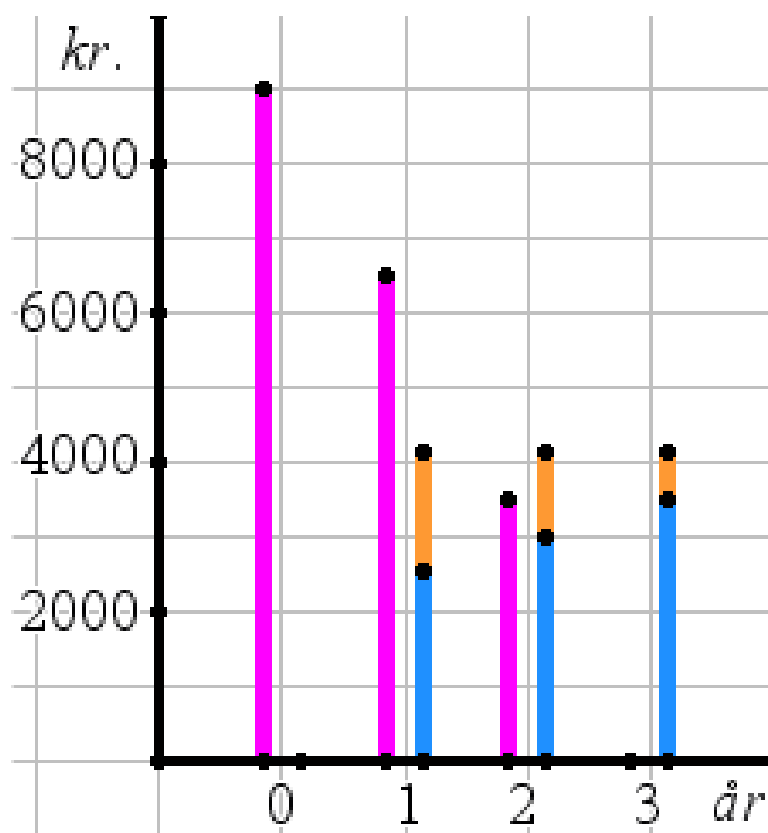


Rentesregning



2018 Karsten Juul

Procent-ændring

1.	Formler til opgaver med procent-ændring	1
2.	Bestem procent-ændring	1
3.	Bestem begyndelsesværdi	2
4.	Bestem slutværdi	2

Kapitalformlen

5.	Oplæg til kapitalformlen	3
6.	Kapitalformlen	4
7.	Kapitalformlen, K ukendt	5
8.	Kapitalformlen, K_0 ukendt	5
9.	Kapitalformlen, n ukendt	6
10.	Kapitalformlen, p ukendt	6

11.	Annuitets-opsparing	7
-----	---------------------------	---

12.	Annuitets-lån	9
-----	---------------------	---

Procent-ændring

1. Formler til opgaver med procent-ændring

I formelsamlingen står formlerne

$$\begin{array}{ll} \mathbf{2a} & S = B \cdot (1+r) & B = \text{Begyndelsesværdi} \\ \mathbf{2b} & r = \frac{S}{B} - 1 & S = \text{Slutværdi} \\ \mathbf{2c} & r = \frac{p}{100} & r = \text{Vækstrate} \\ \mathbf{2d} & p\% = r \cdot 100\% & p = \text{Procentvis ændring} \end{array}$$

I **2a** erstatter vi r med højresiden af **2c** og får

$$\mathbf{2e} \quad S = B \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

I **2d** erstatter vi r med højresiden af **2b** og får

$$\mathbf{2f} \quad p\% = \left(\frac{S}{B} - 1\right) \cdot 100\%$$

2. Bestem procent-ændring

Opgave 2 Delprøve 2 **Mindstekravsopgave**

Efter en lovændring må en landmand ændre størrelsen på sin besætning af køer.

Antal køer før ændringen: 450

Antal køer efter ændringen: 280

Bestem den procentvise ændring af antal køer.

Besvarelse af opgave

Før er antal (begyndelsesværdi) = 450

Efter er antal (slutværdi) = 280

Vi indsætter disse tal i formlen

$$p\% = \left(\frac{S}{B} - 1\right) \cdot 100\% \quad p = \text{Procentvis ændring} \quad S = \text{Slutværdi} \quad B = \text{Begyndelsesværdi}$$

Så får vi

$$p\% = \left(\frac{280}{450} - 1\right) \cdot 100\%$$

$$p\% = \left(\frac{280}{450} - 1\right) \cdot 100 = -37.7778\% \approx -38\%$$

Den procentvise ændring af antallet er **-38 %**

dvs. antallet er faldet med 38 % .

Dette er formel **2f** fra ramme 1.

Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

Vi klikker i matematikfeltet og taster Cmd/Ctrl Enter.

Derefter tilføjer vi $\approx -38\%$

3. Bestem begyndelsesværdi

Opgave 3 Delprøve 2 **Mindstekravsopgave**

Ved en udvidelse øges antallet af ansatte med 8 % så antallet kommer op på 431.

Hvor mange ansatte var der før udvidelsen?

Besvarelse af opgave 3

Ved en udvidelse øges antal ansatte med 8 % så antal ansatte kom op på 431.

Vi bestemmer hvor mange ansatte der var før udvidelsen.

Vi indsætter disse tal i formlen

Dette er formel 2e fra ramme 1.

$$S = B \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

p = Procentvis ændring S =Slutværdi B =Begyndelsesværdi

Så får vi

$$431 = B \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)$$

Nspire løser ovenstående ligning mht. B og får $B = 399.074 \approx 399$

$$\text{solve}\left(431=b \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right), b\right) \rightarrow b=399.074$$

Antal ansatte før udvidelsen var **399**.

4. Bestem slutværdi

Opgave 4 Delprøve 2 **Mindstekravsopgave**

I 2015 var boligens pris 235000 kr.

I 2016 var prisen 12 % mindre.

Bestem prisen i 2016.

Besvarelse af opgave 4

I 2015 var boligens pris 235000 kr. I 2016 var prisen 12 % mindre.

Vi bestemmer prisen i 2016.

Vi indsætter tallene i formlen

Dette er formel 2e fra ramme 1.

$$S = B \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

S =Slutværdi B =Begyndelsesværdi p =procentændring

$$S = 235000 \cdot \left(1 + \frac{-12}{100}\right) = 206800$$

Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

$$S = 206800.$$

Dvs. prisen i 2016 var **206800** kr.

Kapitalformlen

5. Oplæg til kapitalformlen

Et beløb indsættes i banken

Vi sætter 34 000 kr. i banken.

Hvert år får vi en rente på 5,8 % af det beløb der står.

Beløbet efter 1 år

For at finde beløbet efter 1 år bruger vi formel **2e** :

$$S = B \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Vi indsætter tallene i denne formel og får

$$S = 34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right) \quad \text{Dette er beløbets størrelse efter 1 år.}$$

Beløbet efter 2 år

Næste år får vi renter af beløbet $34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)$.

Vi indsætter dette beløb på B 's plads i formlen

$$S = B \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)$$

og får

$$S = 34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)$$

Dette kan kort skrives

$$S = 34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)^2 \quad \text{Dette er beløbets størrelse efter 2 år.}$$

Beløbet efter 3 år

Næste år får vi renter af beløbet $34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)^2$.

Vi indsætter dette beløb på B 's plads i formlen

$$S = B \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)$$

og får

$$S = 34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)$$

Dette kan kort skrives

$$S = 34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)^3 \quad \text{Dette er beløbets størrelse efter 3 år.}$$

Kapitalformlen

Hvis beløbet vi indsætter i starten i stedet er K_0 og renteprocenten i stedet er p % , så ser vi at beløbet efter n år er:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

6. Kapitalformlen

I formelsamlingen står formlerne

$$6a \quad K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$K_0 =$ StartKapital

$K =$ Kapital efter n terminer

$$6b \quad r = \frac{p}{100}$$

$p\% =$ Rente pr. termin

En **termin** er tidsrummet mellem to rentetilskrivninger.

I **6a** erstatter vi r med højresiden af **6b** og får

$$6c \quad K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad \text{Dette er **kapitalformlen**. Dette navn kan også bruges om **6a** .}$$

Tidligere var der kun én renteformel i pensum. Dengang blev **6c** og **6a** kaldt renteformlen.

6d. Fire opgavetyper

I kapitalformlen kan hvert af tallene n , r , K_0 og K være ukendt.

Det ukendte af disse tal kan vi udregne når vi kender de tre andre.

Dvs, **der er fire typer opgaver med kapitalformlen.**

6e. Beløbet på kontoen vokser eksponentielt

Hvis vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8 % , så følger af kapitalformlen at kapitalen K efter n år er

$$K = 34000 \cdot \left(1 + \frac{5,8}{100}\right)^n$$

Dvs.

$$K = 34000 \cdot 1,058^n$$

Denne sammenhæng er eksponentiel, dvs. af typen

$$y = b \cdot a^x$$

Vi har blot brugt K og n i stedet for y og x , så beløbet på kontoen vokser eksponentielt.

7. Kapitalformlen, K ukendt

50 000 kr. indsættes på en konto.

Årlig rente er 1,3 % .

Vi bestemmer hvor stort et beløb der står på kontoen efter 6 år.

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$K = 50000 \cdot \left(1 + \frac{1.3}{100}\right)^6 = 54029.$$

Efter 6 år står der **54029 kr.** på kontoen.

8. Kapitalformlen, K_0 ukendt

Et beløb indsættes på en konto.

Årlig rente er 2,2 % .

Efter 9 år står der 17029 kr.

Vi bestemmer hvor stort et beløb der blev indsat på kontoen.

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Nspire løser

$$17029 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{2.2}{100}\right)^9$$

mht. K_0 og får 14000.1 .

$$\text{solve}\left(17029 = k_0 \cdot \left(1 + \frac{2.2}{100}\right)^9, k_0\right) \rightarrow k_0 = 14000.1$$

Der blev indsat **14000 kr.** på kontoen .

9. Kapitalformlen, n ukendt

30 000 kr. indsættes på en konto.

Årlig rente er 2,7 % .

Vi bestemmer hvor mange år der går før beløbet kommer over 35 000.

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Nspire løser

$$35000 = 30000 \cdot \left(1 + \frac{2.7}{100}\right)^n$$

mht. n og får $n = 5.78602$

$$\text{solve}\left(35000 = 30000 \cdot \left(1 + \frac{2.7}{100}\right)^n, n\right) \rightarrow n = 5.78602$$

Der går 6 år før beløbet kommer over 35 000 kr.

10. Kapitalformlen, p ukendt

Beløbet på en på en konto stiger på 8 år fra 15642 kr. til 18984 kr.

Vi bestemmer den årlige procentvise rente.

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Nspire løser

$$18984 = 15642 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$$

mht. p og får $p = 2.44999 \approx 2,45$

$$\text{solve}\left(18984 = 15642 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8, p\right) | p > 0 \rightarrow p = 2.44999$$

Den årlige procentvise rente er 2,45 % .

11. Annuitets-opsparing

Dette er kun mundtligt pensum

I en opsparing af denne type skal man på sin konto

indbetale samme beløb hver termin.

Eksempel på Annuitets-opsparing

Renteprocent = 14 %

Indbetaling hvert år = 2000 kr.

Om 0 år (nu)

Ydelse (indbetaling dette år):

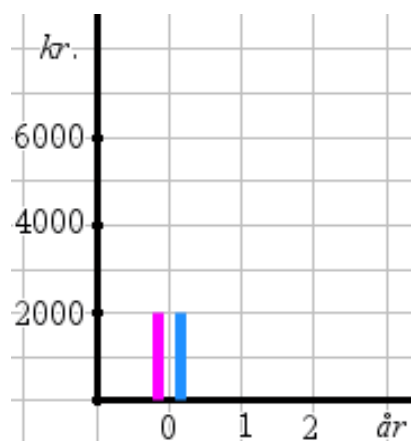
2000

Rente:

0

Værdi (beløbet der står på kontoen):

2000



Søjlerne ved 0 år:

Den højre er det der indsættes på kontoen.

Den venstre er det der herefter står på kontoen.

Om 1 år

Ydelse (indbetaling dette år):

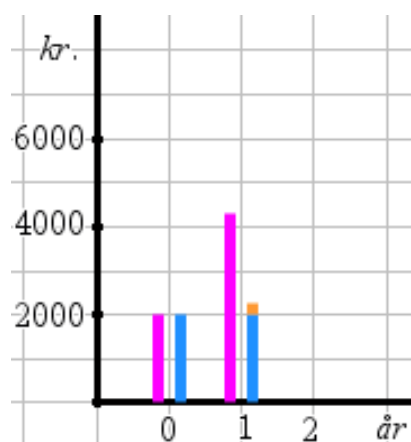
2000

Rente (beløb banken betaler for at have lånt 2000 kr. i et år):

$2000 \cdot 0,14 = 280$

Værdi (beløbet der står på kontoen):

$2000 + 2000 + 280 = 4280$



Søjlerne ved 1 år:

Den højre er det der indsættes på kontoen.

Den venstre er det der herefter står på kontoen.

Om 2 år

Ydelse (indbetaling dette år):

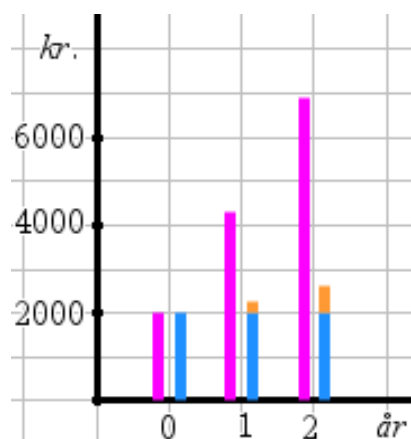
2000

Rente (beløb banken betaler for at have lånt 4280 kr. i et år):

$$4280 \cdot 0,14 = 599,2$$

Værdi (beløbet der står på kontoen):

$$4280 + 2000 + 599,2 = 6879,2$$



Søjlerne ved 2 år:

Den højre er det der indsættes på kontoen.

Den venstre er det der herefter står på kontoen.

Beregning af værdien efter n år af en annuitets-opsparing

Formlen for annuitets-opsparing:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{hvor} \quad r = \frac{p}{100}$$

og

b = termins-indbetalingen (det beløb der indbetales hver termin)

r = rentefoden, dvs. $r = \frac{p}{100}$ hvor p er renteprocenten

n = antal indbetalinger

A = værdien efter sidste indbetaling (det der står på kontoen efter sidste indbetaling).

12. Annuitets-lån

Dette er kun mundtligt pensum

I et lån af denne type
betaler man lånet tilbage ved at
betale samme beløb hver termin
indtil lånet er betalt.

Eksempel på Gælds-annuitet

renteprøcent:=18%
Nu låner vi 9000 kr.
Samlet betaling hvert år: 4139,31

Om 0 år (nu)

Ydelse (samlet betaling dette år):

0

Rente:

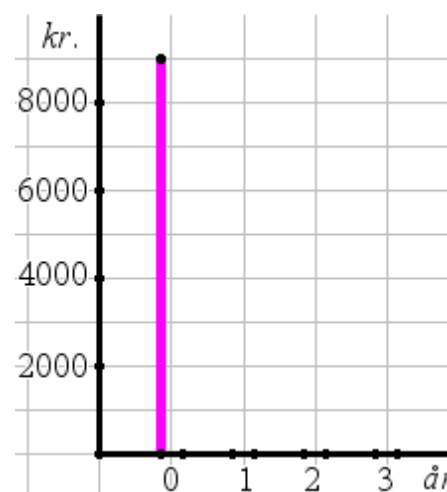
0

Afdrag (tilbagebetaling):

0

Restgæld (det beløb som man nu skylder):

9000



Søjlerne ved 0 år:

Den venstre er vores gæld.

Den højre (højde 0) er det vi betaler.

Om 1 år

Ydelse (samlet betaling dette år):

4139,31

Rente (beløb der betales for at have lånt 9000 kr. i et år):

$$9000 \cdot 0,18 = 1620$$

Afdrag (tilbagebetaling):

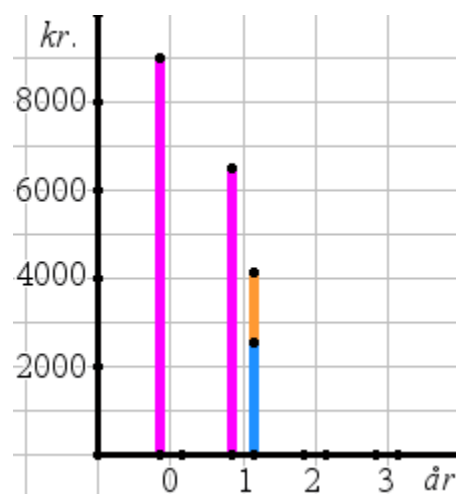
$$4139,31 - 1620 = 2519,31$$

Den del af ydelsen der ikke er rente, er afdrag på lånet, så man nu skylder 2519,31 kr. mindre end sidste år.

Restgæld (det beløb som man nu skylder):

$$9000 - 2519,31 = 6480,69$$

Forskellen på de to røde søjler er lig den blå søjle.



Søjlerne ved 1 år:

Den venstre er vores gæld.

Den højre er det vi betaler.

Om 2 år

Ydelse (samlet betaling dette år):

4139,31

Rente (beløb der betales for at have lånt restgælden 6480 kr. i et år):

$$6480,69 \cdot 0,18 = 1166,52$$

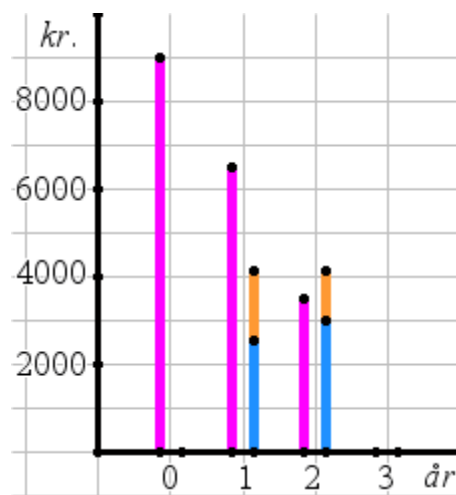
Afdrag (tilbagebetaling):

$$4139,31 - 1166,52 = 2972,79$$

Den del af ydelsen der ikke er rente, er afdrag på lånet, så man nu skylder 2972,79 kr mindre end sidste år.

Restgæld (det beløb som man nu skylder):

$$6480,69 - 2972,79 = 3507,9$$



Søjlerne ved 2 år:

Den venstre er vores gæld.

Den højre er det vi betaler.

Om 3 år

Ydelse (samlet betaling dette år):

4139,31

Rente (beløb der betales for at have lånt restgælden 3507,9 kr. i et år):

$$3507,9 \cdot 0,18 = 631,42$$

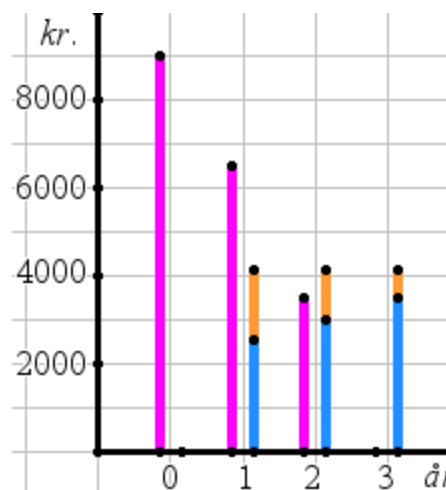
Afdrag (tilbagebetaling):

$$4139,31 - 631,42 = 3507,8979$$

Den del af ydelsen der ikke er rente, er afdrag på lånet, så man nu skylder 2972,79 kr mindre end sidste år.

Restgæld (det beløb som man nu skylder):

$$3507,90 - 3507,89 = 0,01 \approx 0$$



Søjlerne ved 3 år:

Den venstre (højde 0) er vores gæld.

Den højre er det vi betaler.

Beregning af ydelsen i et annuitetslån

I eksemplet ovenfor passede det lige præcist at

når den årlige ydelse var 4139,31 kr.,

så

var restgælden 0 kr. efter 3 år.

Hvor stor ydelsen skal være, for at det passer, kan beregnes ved hjælp af **formlen for annuitets-lån**:

$$y = G \cdot \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \quad \text{hvor} \quad \frac{p}{100}$$

hvor

G = hovedstolen, dvs. det lånte beløb (start-Gælden)

r = rentefoden, dvs. $r = \frac{p}{100}$ hvor p er renteprocenten

n = antal terminsydelser

y = terminsydelsen

A	
annuitets-lån	9, 11
annuitets-opsparing	7, 8
B	
begyndelsesværdi	1, 2, 5
K	
kapitalformlen	3, 4, 5, 6

P	
procentvis ændring.....	1, 2, 5
S	
slutværdi.....	1, 2
V	
vækstrate	1, 2