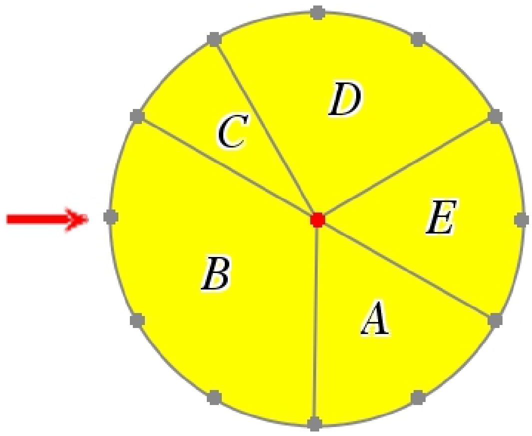
# Sandsynlighed

for matC i stx og hf

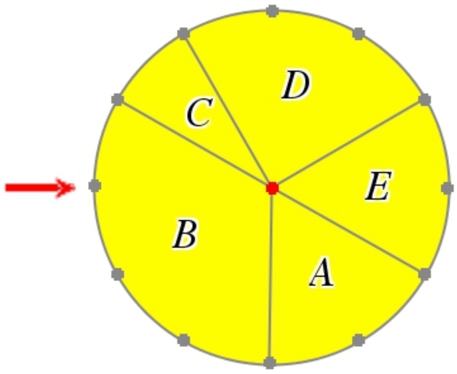
Udgave 2




2019 Karsten Juul

# 1. Udfald

Vi drejer den gule skive om dens centrum og ser hvilket af de fem felter der standser ud for den røde pil.




Da skiven sidst blev drejet, var det feltet B der standsede ud for pilen. Man siger at **udfaldet** er $B$ .
**Udfaldsrummet** er alle udfald der kan komme.
Udfaldsrummet er altså

$$A \quad B \quad C \quad D \quad E$$

# 2. Sandsynlighed

Der er ikke noget sted på skivens kant der oftere end andre steder standser ud for pilen.

Feltet $A$ er $\frac{1}{6}$ af skiven, så $A$ må standse ud for pilen i $\frac{1}{6}$ af tilfældene. Man siger at **sandsynligheden** for $A$ er $\frac{1}{6}$ .

Udfaldene og deres sandsynligheder tilsammen kaldes et **sandsynlighedsfelt**.

Følgende tabel er et sandsynlighedsfelt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Udfald: | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
| Sandsynlighed: | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

Dette sandsynlighedsfelt beskriver eksperimenter med den gule skive.

Vi prøver at lægge alle sandsynlighederne sammen:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1$$

Resultatet er 1. Summen skal altid være 1.

En sandsynlighed er altid et tal der er 0 eller 1 eller ligger mellem 0 og 1 .

## 2.1 Regel

I et sandsynlighedsfelt er summen af alle sandsynlighederne altid 1.

## 2.2 Opgave

I en pose er kugler af forskellig farve. Vi tager en tilfældig af kuglerne. Sandsynligheden for at få en bestemt farve kan vi se i tabellen.

| Udfald | Rød | Grøn | Blå | Lilla |
|---|---|---|---|---|
| Sandsynlighed | 0,1 | | 0,4 | 0,2 |

Bestem sandsynligheden for at vi får en grøn kugle.

*Besvarelsen står på næste side.*

### Besvarelse

| Udfald: | Rød | Grøn | Blå | Lilla |
|---|---|---|---|---|
| Sandsynlighed: | 0,1 | | 0,4 | 0,2 |

Summen af alle sandsynlighederne skal være 1 .

$0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}7$

$1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Sandsynligheden for at få en grøn kugle er $\underline{\underline{0{,}3}}$ .

