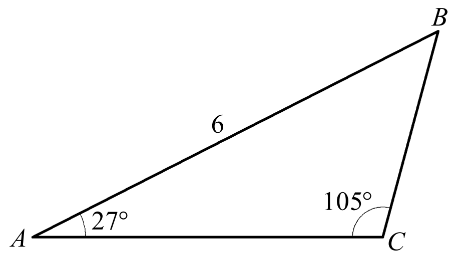
$$B = 180° - 27° - 105° = 48°$$

Vi bruger sinusrelationen:

$$\frac{b}{\sin(48°)} = \frac{6}{\sin(105°)}$$

Nspire løser denne ligning mht. b for $0<b$ og får $b = 4{,}61616$. Dvs.:

$$\underline{\underline{b = 4{,}62}}$$



8.5 **Eksempel** Opgave med to løsninger.

Opgaven

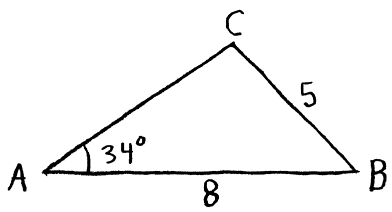
I trekant ABC er

$(*)$ $A = 34°$, $a = 5$ og $c = 8$.

Vi vil udregne vinkel C .

Skitsen

Vi tegner en skitse:



Udregningen

Vi sætter ind i sinusrelationen:

$$\frac{5}{\sin(34°)} = \frac{8}{\sin(C)}$$

Nspire løser denne ligning mht. C for $0° < C < 180°$ og får:

$$C = 63{,}5° \quad \text{eller} \quad C = 116{,}5°$$

De to trekanter

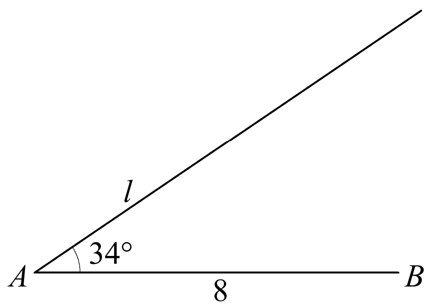
Det viser sig at der er to trekanter der opfylder $(*)$.

I den ene af disse trekanter er $C = 63{,}5°$,

og i den anden er $C = 116{,}5°$.

Vi vil tegne de to trekanter.

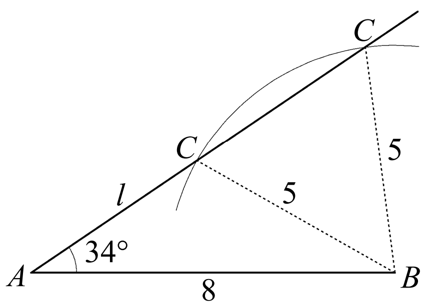
Først tegner vi AB og vinkel A.



Punktet C ligger på l , og afstanden fra B til C er 5.

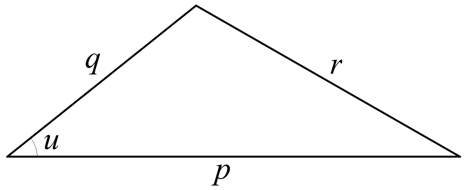
Derfor tegner vi en cirkel med centrum B og radius 5:

Nu har vi de to trekanter ABC.



9: Cosinusrelationen

9.1 Sætning Cosinusrelationen.



Hvis der i en trekant gælder

Siderne er p , q og r

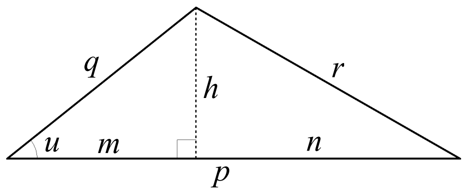
Siden r er modstående til vinklen u

så er

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

Denne regel hedder <u>cosinusrelationen</u> .

9.2 Bevis for cosinusrelationen.



På figuren har vi tilføjet en højde.

