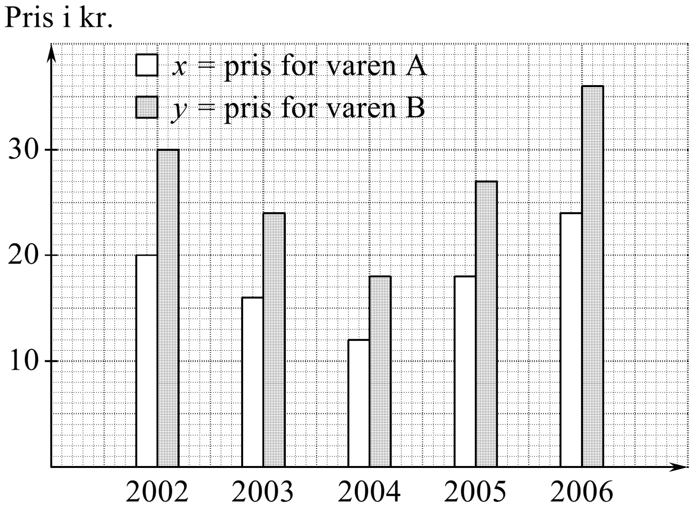
Potens-sammenhænge

inkl. proportionale og
omvendt proportionale variable



2010 Karsten Juul

Dette hæfte er en fortsættelse af hæftet "Eksponentielle sammenhænge, udgave 2".

Indhold

Potenssammenhænge inkl. proportionale og omvendt proportionale variable

2. udgave 2010

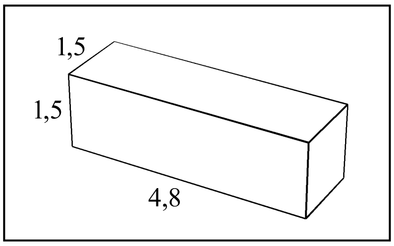
1. Hvad er en potenssammenhæng?

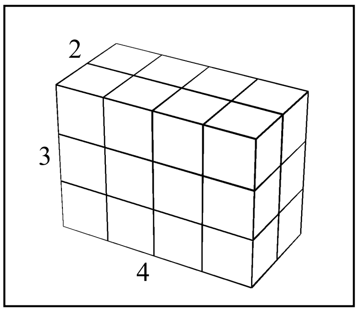
Øvelse 1.1

På lommeregner eller computer (med matematikprogram) kan vi taste en potens ved hjælp af ∧ eller potensskabelon.

$3{,}1^2 =$ ________ $2^{2{,}1} =$ ________ $9^{0{,}5} =$ ________ $4^{-1} =$ ________

Øvelse 1.2





Vi kan udregne rumfanget af en kasse ved at bruge reglen

rumfang = længde · bredde · højde

For kassen til højre er

(a) rumfang = ________ · ________ · ________ = ________

For kassen til venstre er

(b) rumfang = ________ · ________ · ________ = ________

Vi har nogle kasser hvor grundfladen er et kvadrat. Højden er 4 gange siden i grundfladen.

(c) Når siden i grundfladen er 2, er rumfang = ___ · ___ · ___ · ___ = ______

(d) Når siden i grundfladen er 5, er rumfang = ___ · ___ · ___ · ___ = ______

(e) Når siden i grundfladen er x, er rumfang = ___ · ___ · ___ · ___ = ______

(f) Udfyld tabellen:

x	1	2	3	4
$4\cdot x^3$				

En bestemt type orm vokser sådan at når tykkelsen er 1, er rumfanget 4.
Hvis denne orm <u>bevarer sin facon</u> når den vokser, så vil der gælde:

når tykkelsen er x, så er rumfanget $4\cdot x^3$,

men det viser sig at ormen efterhånden <u>får en mere aflang facon</u>. Man har målt følgende længder og rumfang (med en passende enhed):

x	1	2	3	4	⟵ længde
$4\cdot x^{\square}$	4	28	87	194	⟵ rumfang

(g) Prøv dig frem med andre eksponenter end 3, og find en eksponent som passer med de målte tal (tallene er afrundet til hele tal). Eksponenten skal være ______ .

(h) Når $x =$ tykkelse og $y =$ rumfang, er $y = b\cdot x^a$ hvor $a =$ ______ og $b =$ ______ .

Øvelse 1.3

Vi har 600 kr. til at købe bær.

(a) Hvis prisen pr. kg er 24 kr., så kan vi købe ______ kg.

(b) Hvis prisen pr. kg er 30 kr., så kan vi købe ______ kg.

(c) Hvis prisen pr. kg er x kr., så kan vi købe ______ kg.

(d) Udfyld tabellen:

x	24	25	30	31,25
$\frac{600}{x}$				

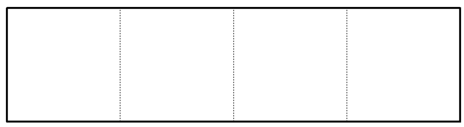
(e) Udfyld tabellen:

x	24	25	30	31,25
$600 \cdot x^{-1}$				

(f) Når $x =$ kg-pris og $y =$ antal kg vi kan købe, er $y = b \cdot x^a$ hvor $a =$ ______ og $b =$ ______ .

Øvelse 1.4

Et rektangel på en skærm har den egenskab at når vi ændrer dets størrelse, så vedbliver bredden at være 4 gange højden. Rektanglet kan altså deles op i 4 kvadrater hvis side er højden i rektanglet.



(a) Når rektanglets arealet er 4, så er højden ______ .

(b) Når rektanglets arealet er 16, så er højden ______ .

(c) Når rektanglets arealet er 36, så er højden ______ .

(d) Når $x = 4$, så er $0{,}5 \cdot x^{0{,}5}$ = ______ .

(e) Når $x = 16$, så er $0{,}5 \cdot x^{0{,}5}$ = ______ .

(f) Når $x = 36$, så er $0{,}5 \cdot x^{0{,}5}$ = ______ .

(g) Der gælder $y = 0.5 \cdot x^{0{,}5}$ hvor x = rektanglets ______________________
og y = rektanglets ________________________ .

(h) $y = b \cdot x^a$ hvor $a =$ ______ og $b =$ ______ .

DEFINITION 1.5 *Hvad er en potenssammenhæng?*

Vi kalder en sammenhæng for en potenssammenhæng hvis vi kan beskrive den med en ligning som vi kan få ved at indsætte bestemte tal for a og b i ligningen

(1) $y = b \cdot x^a$

hvor b skal være positiv.

Bemærkning 1.6

I øvelse 1.2-1.4 er der fire eksempler på anvendelse af potenssammenhænge.

Eksempel 1.7

Spørgsmål: Ligningen

(2) $y \; = \; x^{2,6} \cdot 1{,}4$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = b \cdot x^a$ for at få sammenhængen (2)?

Svar: Vi skal sætte

$\underline{\underline{a = 2{,}6}}$ og $\underline{\underline{b = 1{,}4}}$

for når vi gør det, får vi ligningen

$y = 1{,}4 \cdot x^{2,6}$

som kan omskrives til ligningen (2).

Bemærkning: Ovenfor viste vi at ligningen (2) kan fås ved at sætte bestemte tal ind for a og b i ligning (1) i definition 1.5, dvs. vi viste at (2) er en potenssammenhæng.

Øvelse 1.8

Hver af følgende sammenhænge kan vi få ved at sætte tal ind for a og b i ligningen $y = b \cdot x^a$.
Angiv i hvert tilfælde hvad der skal indsættes for a og b.

(1) $y = 4 \cdot x^3$ (2) $y = x^4 \cdot 3$ (3) $y = x^{0,4}$ (4) $y = 3x$.

Eksempel 1.9

Spørgsmål: Et kvadratisk område dækkes med kvadratiske kakler der hver vejer 238 enheder.

(a) Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 2 kakler bredt (og højt)?

(b) Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 3 kakler bredt?

(c) Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 8 kakler bredt?

(d) Opskriv en ligning til beregning af vægten y når bredden x er kendt.

Svar: (a) $238 \cdot 2^2$.

(b) $238 \cdot 3^2$.

(c) $238 \cdot 8^2$.

(d) $y \; = \; 238 \cdot x^2$.

Bemærkning: Sammenhængen $y \; = \; 238 \cdot x^2$ er en potenssammenhæng. Dette følger af definition 1.5 da vi får ligningen $y \; = \; 238 \cdot x^2$ når vi i $y = b \cdot x^a$ indsætter $a = 2$ og $b = 238$.

Eksempel 1.10

Spørgsmålene drejer sig om sammenhængen fra eksempel 1.9, altså

$$y \;=\; 238\cdot x^2$$

hvor y er vægten af kaklerne (i en passende enhed) og x er områdets bredde (målt i antal kakler).

Spørgsmål:
(a) Hvad er vægten når bredden er t ?
(b) Hvad er vægten når bredden er $2\cdot t$?
(c) Hvad skal vi gange facit i (a) med for at få facit i (b) ?

Svar:
(a) Når bredden er t, er vægten $y = \underline{\underline{238\cdot t^2}}$.

(b) Vi får Nspire til at udregne $238\cdot x^2$ når x er $2\cdot t$ og får:

Når bredden er $2\cdot t$, er vægten $y = \underline{\underline{952\cdot t^2}}$.

(c) $\dfrac{952\cdot t^2}{238\cdot t^2} \;=\; 4$, så vi skal gange facit i (a) med 4 for at få facit i (b),

dvs. vægten firedobles når bredden fordobles.

$238\cdot x^2 \vert x=t$	$238\cdot t^2$
$238\cdot x^2 \vert x=2\cdot t$	$952\cdot t^2$
$\dfrac{952\cdot t^2}{238\cdot t^2}$	4

Bemærkning: Når bredden er $2\cdot t$, er vægten $y = 238\cdot(2\cdot t)^2 = 238\cdot 2^2\cdot t^2 = \underline{\underline{238\cdot t^2\cdot 4}}$.

Øvelse 1.11

Om nogle kasser gælder:

Bredden er 3 gange højden.
Længden er 5 gange højden.

(a) Når højden er 2, hvad er så bredden? og længden? og rumfanget?
(b) Opskriv en ligning til beregning af rumfanget y når højden x er kendt.
(c) Når højden er t, hvad er så rumfanget?
(d) Når højden er $2\cdot t$, hvad er så rumfanget?
(e) Hvad sker der med rumfanget når højden fordobles?

2. Hvordan ser grafen ud for en potenssammenhæng?

Eksempel 2.1:

Spørgsmål: Følgende tre sammenhænge er alle potenssammenhænge (ifølge definition 1.5).

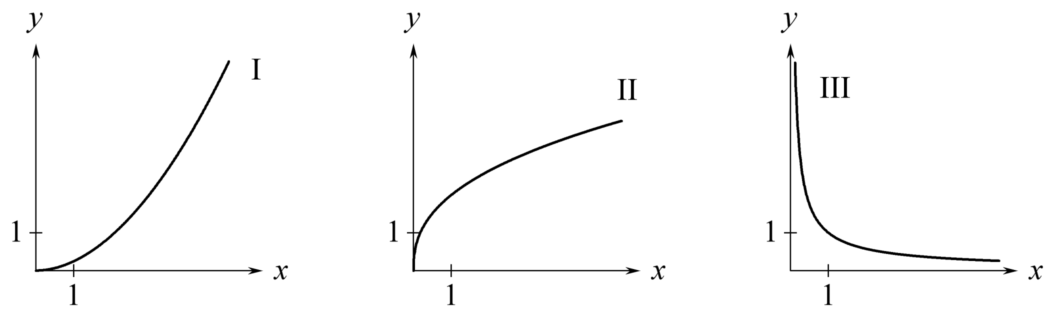
I: $y = 0{,}25 \cdot x^{1{,}9}$

II: $y = 2 \cdot x^{0{,}4}$

III: $y = x^{-0.8}$

Tegn graferne for de tre sammenhænge.

Svar: Ved hjælp af et elektronisk hjælpemiddel eller ved at udregne støttepunkter kan vi tegne graferne.



Bemærkning: Af graferne ses at

de to sammenhænge hvor a er positiv, er voksende,

og

den sammenhæng hvor a er negativ, er aftagende.

SÆTNING 2.2 *Eksponenten fortæller om en potenssammenhæng er voksende eller aftagende.*

En potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ er

aftagende hvis a er negativ

og

voksende hvis a er positiv.

Øvelse 2.3

(a) Sammenhængen $y = 15 \cdot x^2$ er *voksende* da *da eksponenten 2 er er positiv* .

(b) Sammenhængen $y = 3 \cdot x^{0{,}2}$ er ____________ da ____________________ .

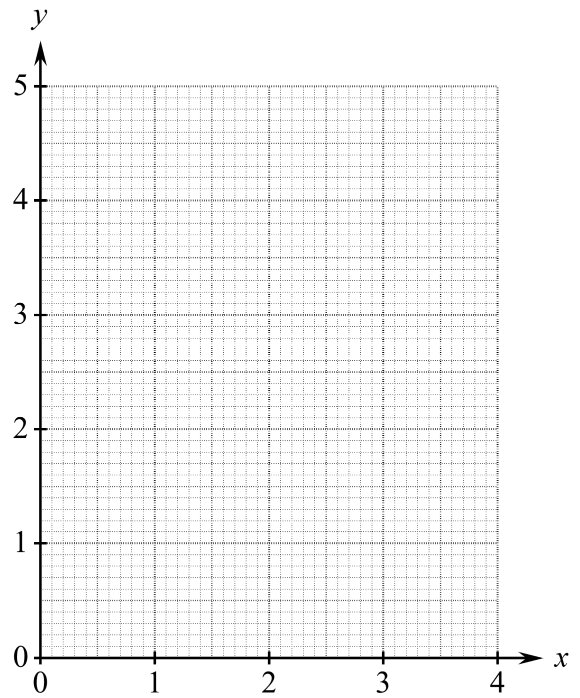
(c) Sammenhængen $y = 2 \cdot x^{-4}$ er ____________ da ____________________ .

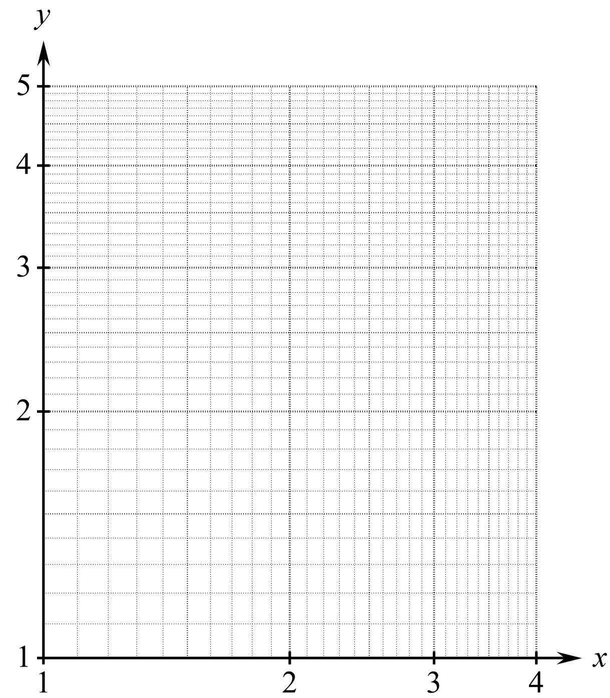
(d) Sammenhængen $y = x^{-0{,}11}$ er ____________ da ____________________ .

(e) Sammenhængen $y = 0{,}1 \cdot x^8$ er ____________ da ____________________ .

Eksempel 2.4 Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

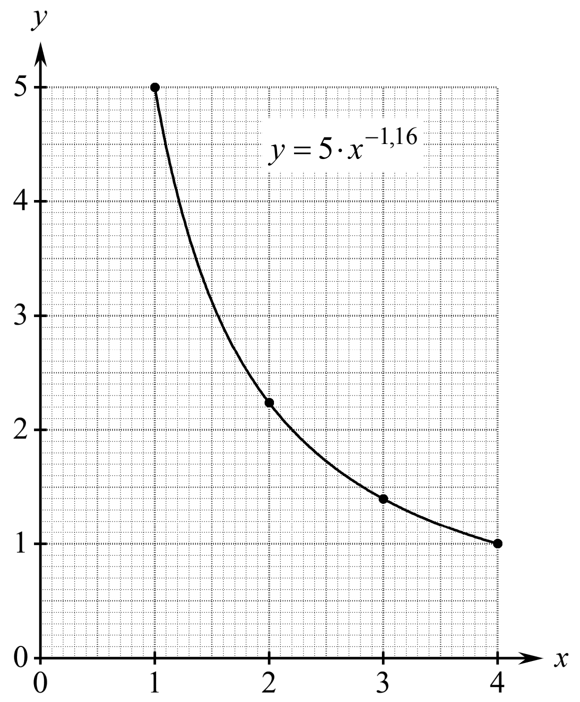
I koordinatsystemet nedenfor til højre er hver af akserne en speciel type der kaldes en logaritmisk akse. Et koordinatsystem kaldes et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem hvis begge akser er logaritmiske.

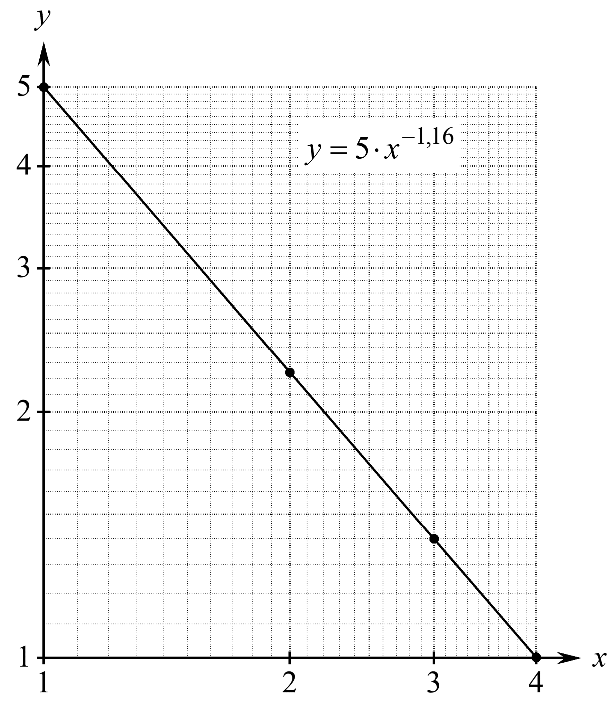




Spørgsmål: Tegn grafen for sammenhængen $y = 5 \cdot x^{-1,16}$ i begge koordinatsystemerne ovenfor.

Svar: Vi udregner nogle støttepunkter og afsætter de fundne punkter i begge koordinatsystemer.





SÆTNING 2.5

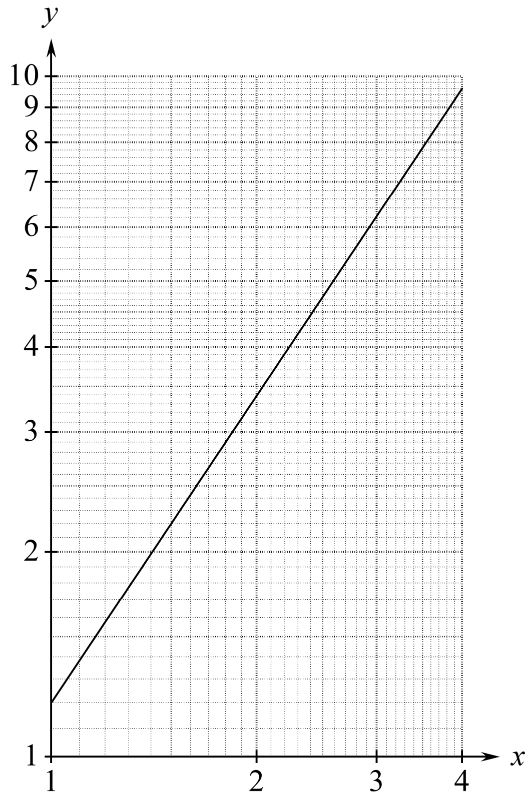
Grafen for en potenssammenhæng er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bemærkning 2.6

Når vi ser koordinatsystemer i aviser, tidsskrifter og lærebøger i forskellige fag, skal vi se efter om akserne er sædvanlige, så vi ikke tror at en sammenhæng er lineær når grafen er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk (eller enkeltlogaritmisk) koordinatsystem.

Øvelse 2.7

Grafen viser sammenhængen mellem to variable x og y. Der er tale om en potenssammenhæng. I et sædvanligt koordinatsystem ville grafen være en krum kurve.



(a) Når $x = 1$, er $y =$ _________ .

(b) Når $x = 2$, er $y =$ _________ .

(c) Når x ændres fra 1 til 2, så vil y blive _________ enheder større.

(d) Når x ændres fra 2 til 3, så vil y blive _________ enheder større.

(e) Når x ændres fra 3 til 4, så vil y blive _________ enheder større.

3. Opgaver hvor vi skal udregne x eller y i $y = b \cdot x^a$

Eksempel 3.1

For nogle dyr gælder

(1) $\quad y = 0{,}24 \cdot x^{2{,}8}$

hvor y er vægten, målt i gram, og x er længden, målt i cm.

Spørgsmål (a): Hvad er vægten af et dyr hvis længde er 3 cm?

Spørgsmål (b): Hvad er længden af et dyr hvis vægt er 0,5 g?

Svar på (a): Under ligningen (1) står at x er længden, så da det oplyste tal 3 er længden, skal 3 indsættes på x's plads:

$$y = 0{,}24 \cdot 3^{2{,}8}$$

Ved at udregne dette får vi

$$y = 5{,}2$$

Under ligningen (1) står at y er vægten, så

et 3 cm langt dyr vejer $\underline{\underline{5{,}2 \text{ g}}}$.

Svar på (b): Uden solve

Under ligningen (1) står at y er vægten, så da det oplyste tal 0,5 er vægten, skal 0,5 indsættes på y's plads:

$$0{,}5 = 0{,}24 \cdot x^{2{,}8}$$

For at løse denne ligning mht. x starter vi med at dividere begge sider med 0,24:

$$\frac{0{,}5}{0{,}24} = \frac{0{,}24 \cdot x^{2{,}8}}{0{,}24}$$

Vi forkorter brøken på højre side og får

$$\frac{0{,}5}{0{,}24} = x^{2{,}8}$$

Denne ligning har løsningen

$$x = \sqrt[2{,}8]{\frac{0{,}5}{0{,}24}}$$

Ved at udregne dette får vi

$$x = 1{,}3$$

Under ligningen (1) står at x er længden, så

et dyr hvis vægt er 0,5 g , har længden $\underline{\underline{1{,}3 \text{ cm}}}$.

Svar på (b): Med solve

Se næste side!

Svar på (b): Med solve

Under ligningen (1) står at y er vægten, så da det oplyste tal 0,5 er vægten, skal 0,5 indsættes på y's plads:

$$0{,}5 = 0{,}24 \cdot x^{2{,}8}$$

Vi får Nspire til at løse denne ligning mht. x og får

$$x = 1{,}2997 \ .$$

Under ligningen (1) står at x er længden, så

et dyr hvis vægt er 0,5 g , har længden $\underline{\underline{1{,}3\text{ cm}}}$.

solve$(0.5=0.24\cdot x^{2.8},x)$	$x=1.2997$

Øvelse 3.2

Antallet af dyr i en indhegning afhænger af dyrenes længde. Der gælder

$$y = 5800 \cdot x^{-2{,}3}$$

hvor y er antal dyr i indhegningen, og x er dyrenes længde, målt i cm.

(a) Hvor mange dyr er der i indhegningen, hvis dyrenes længde er 6 cm?

(b) Hvad er dyrenes længde når der er 19 dyr i indhegningen?

Øvelse 3.3

Sammenhængen mellem tykkelse og længde for visse stængler kan beskrives ved ligningen

$$y = 13 \cdot x^{0{,}72}$$

hvor y er længden i cm, og x er tykkelsen i mm.

Hvor tyk er en 100 cm lang stængel?

Øvelse 3.4

Prisen for nogle figurer er fastlagt ved

$$y = 20 \cdot x^{3{,}5}$$

hvor y er prisen i kr. og x er højden i cm.

En gul figur er 3 cm høj, en rød figur er 5 cm høj, og en blå figur er 7 cm høj.

(a) Hvor mange kroner er den røde dyrere end den gule?

(b) Hvor mange kroner er den blå dyrere end den røde?

(c) Hvor mange procent er den røde dyrere end den gule?

(d) Hvor mange procent er den blå dyrere end den røde?

4. Hvordan kan vi udregne ændringer i y og x for en potenssammenhæng?

Eksempel 4.1

For en bestemt bolig kan vi udregne det årlige varmetab gennem loftet ved hjælp af ligningen

$$y = 5400 \cdot x^{-0,75}$$

hvor y er varmetabet i kWh og x er tykkelsen i cm af isoleringen.

Spørgsmål (a): Nu er tykkelsen 10 cm. Hvor mange procent vil varmetabet nedsættes hvis tykkelsen øges med 85 %?

Spørgsmål (b): Nu er tykkelsen 8 cm. Hvor mange procent skal tykkelsen øges for at varmetabet bliver nedsat med 37 %?

Svar på (a): Det tal der er 85 % større end 10 , er

$$10 \cdot 1,85 = \underline{18,5}$$

Det tal der er 85 % større end 10, er det tal der er 185 % af 10, dvs. det tal der er 1,85 gange 10.

Når $x = 10$ er $y = 5400 \cdot 10^{-0,75} = \underline{960,27}$.

Når $x = 18,5$ er $y = 5400 \cdot 18,5^{-0,75} = \underline{605,36}$.

$$\xrightarrow{+85\%}$$

x	10	18,5
y	960,27	605,36

$$\xrightarrow[-37\%]{}$$

Vi udregner hvor mange procent y er blevet ændret:

$$\frac{605,36 - 960,27}{960,27} = -0,36959 \approx -37\%$$

Varmetabet $\underline{\underline{\text{nedsættes } 37\%}}$ når tykkelsen på 10 cm øges med 85 %.

Svar på (b): Når $x = 8$ er $y = 5400 \cdot 8^{-0,75} = \underline{1135,21}$.

Det tal der er 37 % mindre end 1135,21 , er

$$1135,21 \cdot 0,63 = \underline{715,18}$$

Et tal er 37 % mindre end et andet hvis det er 63 % af det andet.

Vi finder nu ud af hvad x er, når y er 715,18:

Vi løser ligningen $715,18 = 5400 \cdot x^{-0,75}$

og får $x = \underline{14,81}$.

$$\xrightarrow{+85\%}$$

x	8	14,81
y	1135,21	715,18

$$\xrightarrow[-37\%]{}$$

Vi udregner hvor mange procent x er blevet ændret:

$$\frac{14,81 - 8}{8} = 0,85125 \approx 85\% .$$

Når tykkelsen på 8 cm $\underline{\underline{\text{øges } 85\%}}$, så nedsættes varmetabet 37 %.

Bemærkning: Af svarene på de to spørgsmål ser vi at uanset om tykkelsen er 8 cm eller 10 cm, gælder:

Når tykkelsen øges 85 % , så nedsættes varmetabet 37 %.

Dette kan også udtrykkes sådan:

Når tykkelsen ganges med 1,85 , så ganges varmetabet med 0,63 .

Øvelse 4.2

Et dyr vokser sådan at

$$y = 2{,}7 \cdot x^{1{,}6}$$

hvor y er vægten i gram, og x er længden i cm.

(a) Længden blev målt tre gange. Første gang var længden 2 cm, og anden gang var længden 3 cm. Hvad var vægten da dyrets længde første gang blev målt, og hvad var vægten anden gang.

(b) Hvor mange procent er længden vokset fra første til anden måling, og hvor mange procent er vægten vokset i samme periode?

(c) Fra anden til tredje måling er vægten vokset 30%. Hvor mange procent er længden vokset i samme periode?

Eksempel 4.3 *Bevis for 4.4*

I denne opgave står både *a*, *b, k* og *t* for tal som endnu ikke er oplyst.

Ligningen

(1) $\quad y = b \cdot x^a$

viser sammenhængen mellem to variable *y* og *x*.

Spørgsmål: Hvilken ændring sker i værdien af y, når x ændrer værdi fra t til $t \cdot k$?

Svar: Når $x = t$ er $y = b \cdot t^a$

Når $x = t \cdot k$ er $y = b \cdot (t \cdot k)^a = b \cdot t^a \cdot k^a$

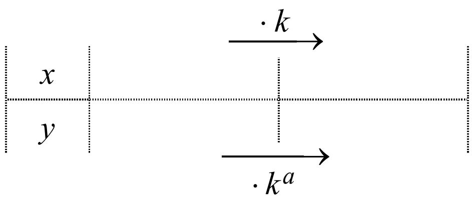
Af potensregel får vi
$(t \cdot k)^a = t^a \cdot k^a$

Vi ser at når værdien af *x* ændres fra t til $t \cdot k$, så ændres værdien af y

fra $b \cdot t^a$ til $b \cdot t^a \cdot k^a$.

Dvs. værdien af y bliver ganget med k^a når værdien af x bliver ganget med *k*.

Bemærkning: Da *t* ikke indgår i svaret, gælder altså at ligegyldig hvilken værdi *x* starter med at have, så vil *y* blive ganget med k^a når *x* bliver ganget med k :



Hvis $a = 0{,}94$ og $k = 1{,}27$, er $k^a = 1{,}27^{0{,}94} = 1{,}252$ så

hver gang x bliver ganget med 1,27 , så bliver y ganget med 1,252

dvs.

hver gang x øges 27 % , så bliver y øget med 25,2 % .

Med udregningerne i svaret på opgave 4.3 har vi gjort rede for at følgende regel gælder:

SÆTNING 4.4

Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal *k*:

Hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver ganget med $\boldsymbol{k}$, så bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{k^a}$.

Eksempel 4.5

For en cylinder hvor højden er lig diameteren, gælder

$$y = \frac{\pi}{4} \cdot x^3$$

hvor y er rumfanget og x er diameteren.

Spørgsmål (a): Hvad sker der med rumfanget af sådan en cylinder når vi fordobler diameteren?

Spørgsmål (b): Hvor mange procent større bliver rumfanget når vi gør diameteren 20 % større?

Svar på (a): Når vi ganger x med 2, så vil y blive ganget med $2^3 = 8$ ifølge sætning 4.4 .

Dvs. $\underline{\underline{\text{rumfanget ottedobles}}}$ når vi fordobler diameteren.

Svar på (b): Vi skal gange diameteren med 1,20 for at øge den 20 %.

Når vi ganger x med $1{,}20$, så bliver y ganget med $1{,}20^3 = 1{,}728$ ifølge sætning 4.4 .

At y bliver ganget med $1{,}728$, er det samme som at y bliver 72,8 % større.

Dvs. rumfanget bliver $\underline{\underline{72{,}8\,\%}}$ større når vi gør diameteren 20 % større.

Øvelse 4.6

Hvis vi sætter en vares pris op, så sælger vi mindre af den. For en bestemt vare gælder

$$y = 946000 \cdot x^{-2{,}11} \quad , \quad 10 \le x \le 29$$

hvor y er det beløb vi sælger for på én dag, og x er prisen pr. pakke. (Enheden for x og y er kr.).

(a) Hvor mange procent falder det beløb vi sælger for på én dag, hvis vi sætter prisen 20 % op?

(b) Hvor mange procent falder det beløb vi sælger for på én dag, hvis vi sætter prisen 40 % op?

(c) Hvor mange procent falder det beløb vi sælger for på én dag, hvis vi sætter prisen op fra 10 kr. til 20 kr.?

Øvelse 4.7

Om nogle kasser gælder at højden er 2 gange bredden, og længden er 3 gange bredden.

(a) Hvis bredden er 5, hvad er så kassens overflade?

(b) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem overfladen y og bredden x .

(c) Hvad sker der med overfladen når bredden fordobles?

5. Proportionale variable

Øvelse 5.1

På figuren kan du se hvad x og y står for, og du kan aflæse priser.

(a) Vi udregner hvad vi i 2002 skal gange A's pris med for at få B's pris:
_______ **:** _______ = _______ .

(b) $20 \cdot$ (facit fra (a)) = _______ .

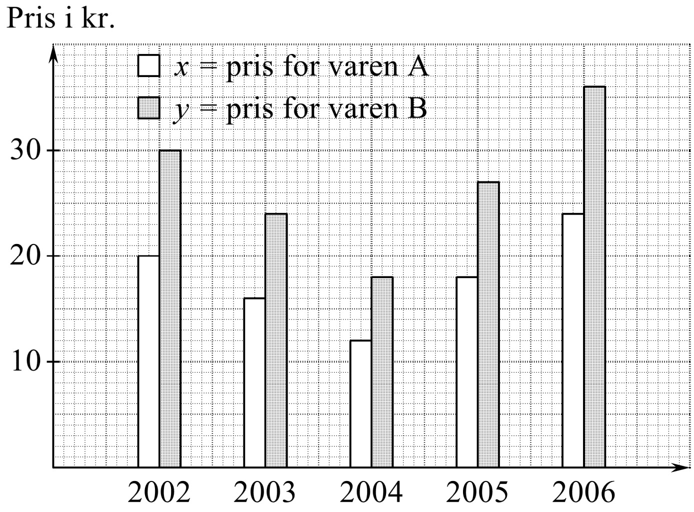
(c) I 2002 er $y =$ _______ $\cdot x$

(d) I 2003 er $y =$ _______ $\cdot x$

(e) I 2004 er $y =$ _______ $\cdot x$

(f) I 2005 er $y =$ _______ $\cdot x$

(g) I 2006 er $y =$ _______ $\cdot x$



Øvelse 5.2

(a) I 2002 er $x =$ _______

(b) I 2002 er $y =$ _______

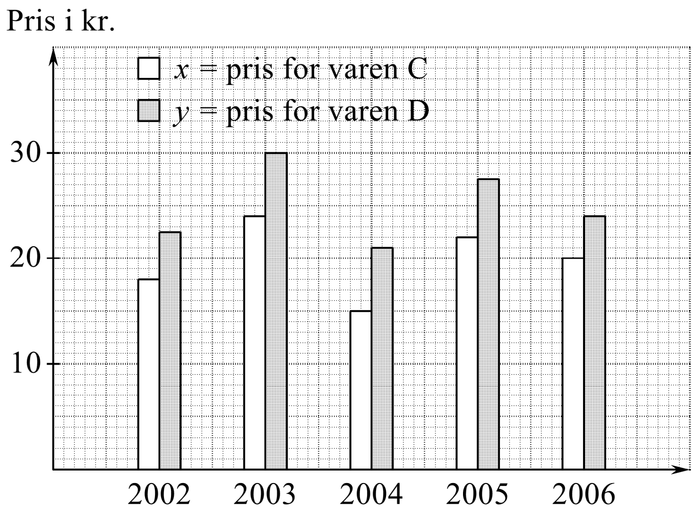
(c) I 2002 er $y =$ _______ $\cdot x$

(d) I 2003 er $y =$ _______ $\cdot x$

(e) I 2004 er $y =$ _______ $\cdot x$

(f) I 2005 er $y =$ _______ $\cdot x$

(g) I 2006 er $y =$ _______ $\cdot x$



DEFINITION 5.3 *Hvad er proportionale variable?*

Om to variable x og y siger vi at

y er proportional med x

hvis

$y = k \cdot x$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

Bemærkning 5.4

Rammen oplyser hvad ordet *proportional* betyder. En oplysning om hvad et bestemt ord skal betyde, kalder man en DEFINITION .

Øvelse 5.5

(a) Gælder for den viste årrække i øvelse 5.1 at y er proportionel med x? Svar: __________ .

(b) Begrundelse for svaret på (a): ____

____

Øvelse 5.6

(a) Gælder for den viste årrække i øvelse 5.2 at y er proportionel med x? Svar: __________ .

(b) Begrundelse for svaret på (a): ____

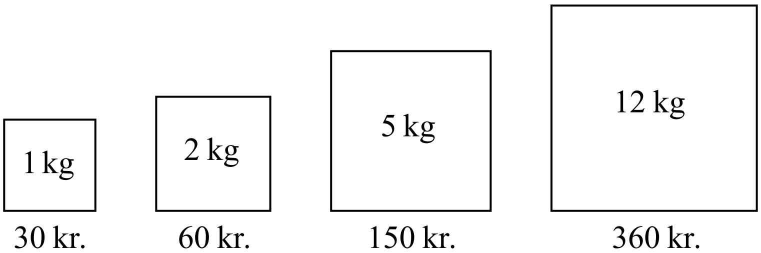
____

Øvelse 5.7

Sammenhængen mellem y og x i øvelse 5.1 kan beskrives med ligningen y = __________ .

Øvelse 5.8

En vare fås i pakker af forskellig størrelse. Figuren viser priserne.



(a) Undersøg om prisen er proportional med mængden.

(b) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem pris og mængde. Husk at ligningen ikke giver nogen mening hvis du glemmer at skrive nogle ord om hvad y og x står for.

Øvelse 5.9

De variable x og y er proportionale.

x	4	6	14	
y	10	15		45

Vis hvordan man kan udregne de manglende tal i tabellen.

Eksempel 5.10

Spørgsmål: Om to variable x og y er oplyst følgende:

x og y er proportionale .

Desuden er oplyst følgende sammenhørende værdier af x og y:

x	24	36	92
y	18	27	69

Hvad er y når x er 10 ?

Hvad er x når y er 15?

Svar: Bestemme k :

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

Vi starter med at finde ud af hvad k er for et tal. Så kan vi bruge dette tal til at besvare de to spørgsmål.

I tabellen ser vi at når $x = 24$ er $y = 18$. Dette indsætter vi i (1):

$$18 = 24 \cdot k$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 24:

$$\frac{18}{24} = \frac{24 \cdot k}{24}$$

Heraf får vi:

$$0{,}75 = k$$

Der gælder altså:

(2) $\underline{y = 0{,}75 \cdot x}$

Bestemme y :

For at finde y når x er 10, sætter vi x til 10 i (2):

$$y = 0{,}75 \cdot 10$$

Heraf får vi $y = 7{,}5$ så

y er $\underline{\underline{7{,}5}}$ når x er 10

Bestemme x :

For at finde x når y er 15, sætter vi y til 15 i (2):

$$15 = 0{,}75 \cdot x$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 0,75:

$$\frac{15}{0{,}75} = \frac{0{,}75 \cdot x}{0{,}75}$$

Heraf får vi $20 = x$ så

x er $\underline{\underline{20}}$ når y er 15

Øvelse 5.11

Om to proportionale variable x og y er oplyst at når x er 12, så er y lig 719,40.

(a) Hvad er y når x er 19?

(b) Hvad er x når y er 1858,48?

(c) Hvor mange enheder bliver y større når x ændres fra 12 til 13?

Øvelse 5.12

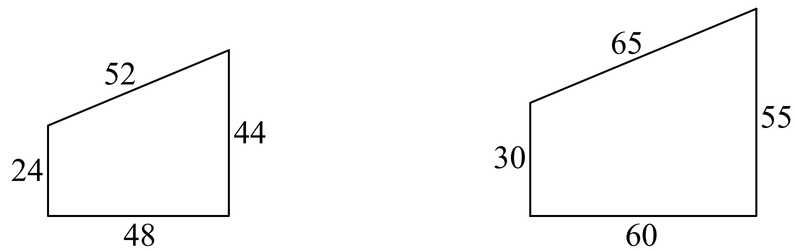
De variable x og y er proportionale.

x	13	17	18	
y		68		84

Hvad skal der stå i de tomme pladser i tabellen? (Husk at skrive hvordan du regner dig frem til tallene).

Øvelse 5.13

Figuren viser en stor og en lille firkant.



Hvis x kan være enhver af siderne i den lille firkant, og y betegner den tilsvarende side i den store firkant, så er x og y proportionale. Gør rede for dette, og skriv en ligning der viser sammenhængen mellem x og y.

Øvelse 5.14

En type fliser fås i fem størrelser. Bredde og længde er i mm, og pris er i kr.:

b: 100 mm	b: 120 mm	b: 150 mm	b: 210 mm	b: 280 mm
l: 140 mm	l: 168 mm	l: 210 mm	l: 294 mm	l: 392 mm
96,50 kr.	127,30 kr.	184,00 kr.	335,20 kr.	575,30 kr.

(a) Er længden proportional med bredden?

(b) Er prisen proportional med arealet?

Øvelse 5.15

I et computerspil regner man den samlede gevinst ud ved at lægge den faste gevinst sammen med den variable gevinst. Den faste gevinst er 30. Den variable gevinst er proportional med antallet af krydser, og hvis antallet af krydser er 5, er den variable gevinst 8.

(a) Hvad er den variable gevinst når antallet af krydser er 12 ?

(b) Hvad er antallet af krydser når den samlede gevinst er 47,6 ?

6. Omvendt proportionale variable

Øvelse 6.1

Skriv hvad der skal stå over og under brøkstregen.

Vi har 24 mønter til at købe te for.

y = antal enheder vi kan købe.

(a) Hvis prisen pr. enhed er 2 mønter, er $y = \frac{}{} = \_\_\_\_\_\_$.

(b) Hvis prisen pr. enhed er 3 mønter, er $y = \frac{}{} = \_\_\_\_\_\_$.

(c) Hvis prisen pr. enhed er 8 mønter, er $y = \frac{}{} = \_\_\_\_\_\_$.

(d) Hvis prisen pr. enhed er x mønter, er $y = \frac{}{}$.

Øvelse 6.2

Vi kan ændre et rektangel, men arealet bliver ved med at være 8 .

x = rektanglets bredde

y = rektanglets højde

(a) Når $x = 4$, er $y = \frac{}{x} = \_\_\_\_\_\_$.

(b) Når $x = 2$, er $y = \frac{}{x} = \_\_\_\_\_\_$.

(c) Når $x = 1$, er $y = \frac{}{x} = \_\_\_\_\_\_$.

(d) Når $x = 0{,}5$, er $y = \frac{}{x} = \_\_\_\_\_\_$.

DEFINITION 6.3 *Hvad er omvendt proportionale variable?*

Om to variable x og y siger vi at

y er omvendt proportional med x

hvis

$y = \frac{k}{x}$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

Øvelse 6.4

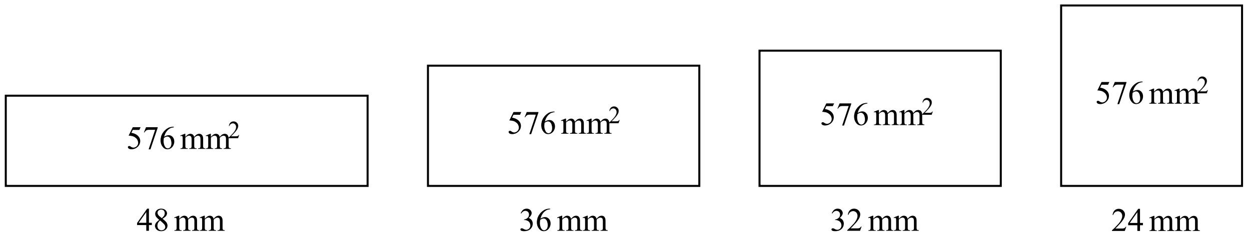
(a) Hvilke af følgende sammenhænge har samme xy-tabel?

(1) $y = 20 \cdot \frac{1}{x}$ (2) $y = \frac{x}{20}$ (3) $y = 0{,}05 \cdot x$ (4) $y = \frac{1}{20} \cdot x$ (5) $y = \frac{20}{x}$.

(b) I hvilke af disse sammenhænge gælder: y er omvendt proportional med x ,
og i hvilke af sammenhængene gælder: y er proportional med x ?

Øvelse 6.5

En bestemt type flise fås i følgende fire udgaver:



Vi ser på følgende to variable:

x = bredde (i mm)

y = højde (i mm)

(a) For alle fliserne gælder at

$x \cdot y =$ __________

og

Brøkstreg

$y = \frac{\qquad}{\qquad}$

(b) Hvis vi vælger en mindre bredde x, så får vi en ____________ højde y.

(c) Udfyld tabellen:

x	24	32	36	48
y				

Øvelse 6.6

Den tid det tager at stille et skur op, afhænger af hvor mange arbejdere der er:

- Hvis der er 4 arbejdere, tager det 3 timer.
- Hvis der er 3 arbejdere, tager det 4 timer.
- Hvis der er 2 arbejdere, tager det 6 timer.
- Hvis der er 1 arbejder, tager det 14 timer.

Find ud af om *tid* og *antal* arbejdere er omvendt proportionale.

Øvelse 6.7

En type rør fås i fem længder. Tabellen viser længde og diameter for disse.

Længde i mm	40	50	100	200	400
Diameter i mm	5	4	2	1	0,5

Er længde og diameter omvendt proportionale?

Eksempel 6.8

Spørgsmål: De variable x og y er omvendt proportionale .

Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

x		12		36
y	9	6	3	

Svar: Bestemme k :

Da x og y er omvendt proportionale, er der et tal k så

(1) $y = \dfrac{k}{x}$.

Vi starter med at finde k så kan vi bruge dette tal til at finde de tre tal.

I tabellen ser vi at når $x = 12$ er $y = 6$. Dette indsætter vi i (1):

$$6 = \frac{k}{12}$$

Vi ganger begge ligningens sider med 12:

$$6 \cdot 12 = \frac{k}{12} \cdot 12$$

Heraf får vi:

$$72 = k$$

Der gælder altså:

(2) $\underline{y = \dfrac{72}{x}}$

Bestemme y :

For at finde y når x er 36, sætter vi x til 36 i (2):

$$y = \frac{72}{36}$$

Heraf får vi $y = 2$ så

y er $\underline{\underline{2}}$ når x er 36

Bestemme x :

For at finde x når y er 9, sætter vi y til 9 i (2):

$$9 = \frac{72}{x}$$

Vi ganger begge ligningens sider med x :

$$9 \cdot x = \frac{72}{x} \cdot x$$

Vi forkorter nævneren væk:

$$9 \cdot x = 72$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 9:

$$\frac{9 \cdot x}{9} = \frac{72}{9}$$

Heraf får vi $x = 8$ så

x er $\underline{\underline{8}}$ når y er 9

På tilsvarende måde får vi:

x er $\underline{\underline{24}}$ når y er 3

Øvelse 6.9

To variable x og y er omvendt proportionale. Når $x = 30$ er $y = 20$.

(1) Hvad er y når $x = 48$?

(2) Hvad er x når $y = 50$?

Øvelse 6.10

De variable x og y er omvendt proportionale.

x	8	9	10
y	45		

Find ud af hvad der skal stå på de tomme pladser.

Øvelse 6.11

På en skærm kan vi ændre et rektangel ved at trække i et punkt. Ligningen

$$y = \frac{12}{x}$$

viser sammenhængen mellem følgende variable:

$x =$ bredde
$y =$ højde

(a) Hvad er højden når bredden er 2?

(b) Hvor meget mindre bliver højden hvis vi ændrer bredden fra 2 til 3?

(c) Man kan spørge om højden aftager lige meget hver gang bredden bliver 1 enhed større. Undersøg sagen og giv en nærmere beskrivelse af hvordan det forholder sig.

7. Potensregression

Eksempel 7.1

Spørgsmål: De målte tal i tabellen viser for et bestemt dyr sammenhængen mellem alder i døgn og længde i mm.

Alder i døgn	10	15	20	30	40	50
Længde i mm	43	60	74	105	132	155

Bestem den potenssammenhæng der passer bedst med de målte tal, og undersøg om denne sammenhæng er en god beskrivelse af de målte tal.

Svar:

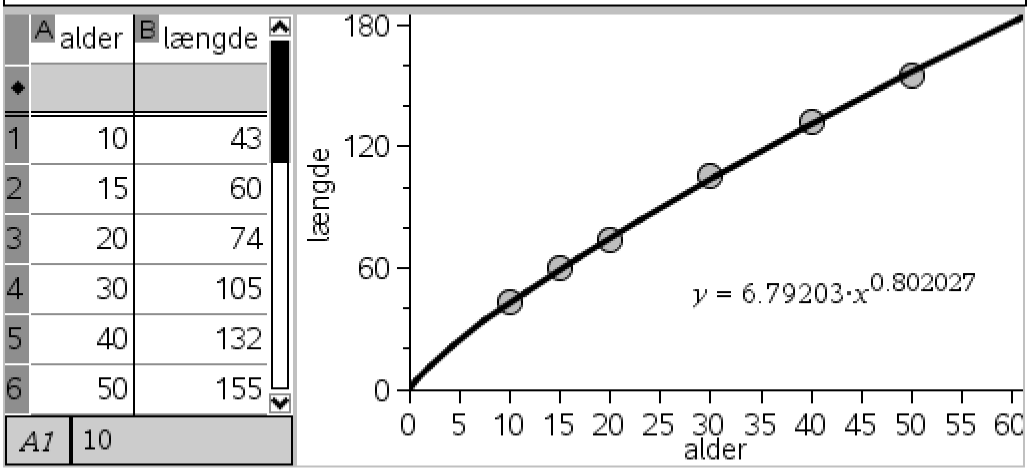
Vi får Nspire til at udføre potensregression på hele tabellen og får

$y=6{,}79203 \cdot x^{0{,}802027}$, dvs.

den potenssammenhæng der passer bedst med tabellen, er

$y=6{,}79 \cdot x^{0{,}802}$ hvor x = alder i døgn og y = længde i mm .

Figuren viser et denne sammenhæng passer godt med de målte tal.



Øvelse 7.2

En bestemt fisk vokser sådan at der med god tilnærmelse gælder

$$y = b \cdot x^a$$

hvor x er længden i cm, og y er vægten i gram.

Man har målt følgende:

Længde i cm	11,2	12,7	14,4	17,5	20,8
Vægt i gram	16,3	23,2	32,9	56,5	91,3

(a) Bestem a og b så ligningen passer bedst muligt med de målte tal.

(b) Brug ligningen til at udregne hvor mange procent tungere fisken bliver når den bliver 20 % længere.

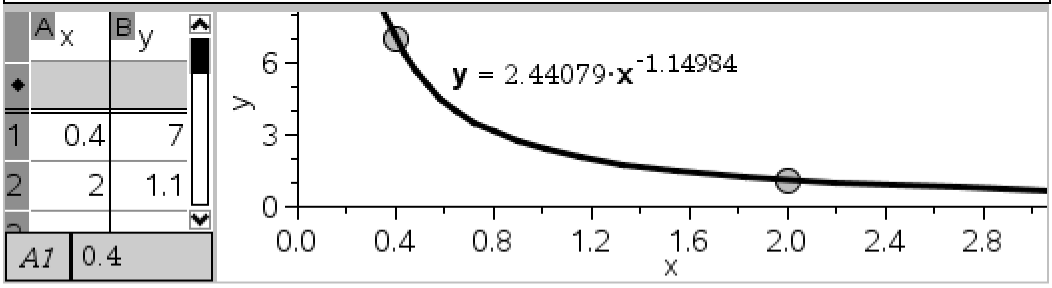
Eksempel 7.3

Spørgsmål: Grafen for sammenhængen $y = b \cdot x^a$ går gennem punkterne $(0{,}4\ ,\ 7)$ og $(2\ ,\ 1{,}1)$. Udregn a og b.

Svar:

Vi får Nspire til at udføre potensregression på punkterne (0,4 , 7) og (2 , 1,1) og får $\mathbf{y}=2{,}44079\cdot\mathbf{x}^{-1{,}14984}$, dvs.

når grafen for $\mathbf{y}=b\cdot\mathbf{x}^{a}$ går gennem (0,4 , 7) og (2 , 1,1), er $a=-1{,}15$ og $b=2{,}44$.



Øvelse 7.4

For en lyskilde gælder at

(1) $y = b \cdot x^a$

hvor y er lysstyrken (målt i W/m^2) og x er afstanden til lyskilden (målt i cm).

Vi måler at

4 cm fra lyskilden er lysstyrken 0,075 W/m^2
10 cm fra lyskilden er lysstyrken 0,012 W/m^2.

(a) Hvilke af disse fire målte tal er x-værdier, og hvilke er y-værdier?

(b) Disse målte tal viser at grafen for sammenhængen (1) går gennem punkterne

(,) og (,).

(c) Udregn tallene a og b i (1).

Øvelse 7.5

Et bløddyr vokser sådan at

$y = b \cdot x^a$

hvor y er overfladen (målt i mm^2) og x er tykkelsen (målt i mm).

Overfladen er 54 mm^2 når tykkelsen er 2,1 mm.
Overfladen er 890 mm^2 når tykkelsen er 7,1 mm.

(a) Udregn tallene a og b.

(b) Hvad er tykkelsen når overfladen er 200 mm^2 ?

(c) Hvad er overfladen når tykkelsen er 10 mm?

(d) Hvor mange procent større bliver overfladen større når tykkelsen bliver dobbelt så stor?