## 3. Hændelse

Et bestemt spil kan beskrives med følgende sandsynlighedsfelt:

| Udfald | 2 | 5 | 10 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Sandsynlighed | $\frac{5}{13}$ | $\frac{4}{13}$ | $\frac{2}{13}$ | $\frac{1}{13}$ | $\frac{1}{13}$ |

Hændelsen at vi får et **encifret tal** består af udfaldene 2 og 5 .

Udfaldet 2 får vi i $\frac{5}{13}$ af tilfældene,

og udfaldet 5 får vi i $\frac{4}{13}$ af tilfældene.

I alt er det i $\frac{9}{13}$ af tilfældene at vi får hændelsen **encifret tal** , $\qquad \frac{5}{13} + \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$

så $\frac{9}{13}$ er sandsynliheden for hændelsen **encifret tal** .

En **hændelse** er en del af udfaldsrummet.

Hændelsen **10 eller mere** består af udfaldene 10, 20 og 50 .
Sandsynligheden for denne hændelse er

$$\frac{2}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \underline{\underline{\frac{4}{13}}}$$

### 3.1 Regel om sandsynlighed for hændelse.

Sandsynligheden for en hændelse kan vi få vi ved at tage sandsynligheden for hvert af udfaldene i hændelsen og lægge dem sammen.

### 3.2 Opgave

Når man smider en tokrone i en maskine, så lyser et vist antal lamper.
Sandsynlighederne er vist i tabellen.

| Udfald | ●○○○○○ | ●●○○○○ | ●●●○○○ | ●●●●○○ | ●●●●●○ | ●●●●●● |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sandsynlighed | 0,25 | 0,25 | 0,20 | 0,15 | 0,10 | 0,05 |

Vi smider en tokrone i maskinen.

a) Bestem sandsynligheden for at udfaldet bliver 3 eller 4 lysende lamper.

To gange smider vi en tokrone i maskinen.

b) Bestem sandsynligheden for at det først bliver 1 lysende lampe og så 3 lysende lamper.

*Besvarelsen står på næste side.*

**Besvarelse**

Når man smider en tokrone i en maskine, så lyser et vist antal lamper.
Sandsynlighederne er vist i tabellen.

| Udfald: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sandsynlighed: | 0,25 | 0,25 | 0,20 | 0,15 | 0,10 | 0,05 |

a) **Tankegangen bag udregningen i svaret på a)**

Hvis vi mange gange smider en tokrone i maskinen, får vi

$3$ i $20\%$ af tifældene,

$4$ i $15\%$ af tilfældene,

så i

$20\%+15\%=35\%$ af tilfældene

får vi et af udfaldene $3$ og $4$ .

Sandsynlighed for $3$ er $0{,}20$ .
Sandsynlighed for $4$ er $0{,}15$ .
Sandsynlighed for $3$ eller $4$ er $0{,}20+0{,}15 = 0{,}35$ .

Sandsynligheden er $\underline{\underline{0{,}35}}$ for at udfaldet bliver 3 eller 4 lysende lamper.

b) **Tankegangen bag udregningen i svaret på b)**

To gange efter hinanden smider vi en tokrone i maskinen.
Dette gør vi mange gange.

Ved den første af de to mønter vil vi

i $25\%$ af tilfældene få $1$ lysende lampe,

og i $20\%$ af **disse** tilfælde
vil vi ved den sidst af de to mønter få $3$ lysende lamper,

så

i $20\%$ af $25\%$ af tilfældene får vi
først 1 lysende lampe og så 3 lysende lamper.

To gange smider vi en mønt i maskinen.
Sandsynligheden for første gang at få 1 er 0,25 .
Sandsynligheden for anden gang at få 3 er 0,20 .
Sandsynligheden for både ”først 1” og ”derefter 3”, er

$$0{,}25\cdot 0{,}20 = 0{,}05 .$$

Sandsynligheden for at det først bliver 1 lysende lampe og så 3 lysende lamper, er $\underline{\underline{0{,}05}}$ .