På figuren ser vi at

$$n = p - m$$

så

$$n^2 = (p - m)^2$$

Vi omskriver højresiden:

(1) $\quad n^2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$

Højden deler trekanten i to deltrekanter. Af den venstre får vi

(2) $\quad q \cdot \cos(u) = m$

da trekanten er retvinklet.

Da de to deltrekanter er retvinklede, får vi

$$h^2 = q^2 - m^2 \quad \text{og} \quad h^2 = r^2 - n^2$$

Heraf får vi

$$r^2 - n^2 = q^2 - m^2$$

Vi lægger n^2 til begge ligningens sider og får

$$r^2 = q^2 - m^2 + n^2$$

Heri erstatter vi n^2 med højresiden fra (1):

$$r^2 = q^2 - m^2 + p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

hvoraf

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

Heri erstatter vi m med venstresiden i (2):

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

Nu har vi bevist at cosinusrelationen gælder.

9.3 Eksempel Udregning af side med cosinusrelationen.

Vi vil udregne siden p på figuren.

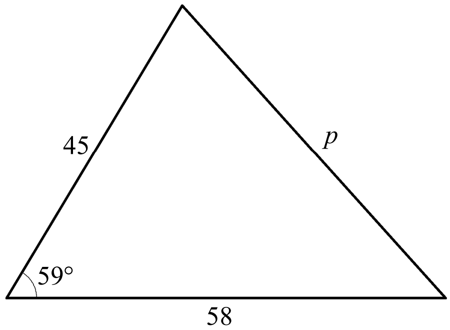
Vi bruger cosinusrelationen:

$$p^2 = 58^2 + 45^2 - 2 \cdot 58 \cdot 45 \cdot \cos(59°)$$

Nspire løser denne ligning mht. p for $0 < p$

og får $p = 51{,}9663$. Dvs.:

$$p = \underline{\underline{52{,}0}}$$



9.4 Eksempel Udregning af vinkel med cosinusrelationen.

Vi vil udregne vinklen C på figuren.

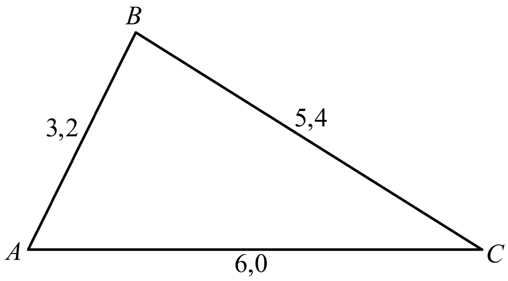
Vi bruger cosinusrelationen:

$$3{,}2^2 = 5{,}4^2 + 6{,}0^2 - 2 \cdot 5{,}4 \cdot 6{,}0 \cdot \cos(C)$$

Nspire løser denne ligning mht. C for $0° < C < 180°$

og får $C = 32{,}0559°$. Dvs.:

$$C = \underline{\underline{32{,}1°}}$$



9.5 Eksempel Cosinusrelationen og sinusrelationen bruges for at udregne en afstand.

Summen af vinklerne i en trekant

Når vi kender to vinkler i en trekant, så kan vi udregne den tredje. Det er fordi man altid får 180° når man lægger alle tre vinkler sammen.

Finde side i trekant med sinusrelationen

Hvis vi i en trekant kender

vinklerne og en af siderne

så kan vi udregne

enhver af de andre sider.

Dette kan vi gøre med sinusrelationen.

Finde side i en trekant med cosinusrelationen

Hvis vi i en trekant kender

to sider og vinklen mellem dem

så kan vi udregne

den tredje side.

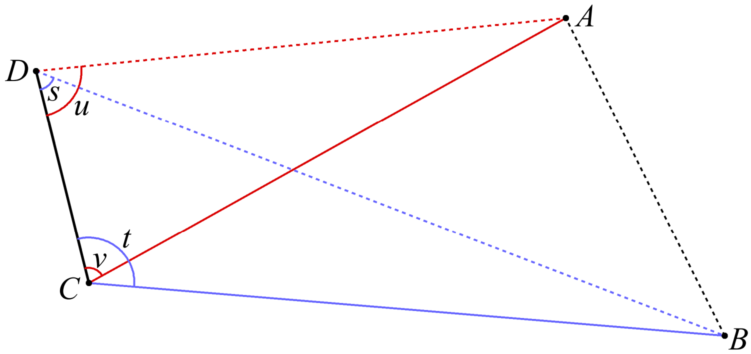
Dette kan vi gøre med cosinusrelationen.

Eksempel hvor vi bruger cosinusrelationen og sinusrelationen til at udregne en afstand

Figuren viser et landområde set ovenfra. Vi vil

finde afstand mellem og A og B,

men vi kan ikke måle denne afstand (på grund af forhold i landskabet).



Vores målinger

Vi finder to steder C og D hvor der gælder:
Fra C kan vi se både A, B og D.

Fra D kan vi se både A, B og C.

Vi kan måle afstanden mellem C og D.

Vi måler vinkler mellem sigtelinjer. Afstande er i meter. Vi får
$|CD| = 183$, $u = 81{,}7°$, $v = 75{,}0°$, $s = 54{,}9°$, $t = 108{,}8°$.

Plan for udregninger

Hvis vi i trekant ABC kender siderne ***AC*** og ***BC*** og ***vinklen*** imellem dem, så kan vi udregne længden af AB med cosinusrelationen.

Vinklen kan vi nemt udregne da vi kender t og v.

AC er en side i trekant ACD. I denne kender vi vinklerne u og v, så vi kan nemt udregne vinklen A. Da vi kender vinklerne og en side kan vi udregne længden af de andre sider med sinusrelationen. Vi nøjes med at udregne længden af AC.

På tilsvarende måde udregner vi siden ***BC*** i trekant BCD.

Siden *AC*

Vinkelsummen i en trekant er 180°, så i trekant ACD er

$$A = 180° - u - v = \underline{23{,}3°}$$

Sinusrelationen siger at

for alle sider i en trekant får vi det samme tal når vi dividerer siden med sinus til sidens modstående vinkel.

Derfor gælder at

$$\frac{|CD|}{\sin(A)} = \frac{|AC|}{\sin(u)} \quad \text{dvs.} \quad \frac{183}{\sin(23{,}3°)} = \frac{d_1}{\sin(81{,}7°)} \quad \text{hvor } d_1 = |AC|$$

Nspire løser denne ligning mht. d_1 og får $d_1 = \underline{457{,}806}$

Siden *BC*

I trekant BCD laver vi udregninger af samme type som i trekant ACD:

$$B = 180° - s - t = \underline{16{,}3°}$$

$$\frac{183}{\sin(16{,}3°)} = \frac{d_2}{\sin(54{,}9°)} \quad \text{hvor } d_2 = |BC|$$

$$d_2 = \underline{533{,}449}$$

Siden *AB*

I trekant ABC er $C = t - v = 33{,}8°$

Da C er vinklen mellemsiderne d_1 og d_2, og $c = |AB|$ er siden over for vinklen, følger af cosinusrelationen at

$$c^2 = {d_1}^2 + {d_2}^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos(C)$$

Vi løser denne ligning mht. c og får

$$c = \underline{297{,}110}$$

Konklusion

Afstanden mellem A og B er $\underline{\underline{\text{297 meter}}}$.

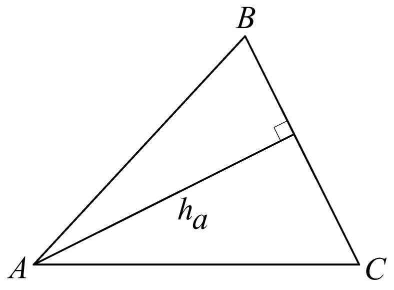
10: Nogle begreber

10.1 Højde

En højde i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til et punkt på den modstående side og er vinkelret på denne side.

I enhver trekant er der tre højder.

På figuren er vist højden h_a fra fra A.

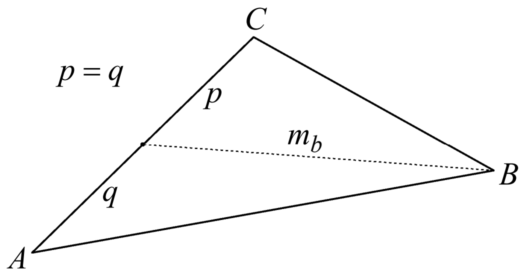


10.2 Median

En median i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side.

I enhver trekant er der tre medianer.

På figuren er vist medianen m_b fra B på siden b

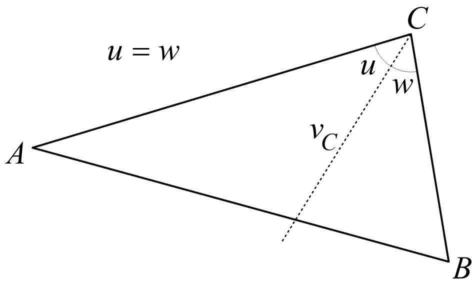


10.3 Vinkelhalveringslinje

En vinkelhalveringslinje i en trekant er en linje der går gennem en af vinkelspidserne og halverer vinklen.

I enhver trekant er der tre vinkelhalveringslinjer.

På figuren er vist vinkelhalveringslinjen v_C for vinkel C.



10.4 Nogle betegnelser

$\angle ABC$ er vinkel B i trekant ABC.

Eksempel: På figuren er $\angle RSQ = v$.

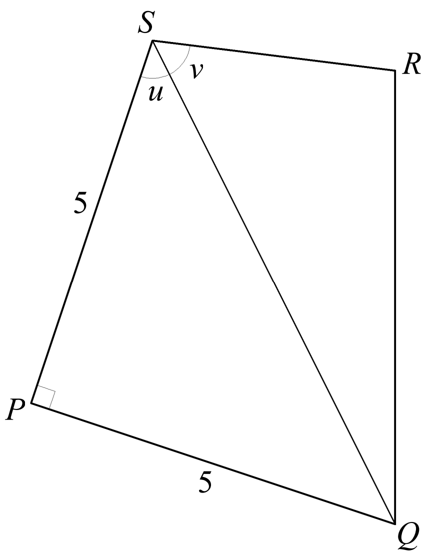
AB er linjestykket med endepunkter A og B.

$|AB|$ er længden af linjestykket AB.

Eksempel: På figuren er PQ og PS ikke samme linjestykke, men $|PQ| = |PS|$.

I en trekant ABC betegner A, B og C både punkter og vinkler.

Eksempel: Man kan skrive $P = 90°$ eller $\angle P = 90°$.

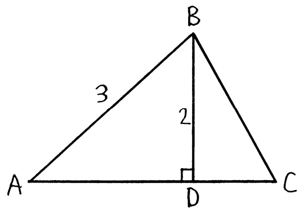


10.5 **Eksempel** Højde.

I en trekant ABC er $|AB| = 3$ og højden h_b fra B er 2.

Vi vil udregne vinkel A.

Højdens fodpunkt på siden b kalder vi D.
Vinkel D i trekant ABD er ret da højden BD er vinkelret på AC.
Vi tegner en skitse.



Af den retvinklede trekant ABD får vi

$$3 \cdot \sin(A) = 2$$

Nspire løser denne ligning mht. A for $0° < A < 90°$ og får $A = 41{,}8103°$.

Dvs. $A = \underline{\underline{41{,}8°}}$

10.6 **Eksempel** Median.

Vi vil udregne længden af medianen m_b.

Da m_b er median, er D midtpunkt af AC, så

$$|DC| = \tfrac{3}{2}$$

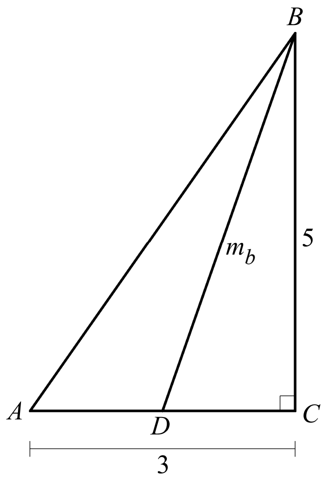
Af den retvinklede trekant BCD får vi

$$m_b{}^2 = (\tfrac{3}{2})^2 + 5^2$$

Nspire løser denne ligning mht. m_b for $m_b > 0$ og får

$$m_b = 5{,}22015$$

Dvs. $m_b = \underline{\underline{5{,}22}}$



10.7 **Eksempel** Vinkelhalveringslinje.

I trekant ABC har vi tegnet vinkelhalveringslinjen v_C.

Vi vil udregne længden af AB.

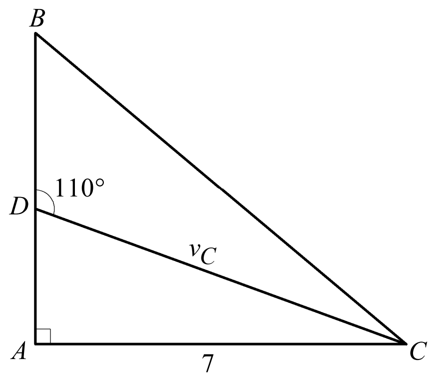
Vinkel D i trekant ACD er $180° - 110° = 70°$.
Vinkel C i trekant ACD er $180° - 70° - 90° = 20°$.
Vinkel C i trekant ABC er $2 \cdot 20° = 40°$ da v_C halverer vinklen.
Af den retvinklede trekant ABC får vi

$$7 \cdot \tan(40°) = |AB|$$

Nspire udregner venstre side og får

$$5{,}8737 = |AB|$$

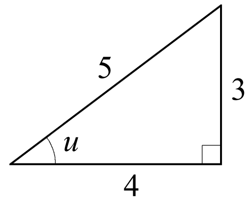
Dvs. $|AB| = \underline{\underline{5{,}87}}$



De 11 opgavetyper med sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant

I trekanten til højre er siderne med længde 3 og 4 **<u>kateter</u>**, fordi vinklen mellem dem er ret. Siden med længde 5 er **<u>hypotenuse</u>**, fordi den ikke er en af kateterne.

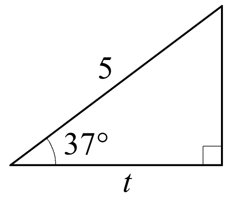
Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben. Den katete du holder i, er **<u>vinklens hosliggende katete</u>**. Den anden katete er **<u>vinklens modstående katete</u>**.



<u>Type 1</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.
<u>Udregn:</u> Vinklens hosliggende katete.

$5 \cdot \mathbf{cos}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

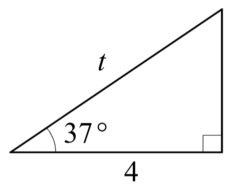
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 2</u>
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens hosliggende katete.
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{cos}(37°) = 4$ Nspire løser mht. t

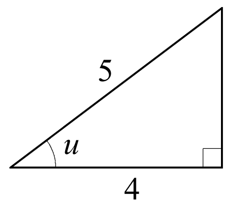
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 3</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.
<u>Udregn:</u> Vinklen mellem disse.

$5 \cdot \mathbf{cos}(u) = 4$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

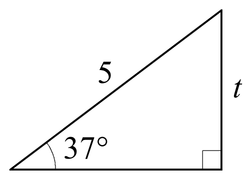
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 4</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.
<u>Udregn:</u> Vinklens modstående katete.

$5 \cdot \mathbf{sin}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

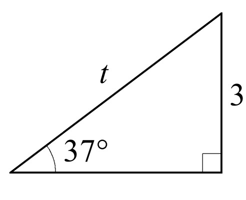
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 5</u>
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens modstående katete.
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{sin}(37°) = 3$ Nspire løser mht. t

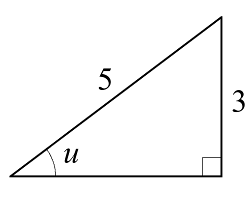
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 6</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.
<u>Udregn:</u> Katetens modstående vinkel.

$5 \cdot \mathbf{sin}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 7</u>

<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens hosliggende katete.

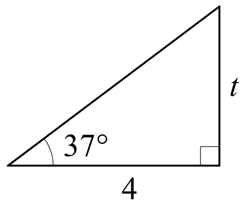
<u>Udregn:</u> Vinklens modstående katete.

$4 \cdot \mathbf{tan}(37°) \ = \ t$ Nspire udregner venstre side

vinklens modstående katete

spids vinkel

vinklens hosliggende katete



<u>Type 8</u>

<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens modstående katete.

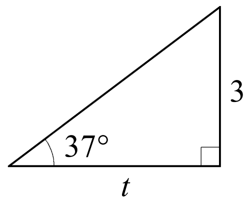
<u>Udregn:</u> Vinklens hosliggende katete.

$t \cdot \mathbf{tan}(37°) \ = \ 3$ Nspire løser mht. t

vinklens modstående katete

spids vinkel

vinklens hosliggende katete



<u>Type 9</u>

<u>Kendt:</u> De to kateter.

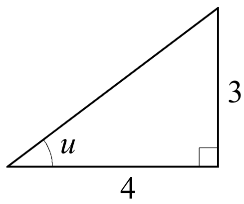
<u>Udregn:</u> En spids vinkel.

$4 \cdot \mathbf{tan}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

vinklens modstående katete

spids vinkel

vinklens hosliggende katete



<u>Type 10</u>

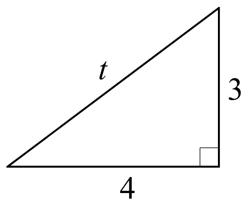
<u>Kendt:</u> De to kateter.

<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$3^2 + 4^2 \ = \ t^2$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse

kateter



<u>Type 11</u>

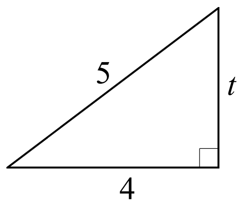
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.

<u>Udregn:</u> Den anden katete.

$t^2 + 4^2 \ = \ 5^2$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse

kateter



De 4 formler til udregning af sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant

Hver af de 11 metoder ovenfor bruger en af følgende fire formler:

I en retvinklet trekant gælder

(1) $\quad den\_ene\_katete^2 \ + \ den\_anden\_katete^2 \ = \ hypotenusen^2$

For en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

(2) $\quad hypotenusen \cdot \mathbf{cos}(\ vinkel\ ) \ = \ vinklens\_hosliggende\_katete$

(3) $\quad hypotenusen \cdot \mathbf{sin}(\ vinkel\ ) \ = \ vinklens\_modstående\_katete$

(4) $\quad vinklens\_hosliggende\_katete \cdot \mathbf{tan}(\ vinkel\ ) \ = \ vinklens\_modstående\_katete$

De 4 opgavetyper vi løser ved hjælp af cosinusrelationen eller sinusrelationen

<u>Type 12:</u> Udregn side med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

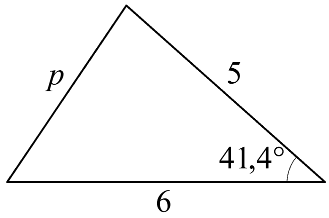
<u>Kendt:</u> En vinkel mellem to sider og disse to sider.
<u>Udregn:</u> Siden over for vinklen.

altid 2

$$p^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(41{,}4°)$$

vinklens ben

siden over for vinklen



Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

<u>Type 13:</u> Udregn vinkel med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

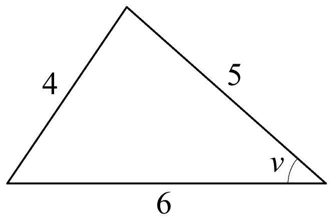
<u>Kendt:</u> De tre sider.
<u>Udregn:</u> Vinklen.

altid 2

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(v)$$

vinklens ben

siden over for vinklen



Nspire løser ligningen mht. v for $0° \le v \le 180°$

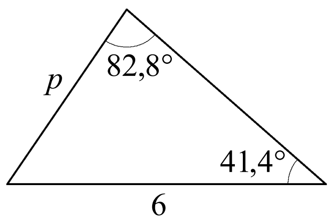
<u>Type 14:</u> Udregn side med sinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> En side og to vinkler.
<u>Udregn:</u> En af de andre sider.

$$\frac{p}{\sin(41.4°)} = \frac{6}{\sin(82.8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

siden der er p enheder, ligger over for vinklen der er 41,4°



Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

Hvis det var siden over for den ukendte vinkel vi skulle finde, så måtte vi først udregne denne vinkel ved at udnytte at summen af de tre vinkler er $180°$.

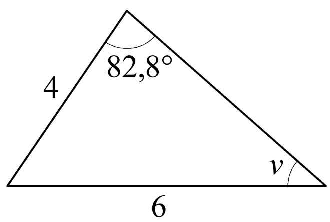
<u>Type 15:</u> Udregn vinkel med sinusrelation
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> To sider og vinklen over for en af dem.
<u>Udregn:</u> Vinklen over for den anden af de to sider.

$$\frac{4}{\sin(v)} = \frac{6}{\sin(82{,}8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

siden der er 4 enheder, ligger over for vinklen af størrelse v



Nspire løser ligningen mht. v for $0° \le v \le 180°$

Nspire giver både en løsning under $90°$ og en løsning over $90°$. <u>Husk at begrunde hvilken af løsningerne der skal bruges</u>. I dette tilfælde kan begrundelsen være: "Vinklen er under $90°$ da siden over for vinklen ikke er den største i trekanten." I nogle opgaver er det oplyst om vinklen er <u>stump</u> (dvs. over $90°$) eller <u>spids</u> (dvs. under $90°$).

De 3 opgavetyper med sinusformlen for trekants areal

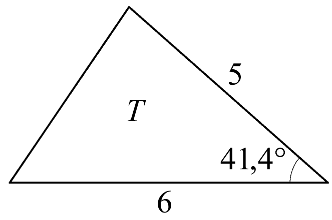
Type 16

Kendt: To sider og vinklen mellem dem.
Udregn: Arealet.

Arealet er $T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(41{,}4°)$

altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider



Nspire udregner ligningens højre side.

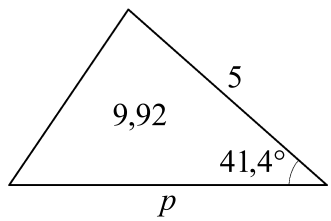
Type 17

Kendt: Arealet, vinklen mellem to sider og en af de to sider.
Udregn: Den anden af de to sider.

$9{,}92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot p \cdot \sin(41{,}4°)$

altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider



Nspire løser ligningen mht. *p*.

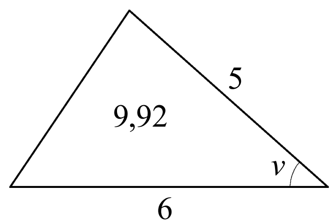
Type 18

Kendt: Arealet og to sider.
Udregn: Vinklen mellem de to sider.

$9{,}92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(v)$

altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider



Nspire løser ligningen mht. v for $0° < v < 180°$.

Ligningen har både en løsning under $90°$ og en løsning over $90°$. Hvis opgaven er i en prøve, så vil der være flere oplysninger så det fremgår hvilken af de to trekanter opgaven drejer sig om.

De 3 formler for vilkårlig trekant

Hver af metoderne 12-18 bruger en af følgende tre formler:

I alle trekanter gælder

(5) $T = \frac{1}{2} pq \sin(v)$ når T er trekantens areal og v er vinklen mellem siderne p og q.

(6) $\dfrac{p}{\sin(u)} = \dfrac{q}{\sin(v)}$ når p er siden over for vinklen u og q er siden over for vinklen v.

(7) $r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$ når p, q og r er siderne og u er vinklen mellem p og q.

Stikordsregister