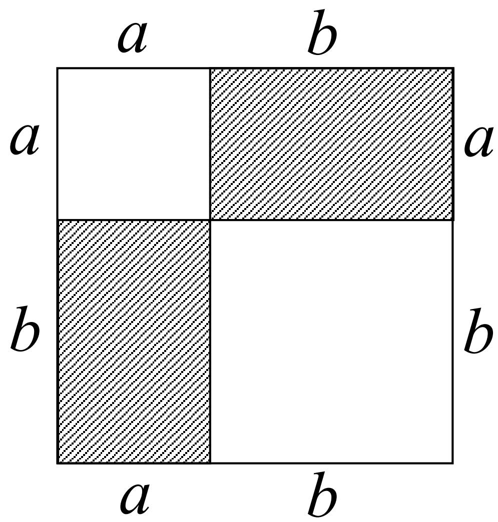
Simple udtryk og ligninger

for

gymnasiet og hf



2013 Karsten Juul

Indhold

Simple udtryk og ligninger for gymnasiet og hf

Rækkefølge af + og ·

Teori 1

Udtryk i parentes skal vi regne ud først.

**Når et tal står mellem + og ·
så skal vi udregne gange før plus.**

Dette har man bestemt. Så skal man ikke skrive så mange parenteser.

Når et tal står mellem to +'er, så kan vi selv vælge hvilket af de to tegn vi vil udregne først.

Dette betyder:

Vi kan omskrive $3+2\cdot 4$ til $3+8$

Vi kan <u>ikke</u> omskrive $3+2\cdot 4$ til $5\cdot 4$

Vi kan <u>ikke</u> omskrive $3+2\cdot x$ til $5\cdot x$

Vi kan <u>ikke</u> omskrive $3+2x$ til $5x$

Her skal læseren forestille sig at der står gangetegn.

Vi kan omskrive $4+3+2\cdot x$ til $7+2\cdot x$

Her skal · udregnes først, så vi kan ikke udregne noget før vi kender tallet *x*.

Hvis + skal udregnes før ·, så skal vi skrive en parentes:

Vi kan omskrive $(3+2)\cdot 4$ til $5\cdot 4$

Samle led af samme type

Teori 6 Sådan kan vi samle led af samme type.

I udtrykket

$$x+5+3x$$

har vi først x en gang og derefter tre gange, dvs. vi har x fire gange, så

$$x+5+3x \;=\; 4x+5 \;.$$

Ved at bruge samme tankegang får vi

$$2b+7+3+4a+6a+5b+1 \;=\; 11+7b+10a \;.$$

Der er underforstået et gangetegn mellem 4 og x i $4x$, så

$$4x \;=\; 4\cdot x \;.$$

Gange ind i parentes 1. del

Teori 9

I en skole er der samme antal piger i alle klasser og samme antal drenge i alle klasser.

k = antal klasser
p = antal piger i en klasse
d = antal drenge i en klasse

antal elever i en klasse = antal piger i en klasse **plus** antal drenge i en klasse = $p+d$
antal elever på skolen = antal klasser **gange** antal elever i en klasse = $k \cdot (p+d)$

antal piger på skolen = antal klasser **gange** antal piger i en klasse = $k \cdot p$
antal drenge på skolen = antal klasser **gange** antal drenge i en klasse = $k \cdot d$
antal elever på skolen = antal piger på skolen **plus** antal drenge på skolen = $k \cdot p + k \cdot d$

Der gælder

$$k \cdot (p+d) = k \cdot p + k \cdot d$$

da begge ligningens sider er antal elever på skolen .

Ligningen er et eksempel på reglen for at gange ind i en parentes (se Teori 10).

Teori 10 Reglen for at gange ind i parentes.

Reglen for at gange ind i en parentes:

Et udtryk $a+b+c$ med flere led kan vi gange med et tal k ved at gange hvert led i udtrykket med k , dvs.

$$k \cdot (a+b+c) = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c$$

Advarsel:

Det er + og – der skiller led, så $a \cdot b \cdot c$ indeholder kun ét led:

$$k \cdot (a \cdot b \cdot c) = k \cdot a \cdot b \cdot c$$

Dette betyder:

Vi kan omskrive $4 \cdot (2+x)$ til $8+4x$

Vi kan ikke omskrive $4 \cdot (2+x)$ til $8+x$

Vi kan ikke omskrive $4 \cdot (2 \cdot x)$ til $8 \cdot 4x$

Vi kan omskrive $4 \cdot (2 \cdot x)$ til $8x$

Vi kan ofte **reducere** et udtryk sådan:

$$b + 2(a+3b) + 4a$$

$= b + 2a + 6b + 4a$ Først ganger vi ind i parentesen.

$= 6a + 7b$ Så samler vi led af samme type.

Rækkefølge af $-$ og $\cdot$ samt af $+$ og $-$

Teori 15

Når der før et tal står + og efter står + eller –, så kan vi selv vælge hvilket af de to tegn vi vil udregne først.

Når der før et tal står – og efter står + eller –, så er det minusset før vi skal udregne først.

Når et tal står mellem – og ·, så skal vi udregne gange før minus.

Dette betyder:

Vi kan omskrive $7+5-3$ til $12-3$

Vi kan omskrive $7+5-3$ til $7+2$

Vi kan omskrive $7-5+3$ til $2+3$

Vi kan ikke omskrive $7-5+3$ til $7-8$

Vi kan ikke omskrive $2\cdot a-a$ til $2\cdot 0$

Vi kan ikke omskrive $5-2\cdot x$ til $3\cdot x$

Hvis $-$ skal udregnes før $\cdot$, så skal vi skrive en parentes:

Vi kan omskrive $(5-2)\cdot x$ til $3\cdot x$

Teori 18

x = antal frø i en pose

I en krukke er 16 frø og 5 poser,	dvs. antal frø i krukken er	$16+5\cdot x$
Vi lægger 7 frø i krukken,	dvs. antal frø i krukken er	$16+5\cdot x+7$
Vi fjerner 2 poser fra krukken,	dvs. antal frø i krukken er	$16+5\cdot x+7-2\cdot x$

Antal frø i krukken er

$$16+5x+7-2x \;=\; 23+3x$$

Denne omskrivning er et eksempel på reglen om at samle led af samme type.

Teori 20

Sådan kan vi samle led af samme type.

I udtrykket

$$8x+5-7x$$

har vi først x otte gange, og derefter fjerner vi x syv gange, dvs. vi har x én gang tilbage, så

$$8x+5-7x \;=\; x+5\ .$$

Ved at bruge samme tankegang får vi

$$6-5a-3b+4b+8-2a+b \;=\; 14-7a+2b\ .$$

Gange ind i parentes 2. del

<u>Teori 24</u> Reglen for at gange ind i parentes.

Et udtryk $a-b+c$ **med flere led kan vi gange med et tal** k **ved at gange hvert led i udtrykket med** k **, dvs.**

$$k\cdot(a-b+c) \;=\; k\cdot a-k\cdot b+k\cdot c$$

Det er + og – der skiller led, så $a\cdot b\cdot c$ **indeholder kun ét led:**

$$k\cdot(a\cdot b\cdot c) \;=\; k\cdot a\cdot b\cdot c$$

<u>Dette betyder:</u>

Vi kan omskrive $4\cdot(2-x)$ til $8-4x$

Vi kan <u>ikke</u> omskrive $4\cdot(2-x)$ til $8-x$

Vi kan <u>ikke</u> omskrive $4\cdot(2\cdot x)$ til $8\cdot 4x$

Vi kan omskrive $4\cdot(2\cdot x)$ til $8x$

<u>Vi kan ofte **reducere** et udtryk sådan:</u>

	$2b+2(a-3b)+5b$	
$=$	$2b+2a-6b+5b$	Først ganger vi ind i parentesen.
$=$	$2a+b$	Så samler vi led af samme type.

Hæve parentes

Teori 28 Sådan kan vi hæve parenteser.

Når
der foran parentesen er $-$, og
efter parentesen er $+$, $-$ eller ingenting
så kan vi
fjerne parentesen og minusset foran hvis vi samtidig ændrer fortegnet for hvert led i parentesen.

Når vi gør dette, siger vi at vi hæver minusparentesen.

Når
der foran parentesen er $+$, og
efter parentesen er $+$, $-$ eller ingenting
så kan vi
fjerne parentesen og plusset foran.

Når vi gør dette, siger vi at vi hæver plusparentesen.

Eksempler:

Disse tegn skal fjernes.

$$14-(+5-3\cdot y) \;=\; 14 \quad -5+3\cdot y$$

Disse tegn skal ændres.

$$\begin{aligned} & 8-(x-3)+(5-2\cdot x) \\ = \; & 8-(+x-3)+(+5-2\cdot x) \\ = \; & 8 \quad -x+3 \quad +5-2\cdot x \end{aligned}$$

Denne linje skriver vi normalt ikke.

$$\begin{aligned} & (-a+b)-(-c+d-e) \\ = \; & +(-a+b)-(-c+d-e) \\ = \; & \quad -a+b \quad +c-d+e \end{aligned}$$

Denne linje skriver vi normalt ikke.

Teori 29

Ved at hæve minusparentesen får vi $\quad -(-4\cdot x) \;=\; 4\cdot x$

Parentesen og minusset foran har vi fjernet, og fortegnet i parentesen har vi ændret til plus . $+4\cdot x$ er det samme som $4\cdot x$

Ved at hæve plusparentesen får vi $\quad 5+(-2) \;=\; 5-2$

Parentesen og plusset foran har vi fjernet. Fortegnet i parentesen skal vi ikke ændre da det er en plusparentes vi har hævet.

Følgende parentes er ikke en minusparentes: $\quad (2x-k)-x$

Det skyldes at der ikke står minus foran parentesen.
Når der ikke er skrevet noget foran parentesen, kan vi skrive + uden at ændre betydningen: $\quad +(2x-k)-x$
Vi kan omskrive sådan: $\; +(2x-k)-x \;=\; 2x-k-x \;=\; x-k$

Teori 33

Vi kan ofte **reducere** et udtryk sådan:

	$2x-3(4-2x)$	
$=$	$2x-(12-6x)$	Først ganger vi ind i parentesen.
$=$	$2x\quad -12+6x$	Så hæver vi minusparentesen.
$=$	$8x-12$	Så samler vi led af samme type.

Fortegn 1. del

Teori 35

$-5\cdot(-a) \;=\; 5a$

$(-5)\cdot(-a) \;=\; 5a$

Minus gange minus giver plus

$(-5)\cdot a \;=\; -5a$

$5\cdot(-a) \;=\; -5a$

$-5+(-a) \;=\; -5-a$

$-5-(-a) \;=\; -5+a$

Her skal tallene ikke ganges, så vi kan ikke bruge reglen om minus gange minus. I stedet hæver vi parenteserne (Teori 28).

Brøk (division) 1. del

Teori 37

Vi vil skrive division som en brøk.

At

12 divideret med 4 er 3

skriver vi sådan

$$\frac{12}{4}=3\ .$$

Teori 38

Halvdelen af

$$6 \cdot x \qquad \boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}$$

er

$$3 \cdot x \qquad \boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}$$

dvs.

$$\frac{6 \cdot x}{2} = 3 \cdot x$$

Da der står · mellem 6 og *x*, må vi dividere 2 op i 6.

Teori 39

Halvdelen af

$$6 + x \qquad \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{\quad x \quad}$$

er <u>ikke</u>

$$3 + x \qquad \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{\quad x \quad}$$

dvs.

$\dfrac{6+x}{2}$ kan vi <u>ikke</u> omskrive til $3 + x$.

Da der står + mellem 6 og *x*, må vi <u>ikke</u> dividere 2 op i 6.

Hvis der står minus må vi heller ikke dividere 2 op i 6:

$\dfrac{6-x}{2}$ kan vi <u>ikke</u> omskrive til $3 - x$.

<u>Der gælder altså:</u>

$\dfrac{15 \cdot x - 8}{5}$ kan vi <u>ikke</u> omskrive til $3 \cdot x - 8$

$\dfrac{7 \cdot x + 10}{5}$ kan vi <u>ikke</u> omskrive til $7 \cdot x + 2$.

Teori 42

Der gælder:

$$\frac{a \cdot x}{a} = 1 \cdot x = x$$

$$\frac{a \cdot x}{a} = x \qquad \text{og} \qquad \frac{x \cdot a}{a} = x$$

$$a \cdot \frac{x}{a} = x \qquad \text{og} \qquad \frac{x}{a} \cdot a = x$$

$$\frac{-4x}{-4} = x \qquad \text{og} \qquad \frac{x \cdot (-4)}{-4} = x$$

$$-4 \cdot \frac{x}{-4} = x \qquad \text{og} \qquad \frac{x}{-4} \cdot (-4) = x$$

$\frac{x+a}{a}$ kan vi ikke omskrive til x

$\frac{a+x}{a}$ kan vi ikke omskrive til x

$\frac{x-a}{a}$ kan vi ikke omskrive til x

Fortegn 2. del

Teori 44

Disse eksempler viser tilladte omskrivninger:

Minus divideret med minus giver plus.

$$\frac{-5}{a} = -\frac{5}{a} \qquad \frac{5}{-a} = -\frac{5}{a} \qquad \frac{-5}{-a} = \frac{5}{a} \qquad -\frac{5+c}{a} = \frac{-5-c}{a}$$

$$-\frac{-5}{a} = \frac{5}{a} \qquad -\frac{5}{-a} = \frac{5}{a} \qquad -\frac{-5}{-a} = -\frac{5}{a} \qquad -\frac{5-c}{a} = \frac{-5+c}{a}$$

Regler om ligevægt

Teori 46

De fire vigtigste af reglerne om ligevægt er føgende

<u>Regler om ligevægt vedrørende $+$, $-$, $\cdot$ og $:$</u>

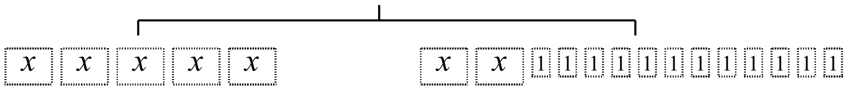
- Vi må lægge det samme tal til begge sider af lighedstegnet.
- Vi må trække det samme tal fra begge sider af lighedstegnet.
- Vi må gange begge sider af lighedstegnet med det samme tal hvis det tal vi ganger med, ikke er nul.
- Vi må dividere begge sider af lighedstegnet med det samme tal hvis det tal vi dividerer med, ikke er nul.

Reglerne ovenfor er skrevet meget kort. I de følgende rammer forklarer vi grundigt hvad reglerne om ligevægt går ud på.

Vi kan træne reglerne om ligevægt ved at bruge dem til at løse ligninger. Så nytter det ikke at du løser ligningerne ved hjælp af andre regler, da det er reglerne om ligevægt der er formålet med øvelserne. Reglerne om ligevægt er en vigtig del af pensum.

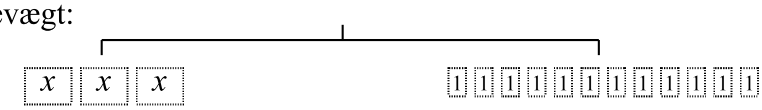
Teori 47

Tænk på en vægt når du løser ligninger.
x står for et tal. På hver pakke står hvor mange lodder den indeholder.
Vi har anbragt nogle pakker på hver af vægtens skåle:



$$5x = 2x + 12$$

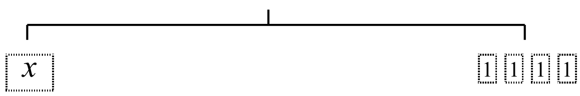
Vi trækker $2x$ fra begge ligningens sider, dvs. fjerner $2x$ fra begge vægtskåle. Der må stadig være ligevægt:



$$5x \ {-2x} = 2x + 12 \ {-2x}$$

$$3x = 12$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 3. På hver af vægtskålene er der nu en tredjedel af det der var før. Der må stadig være ligevægt: :



$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Pakken med x lodder vejer det samme som fire lodder, dvs. $x = 4$.

Teori 48

Det er en FEJL at omskrive $\frac{x}{2}+3 = x$ til $\frac{x}{2}\cdot 2+3 = x\cdot 2$
fordi det kun er en del af venstre side der er ganget med 2 .

Man skal gange hele siden med 2:

$\frac{x}{2}+3 = x$

$(\frac{x}{2}+3)\cdot 2 = x\cdot 2$ *Her har vi ganget begge sider med 2.*

$\frac{x}{2}\cdot 2+3\cdot 2 = 2x$

$x+6 = 2x$

$6 = x$ *Her har vi trukket x fra begge sider.*

Ovenstående gælder ikke kun gange. For alle regler om ligevægt gælder at alt det der står på én side af lighedstegnet, skal vi tænke på som ét tal vi skal udføre en udregning med.

Teori 49

(a) Hvis vi i ligningen $14 = 3x+2$

trækker 2 fra begge sider, får vi $12 = 3x$

(b) Hvis vi i ligningen $12 = 3x$

dividerer begge sider med 3 , får vi $\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$

Ved at reducere de to sider får vi $4 = x$

(c) ADVARSEL: Hvis vi i ligningen $14 = 3x+2$

dividerer begge sider med 3 , får vi $\frac{14}{3} = \frac{3x+2}{3}$

(Start med at trække 2 fra begge sider).

3 kan ikke forkortes væk da der står + mellem $3x$ og 2

(d) ADVARSEL: Hvis vi i ligningen $14 = 3x+2$

dividerer begge sider med 3 , får vi IKKE $\frac{14}{3} = \frac{3x}{3}+2$

(Start med at trække 2 fra begge sider).

(e) Hvis vi i ligningen $-x = 5$

ganger begge sider med -1 , får vi $x = -5$

(f) Hvis vi i ligningen $2 = \frac{x}{4}-3$

lægger 3 til begge sider, så får vi $5 = \frac{x}{4}$

Vi ganger begge sider med 4: $5\cdot 4 = \frac{x}{4}\cdot 4$

Ved at reducere de to sider får vi $20 = x$

Teori 52

Vi starter med et tilfældigt tal: 7

Vi lægger 5 til tallet og får: 12

Vi trækker 5 fra dette resultat og får: 7

Vi fik det vi startede med, fordi ***træk 5 fra*** er den omvendte udregning til ***læg 5 til*** .

På venstre side står udregningen ***læg 5 til*** : $x+5 = 12$

Med begge sider laver vi den omvendte udregning, dvs. ***træk 5 fra*** , og får: $x=7$.

Den omvendte udregning til ***træk 4x fra*** er ***læg 4x til*** . Denne omvendte udregning laver vi med begge sider i ligningen $2x = -4x+12$ og får $6x = 12$.

Den omvendte udregning til ***gang med 6*** er ***divider med 6*** . Denne omvendte udregning laver vi med begge sider i ligningen $6x=12$ og får $\frac{6x}{6}=\frac{12}{6}$ dvs $x=2$.

Den omvendte udregning til ***divider med 3*** er ***gang med 3*** . Denne omvendte udregning laver vi med begge sider i ligningen $\frac{x}{3} = 2$ og får $\frac{x}{3}\cdot 3 = 2\cdot 3$ dvs $x = 6$.

Isolere

Teori 62 Sådan kan vi isolere en variabel.

I en opgave står at vi skal isolere m i ligningen

$$n = 2m - 1 \ .$$

Dette betyder: Vi skal omforme ligningen til formen $m = \cdots$ hvor der på prikkernes plads står et udtryk der ikke indeholder m .

For at isolere m starter vi med at lægge 1 til begge ligningens sider. Så får vi

$$n+1 = 2m \ .$$

Nu dividerer vi begge ligningens sider med 2:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2m}{2} \ .$$

Ved at forkorte brøken på højre side får vi ligningen

$$\frac{n+1}{2} = m$$

hvor m er isoleret.

Resultatet på opgaven er

$$m = \frac{n+1}{2}$$

For at isolere z i ligningen $4zm = p$

dividerer vi begge sider med $4m$ og får $\dfrac{4zm}{4m} = \dfrac{p}{4m}$

Vi forkorter brøken på venstre side og får $z = \dfrac{p}{4m}$

For at isolere x i ligningen $(4-y)x = 3$

dividerer vi begge sider med $4-y$ og får $\dfrac{(4-y)x}{4-y} = \dfrac{3}{4-y}$

Vi forkorter brøken på venstre side og får $x = \dfrac{3}{4-y}$

x^2

Teori 71

Udtrykket

$$4^2$$

læses

4 i anden

og betyder

4 ganget med sig selv

dvs.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \ .$$

For alle tal x er

$$x^2 = x \cdot x \ .$$

På lommeregneren kan vi udregne at

$$1{,}4^2 = 1{,}96$$

I udtryk som

$$-x^2 \ , \quad 1+3^2 , \quad 4 \cdot 3^2$$

skal vi opløfte til anden før vi bruger –, + og · , så der gælder

$$-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$2x^2 = 2 \cdot x \cdot x$$

$$(2x)^2 = (2x) \cdot (2x) = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 4x^2$$

Teori 74

Vi lader k stå for et positivt tal.

Udtrykket

$$\sqrt{k}$$

læses

kvadratroden af k

og er den <u>positive</u> løsning til ligningen

$$x^2 = k \ .$$

Når vi kun ser på <u>positive</u> tal x , så gælder at ligningen

$$x^2 = 62$$

har løsningen

$$x = \sqrt{62} \ .$$

Vi udregner kvadratroden på lommeregner og får

$$x = 7{,}874$$

Teori 76

Vi vil finde det positive tal x som er løsning til ligningen

$$13 + 3 \cdot x^2 \ = \ 20 \ .$$

Først isolerer vi x^2 :

$$13 + 3 \cdot x^2 \ {}_{-13} \ = \ 20 \ {}_{-13}$$

$$3 \cdot x^2 \ = \ 7$$

$$\frac{3 \cdot x^2}{3} \ = \ \frac{7}{3}$$

$$x^2 \ = \ \frac{7}{3}$$

Af reglen fra teori 70 får vi

$$x \ = \ \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Vi udregner kvadratroden på lommeregner og får

$$x \ = \ 1{,}528$$

dvs. $\underline{\underline{1{,}528}}$ er det positive tal som er løsning til $13 + 3 \cdot x^2 \ = \ 20$.

Brøk 2. del

Teori 82 Brøkregler.

(a) Vi ændrer ikke en brøks talværdi når vi forlænger (dvs. ganger tæller og nævner med samme tal) eller forkorter (dvs. dividerer tæller og nævner med samme tal):

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot k}{b\cdot k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$$

(b) Vi kan gange to brøker ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

(c) Vi kan gange en brøk med et tal ved at gange brøkens tæller med tallet:

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b} \qquad c\cdot\frac{a}{b} = \frac{c\cdot a}{b}$$

(d) Vi kan dividere en brøk med et tal ved at gange nævneren med tallet:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b\cdot c}$$

(e) Vi kan dividere med en brøk ved at gange med den omvendte brøk:

$$c : \frac{a}{b} = c\cdot\frac{b}{a} \qquad \frac{c}{\frac{a}{b}} = c\cdot\frac{b}{a}$$

(f) Hvis brøkerne har samme nævner, kan vi sætte på fælles brøkstreg sådan:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Ellers må vi først forlænge brøkerne så de får samme nævner (se Teori 83).

Teori 83 Sådan kan vi sætte på fælles brøkstreg.

Her er to eksempler på hvordan vi kan sætte på fælles brøkstreg ved først at forlænge så brøkerne får samme nævner:

$$\frac{x}{6}+\frac{1}{2} = \frac{x}{6}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{x}{6}+\frac{3}{6} = \frac{x+3}{6}$$

$$\frac{3}{2x}-\frac{1}{4} = \frac{3\cdot 2}{2x\cdot 2}-\frac{1\cdot x}{4\cdot x} = \frac{6}{4x}-\frac{x}{4x} = \frac{6-x}{4x}$$

Advarsel:

Der gælder $\frac{2}{5}-\frac{1+x}{5} = \frac{2-(1+x)}{5}$ ☺

Vi kan **ikke** omskrive $\frac{2}{5}-\frac{1+x}{5}$ til $\frac{2-1+x}{5}$ ☹

Gange to parenteser

Teori 89

Reglen for at gange to parenteser:

Vi kan gange to parenteser ved at gange hvert led i den ene med hvert led i den anden.

Forklaring på hvordan reglen skal forstås:

I udtrykket

$$(3+x)\cdot(2-a+4\cdot k)$$

indeholder første parentes de to led

$3 \qquad x$

og anden parentes de tre led

$2 \qquad -a \qquad 4k$

Ved at gange første led i første parentes med hvert af leddene i anden parentes får vi de tre led:

$6 \qquad -3a \qquad 12k$

Ved at gange andet led i første parentes med hvert af leddene i anden parentes får vi:

$2x \qquad -ax \qquad 4kx$

De seks led vi har beregnet, lægger vi sammen og får:

$$(3+x)\cdot(2-a+4\cdot k) \;=\; 6-3a+12k+2x-ax+4kx$$

Advarsel:

Der gælder at $\quad 4-(a+2)(b-3) \;=\; 4-(ab-3a+2b-6)$ ☺

Vi kan **ikke** omskrive $\quad 4-(a+2)(b-3)$ til $4-ab-3a+2b-6$ ☹

x^2, x^3, x^4 osv.

Teori 98 (Hvad betyder x^2, x^3, x^4 osv.?)

$x^2 = x\cdot x$

$x^3 = x\cdot x\cdot x$

$x^4 = x\cdot x\cdot x\cdot x$

osv.

<u>Teori 99</u>

Når du afleverer opgaver, skal du medtage en mellemregning som den i (8), men de andre mellemregninger behøver du ikke medtage.

(1) $a^3 + a^3 \;=\; 2a^3$

(2) $a^3 \cdot a^3 \;=\; (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \;=\; a^6$

(3) $(ab)^2 \;=\; (ab) \cdot (ab) \;=\; a \cdot a \cdot b \cdot b \;=\; a^2 b^2$

(4) $(a+b)^2 \;=\; (a+b)(a+b) \;=\; a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b \;=\; a^2 + 2ab + b^2$

(5) $(a^3)^2 \;=\; a^3 \cdot a^3 \;=\; (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \;=\; a^6$

(6) $a^2 \cdot 3ab^2 \;=\; a \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot b \;=\; 3a^3 b^2$

(7) $\dfrac{a^2 b^3}{a^3 b} \;=\; \dfrac{a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b}{a \cdot a \cdot a \cdot b} \;=\; \dfrac{b^2}{a}$

(8) $\dfrac{a^2 + ab}{ab^2 + b^3} \;=\; \dfrac{a \cdot (a+b)}{b^2 \cdot (a+b)} \;=\; \dfrac{a}{b^2}$

Kvadratsætninger

<u>Teori 111</u> (Kvadratsætninger)

<u>Kvadratet på en sum:</u> $(a+b)^2 \;=\; a^2 + b^2 + 2ab$

<u>Kvadratet på en differens:</u> $(a-b)^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2ab$

<u>To tals sum gange samme tals differens:</u> $(a+b)(a-b) \;=\; a^2 - b^2$

<u>kvadratet på et tal</u> = <u>tallet opløftet til anden</u>.

<u>kvadratet på 4</u> = <u>16</u> og <u>kvadratet på 3*x*</u> = $9x^2$.

<u>Kvadratet på en sum:</u>

$$(3x+5)^2 \;=\; (3x)^2 + 5^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 \;=\; 9x^2 + 25 + 30x$$

$$(\;a + b)^2 \;=\; a^2 \;+ b^2 + 2 \cdot a \;\cdot b$$

<u>Kvadratet på en differens:</u>

$$(3x-5)^2 \;=\; (3x)^2 + 5^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 \;=\; 9x^2 + 25 - 30x$$

$$(\;a - b)^2 \;=\; a^2 \;+ b^2 - 2 \cdot a \;\cdot b$$

<u>To tals sum gange samme tals differens:</u>

$$(3x+5)(3x-5) \;=\; (3x)^2 - 5^2 \;=\; 9x^2 - 25$$

$$(\;a + b) \cdot (\;a - b) \;=\; a^2 \;- b^2$$

Det udvidede potensbegreb

Teori 120 (Potens hvor eksponent kan være negativ, nul eller en brøk)

$a^0 = 1$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ f.eks. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

$a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a}$ f.eks. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$

To ligninger med to ubekendte

Teori 121 (Løsning af ligningssystem ved substitution)

Opgave

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 3x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

Besvarelse

I: $\quad 2x + y = 5$

II: $\quad 3x - 2y = -3$

Af I får vi:

III: $\quad y = 5 - 2x$

Dette indsætter vi i II:

$$\begin{aligned} 3x - 2(5-2x) &= -3 \\ 3x - (10-4x) &= -3 \\ 3x \; -10+4x &= -3 \\ 7x &= 7 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Dette indsætter vi i III:

$$\begin{aligned} y &= 5 - 2\cdot 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Løsning:

$$x = 1 \text{ og } y = 3$$

Ordet
substituere
betyder
udskifte.

I besvarelsen udskifter vi y i ligning II med $5-2x$.

Vi starter med at isolere x eller y i en af ligningerne.

Vi har her valgt at isolere y i den første ligning da det ser ud til at være nemmest.

Facit ville blive det samme selv om vi havde valgt en af de tre andre muligheder.

Vi indsætter i ligning II fordi vi isolerede i ligning I .

Hvis vi isolerer i ligning II , så skal vi indsætte i ligning I .

Vi kan kontrollere facit ved at indsætte 1 og 3 for x og y i ligningerne I og II:

$$\begin{aligned} 2\cdot 1 + 3 &= 5 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 3 &= -3 \end{aligned}$$

Vi ser at begge ligninger passer.