**3.3 Regel** om at lægge sandsynligheder sammen.

I 3.2a lagde vi sandsynlighen for **hændelsen 1** til sandsynligheden for **hændelsen 3** for at få sandsynligheden for **hændelsen 1 eller 3**. Det kunne vi fordi vi ved at de to hændelser ikke kan indtræffe samtidigt.

Et eksempel hvor vi ikke kan lægge sandsynlighederne sammen.

Vi trækker et tilfældigt af tallene 1, 2, 3, 4 og 5 og lægger det tilbage.

Hændelsen **højst 3** (dvs. 1, 2 eller 3) har sandsynligheden $\frac{3}{5}$.

*Eksemplet fortsætter på næste side.*

Hændelsen **lige tal** (dvs. 2 eller 4) har sandsynligheden $\frac{2}{5}$.

Hædelsen **højst 3 eller lige tal** (dvs. 1, 2, 3 og 4) har sandsynligheden $\frac{4}{5}$.

Denne sandsynlighed får vi ikke ved at lægge sandsynligheden for højst 3 til sandsynligheden for lige tal.
Dette skyldes at de to hændelser kan indtræffe samtidigt, nemlig hvis vi trækker tallet 2.

**3.4 Regel** om at gange sandsynligheder.

I 3.2b gangede vi sandsynlighederne for **først 1** og **derefter 3** for at få sandsynligheden for at de begge indtræffer.

Et eksempel hvor vi ikke kan gange sandsynlighederne.

Vi trækker et tilfældigt af tallene 1, 2, 3, 4 og smider det væk.
Så trækker vi et tilfældigt af de tilbageblevne tal.
Sandsynligheden for **først lige og dernæst under 3** kan ikke udregnes ved at gange sandsynlighederne for **først lige** og **dernæst under 3** .
Det skyldes at sandsynligheden for **dernæst under 3** afhænger af hvilket tal der trækkes i første trækning.
Hvis sandsynligheden for **dernæst under 3** ikke afhænger af hvilket tal der først trækkes, så siger man at hændelserne **først lige** og **dernæst under 3** er **uafhængige**.

# 4. Symmetrisk sandsynlighedsfelt

Eksperimentet **kast med én terning** kan beskrives med følgende sandsynlighedsfelt

| Udfald | • | •• | ••• | •••• | ••••• | •••••• |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sandsynlighed | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Alle ufald er lige sandsynlig.

Derfor kan vi udregne en sandsynlighed på en måde der er nemmere end at lægge sandsynlighederne sammen.

Vi udregner sandsynligheden for hændelsen **5 eller 6** :

Det er 2 udfald ud af 6 mulige, så sandsynligheden for at få dette er $\frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ .

Når man vil udregne sandsynligheden for en hændelse, så kalder man udfaldene i hændelsen for **gunstige udfald** (også selvom udfaldene er noget ubehageligt).
Et **symmetrisk sandsynlighedsfelt** er et sandsynlighedsfelt hvor alle udfald har samme sandsynlighed.

**4.1 Regel** om sandsynlighed i symmetrisk sandsynlighedsfelt.

For en hændelse i et symmetrisk sandsynlighedsfelt gælder:

$$\text{sandsynligheden} = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}} \ .$$

**4.2 Opgave**

I en pakke er 80 frugter. De 12 er sure.
En tilfældig af frugterne udtages.

Besten sandsynligheden for at den udtagne frugt er sur.

*Besvarelsen af opgaven står på næste side.*

### Besvarelse

Der er 80 frugter. De 12 er sure.

Sandsynligheden for at en tilfældig udtaget frugt er sur, er

$$\frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}} = \frac{12}{80} = \underline{\underline{0{,}15}}$$

# 5. Metoder til optælling af antal muligheder

## 5.1 Fakultet

Symbolet $7!$ betegner det tal man får når man

ganger de 7 første hele positive tal,

dvs.

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 \ .$$

I stedet for 7 kan man skrive ethvert positivt helt tal, f.eks.

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \ .$$

Tallet $7!$ læses 7 fakultet .

Nspire kan udregne tal som $7!$ .

## 5.2 Antal måder når rækkefølge betyder noget.

Blandt 5 opgaver udtager vi 3 og anbringer dem i den rækkefølge de skal løses.

Antal måder det kan gøres på betegnes $P(5{,}3)$.

**5.2a** Dette tal kan udregnes sådan:

$$P(5{,}3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

**5.2b** På Nspire kan det udregnes sådan:

$$\text{nPr}(5{,}3) = 60$$

## 5.3 Antal måder når rækkefølge ikke betyder noget.

Blandt 5 opgaver udtager vi 3.

Antal måder det kan gøres på betegnes $K(5{,}3)$.

**5.3a** Dette tal kan vi finde i Pascals trekant i formelsamlingen.

**5.3b** Dette tal kan udregnes sådan:

$$K(5{,}3) = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot \ 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 2 = 10$$

**5.3c** På Nspire kan det udregnes sådan:

$$\text{nCr}(5{,}3) = 10$$

## 5.4 Opgave

I klassen er 6 drenge og 8 piger.
Nspire vælger tilfældigt 4 elever der skal til tavlen.

Bestem sandsynligheden for at alle 4 er piger.

## Besvarelse

Blandt 6 drenge og 8 piger udtages tilfældigt 4.
Sandsynligheden for at alle udtagne er piger, udregnes som

$$\frac{\text{Antal gunstige}}{\text{Antal mulige}} \ .$$

Antal gunstige er $K(8{,}4)$ som i Nspire-sprog skrives nCr(8,4) .
Da $6+8=14$ , er antal mulige $K(14{,}4)$ som i Nspire-sprog skrives nCr(14,4) .

Sandsynligheden for at alle er piger er

$$\frac{\text{Antal gunstige}}{\text{Antal mulige}} = \frac{\mathrm{nCr}(8{,}4)}{\mathrm{nCr}(14{,}4)} = 0.06993 \ \approx \ \boxed{7{,}0\ \%}$$

## 5.5 Formler

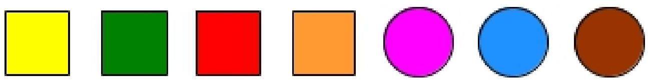
$r$ ting vælges blandt $n$ .

Antal måder:

Hvis rækkefølge har betydning: $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Hvis rækkefølge ikke har betydning: $K(n,r) = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

## 5.6 Oplæg til regler om plus og gange



Vi udtager 2 af de kantede brikker.
Antal måder dette kan gøres på, er $K(4{,}2)=6$ .

Vi udtager 2 af de runde brikker.
Antal måder dette kan gøres på, er $K(3{,}2)=3$ .

Tallene $K(4{,}2)$ og $K(3{,}2)$ er bestemt ved hjælp af Pascals trekant i formelsamlingen.

To brikker skal udtages sådan at de begge er kantede, eller begge er runde.
Antal måder det kan gøres på er

antal måder hvorpå to kantede kan vælges **plus** antal måder hvorpå to runde kan vælges

dvs. antal måder er $6+3=9$ .

Der skal udtages 4 brikker sådan at to er kantede og to er runde.
Antal måder dette kan gøres på er

antal måder hvorpå to kantede kan vælges **gange** antal måder hvorpå to runde kan vælges

dvs. antal måder er $6\cdot 3=18$ .

## 5.7 Regler om plus og gange

Et valg kan gøres på **m** måder og et andet valg kan gøres på **n** måder.

**5.7a** Hvis et valg består i at foretage det ene **eller** det andet af disse valg, er antal måder **m + n** .

**5.7b** Hvis et valg består i at foretage det første **og** det andet af disse valg, er antal måder **m · n** .

# Stikordsregister




Sandsynlighed for matC i stx og hf, Udgave 2



20/4-2019

Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm