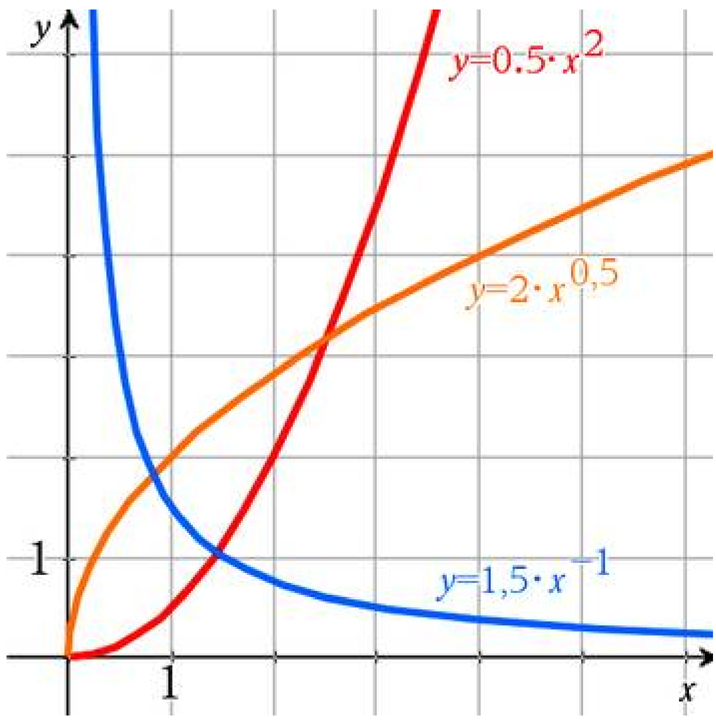
Potensfunktioner

samt proportional og omvent proportional

for hf



2018 Karsten Juul

Potensfunktion

1. Oplæg til forskrift for potensfunktion 1
2. Forskrift for potensfunktion 2
3. Udregn x eller y i $y = b \cdot x^a$ i tekstopgave 2
4. Potensvækst 3
5. Bestem procentændring for potensfunktion 3
6. Graf for potensfunktion 4
7. Udregn a og b i $y = b \cdot x^a$ ud fra to oplysninger 4
8. Potensregression 4
9. Hvad er residualer 6
10. Tegn et residualplot 7
11. Brug residualplot til at bestemme største afvigelse 8
12. Brug residualplot til at kommentere modellens anvendelighed 8
13. Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem 9
14. Eksempel på graf i dobbeltlogaritmisk koordinatsystem 10
15. En egenskab ved en logaritmisk skala 10
16. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem 11

Proportionale variable

17. Proportionale variable 12
18a. Proportionale variable, opgave 12
18b. Proportionale variable, besvarelse af opgave 13

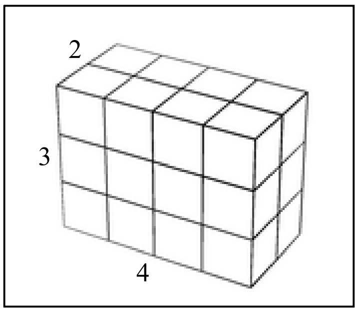
Omvendt proportionale variable

19. Omvendt proportionale variable, regler 14
20a. Omvendt proportionale variable, opgave 14
20b. Omvendt proportionale variable, besvarelse af opgave 15
21. Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale 16

Potensfunktion

1. Oplæg til forskrift for potensfunktion.

1a.



Figuren viser en kasse:

Øverst forrest er en række på 4 klodser.
Øverst er der 2 af disse. Det giver $4 \cdot 2$ klodser øverst.
Disse $4 \cdot 2$ klodser er der 3 gange. Det giver $4 \cdot 2 \cdot 3$ klodser.

Rumfanget af kassen er

længde · bredde · højde =
$4 \cdot 2 \cdot 3 =$
24

1b. Eksempel

For en kasseformet plade kan man vælge bredden x .
Længden er det dobbelte af bredden, dvs. $2x$.
Højden er lig en fjerdedel af bredden, dvs. $0{,}25x$.
Rumfanget er altså $x \cdot 2x \cdot 0{,}25x = 0{,}5x^3$.

Rumfanget er en funktion f af bredden.
Forskriften for f er

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 .$$

Forskriften er af typen

$$f(x) = b \cdot x^a .$$

Hvis b er positiv, kaldes dette en potensfunktion .

1c. Eksempel

Hvis et dyr vokser sådan at

det ikke ændrer formen,

så er

rumfanget som funktion af længden

lig en

en potensfunktion hvor eksponenten er $a = 3$.

Hvis a er mindre end 3 , f.eks. $a = 2{,}7$, så får dyret en slankere form når det bliver længere.

2. Forskrift for potensfunktion.

En funktion f er en **potensfunktion** hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

b skal være et **positivt** tal. a behøver ikke være positiv.

Vi må kun sætte positive tal ind for x.

Tallet a er **eksponenten** i forskriften $f(x) = b \cdot x^a$.

3. Udregn x eller y i $y = b \cdot x^a$ i tekstopgave.

3a. Opgave (bestem y)

For nogle dyr gælder $y = 1{,}3 \cdot x^{2{,}6}$.
hvor y er vægten, målt i gram, og x er længden, målt i cm.

Hvad er vægten af et dyr hvis længde er 2,4 cm?

Svar

$y = 1{,}3 \cdot x^{2{,}6}$

$y = 1{,}3 \cdot 2{,}4^{2{,}6}$ x er **længden**, og **længden** er **2,4**

$y = 1.3 \cdot (2.4)^{2.6} = 12.6617$ *udregnet af Nspire*

vægten er y, og y er **12,6617 ≈ 13**

Et dyr hvis længde er 2,4 cm, har vægten 13 gram .

3b. Opgave (bestem x)

For nogle dyr gælder $y = 1{,}3 \cdot x^{2{,}6}$.
hvor y er vægten, målt i gram, og x er længden, målt i cm.

Hvilken længde har et dyr hvis vægt er 6,7 gram?

Svar

$y = 1{,}3 \cdot x^{2{,}6}$

$5 = 1{,}3 \cdot x^{2{,}6}$ y er **vægten**, og **vægten** er **5**

Nspire løser ligningen $5=1.3 \cdot x^{2.6}$ mht. x og får $x \approx 1{,}67889$

$\text{solve}(5=1.3 \cdot x^{2.6},x) \blacktriangleright x=1.67884$

længden er x, og x er **1,67889 ≈ 1,7**

Et dyr hvis vægt er 5 gram, har længden 1,7 cm .

4. Potensvækst.

4a. Reglen for potensvækst: Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k:

Når x bliver ganget med k, så bliver y ganget med k^a.

4b. Eksempel $y = 1{,}2 \cdot x^{0{,}7}$

Når x ganges med 1,25 , så ganges y med $1{,}25^{0{,}7} = 1{,}17$.

Når x ganges med 2 , så ganges y med $2^{0{,}7} = 1{,}62$.

	$\cdot 1{,}25$	$\cdot 1{,}25$			$\cdot 2$	
x :	1,14	1,43	1,79		3,80	7,60
y :	1,32	1,54	1,80		3,06	4,96
	$\cdot 1{,}25^{0{,}7}$	$\cdot 1{,}25^{0{,}7}$			$\cdot 2^{0{,}7}$	

5. Bestem procentændring for potensfunktion.

5a. Opgave

En type dyr vokser sådan at $y = 2{,}7 \cdot x^{1{,}6}$ hvor y er **vægten** i gram, og x er **længden** i cm.
Længden af dyr B er 1,40 gange længden af dyr A.

Hvad skal man gange vægten af dyr A med for at få vægten af dyr B ?

Svar

Længden x bliver ganget med 1,40 .

Så bliver vægten y ganget med

$1{,}40^{1{,}6} = 1{,}71319 \approx 1{,}71$ *ifølge reglen om potensvækst (ramme 4)*

Man skal gange vægten af dyr A med 1,71 for at få vægten af dyr B.

At x bliver 40 % større er det samme som x ganges med 1,40 .
At y ganges med 1,71 er det samme som y bliver 71 % større

5b. Opgave

Et dyr vokser sådan at $y = 2{,}7 \cdot x^{1{,}6}$ hvor y er **vægten** i gram, og x er **længden** i cm.
Længden af dyr B er 40 % større end længden af dyr A.

Hvor mange procent er vægten af dyr B større end vægten af dyr A ?

Svar

Længden x bliver 40 % større,

dvs. x bliver ganget med 1,40 . (100 % + 40 % = 140 % = 140:100 = 1,40)

Så bliver y ganget med

$1{,}40^{1{,}6} = 1{,}71319 \approx 1{,}71$ *ifølge reglen om potensvækst (ramme 4)*

At y bliver ganget med 1,71 , er det samme som
at y bliver 71 % større. (100% ·1,71 = 171% . 171 % – 100 % = 71 %)

Vægten af dyr B er 71 % større end vægten af dyr A .

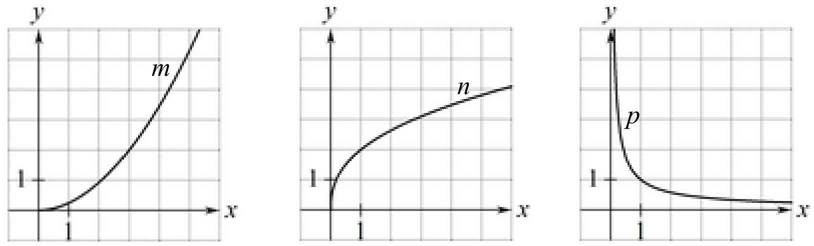
6. Graf for potensfunktion.

For en potensfunktion $y = b \cdot x^a$ gælder:

Hvis en potenssammenhæng er **aftagende** (dvs. eksponenten ***a* er negativ**), så ligner grafen ***p***.

Hvis en potenssammenhæng er **voksende** (dvs. eksponenten ***a* er positiv**), så ligner grafen *m* eller *n* .

Hvis eksponenten *a* er 1, så er grafen dog en ret linje og ligner derfor ikke *m* eller *n*.



7. Udregn a og b i $y = b \cdot x^a$ ud fra to oplysninger.

Opgave

Punkterne $(4, 6)$ og $(16, 12)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = b \cdot x^a$.

Bestem a og b .

Svar

Når vi indsætter 4 og 16 for x i $y = b \cdot x^a$, så skal vi få 6 og 12, dvs.

$$6 = b \cdot 4^a \qquad \text{og} \qquad 12 = b \cdot 16^a$$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får $a = 0{,}5$ og $b = 3$.

$$\text{solve}(6=b\cdot 4^a \text{ and } 12=b\cdot 16^a, a, b) \blacktriangleright a=0.5 \text{ and } b=3.$$

8. Potensregression.

8 a. Opgave

De målte tal i tabellen viser for et bestemt dyr sammenhængen mellem alder og længde .

Alder i døgn	10	15	20	30	40	50
Længde i mm	43	60	74	105	132	155

Sammenhængen kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen $y = b \cdot x^a$ hvor y er længde (målt i mm), og x er alder (målt i døgn).

Bestem a og b .

Se i næste ramme hvordan man gør dette!

8b. Brugsanvisning

Del siden op i to. Vælg Lister og Regneark i venstre vindue.
Se nedenfor hvordan du skal taste tal og søjlenavne.
Når du har tastet tabellen, så flyt markør til tomt felt.

Vælg i højre vindue Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / potens .

Der er automatisk fremkommet et punktplot. Behold dette som illustration selv om der ikke i opgaven er krav om punktplot.

8c. Svar

På Nspire kan besvarelsen se sådan ud:

Med tilnærmelse er $f(x) = b \cdot x^a$

hvor $f(x)$ er længde (mm), og x er alder (døgn) .

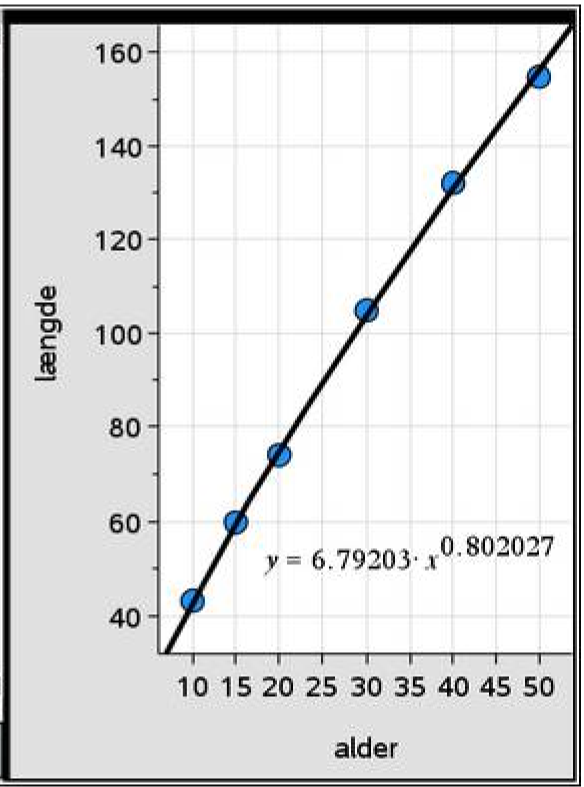
Vi taster alder i x–søjle og længde i y–søjle som vist i næste vindue.

Nspire laver **potens–regression** og får $f(x) = 6{,}79203 \cdot x^{0{,}802027}$.

Dvs. $a = 0{,}802$ og $b = 6{,}79$.

	A alder	B længde	C
=			
1	10	43	
2	15	60	
3	20	74	
4	30	105	
5	40	132	
6	50	155	
7			
8			
9			

A1 10



9. Hvad er residualer?

I de to øverste rækker i tabellen nedenfor står tallene fra 8a ,
dvs. anden række viser de målte y-værdier.

Vi fandt modellen

$$y = 6{,}79 \cdot x^{0{,}802} \; .$$

I denne model gælder:

Når $x = 20$, så er $y = 6{,}79 \cdot 20^{0{,}802} = 75{,}0$ (modellens y-værdi).

I tredje række i tabellen står modellens y-værdier.

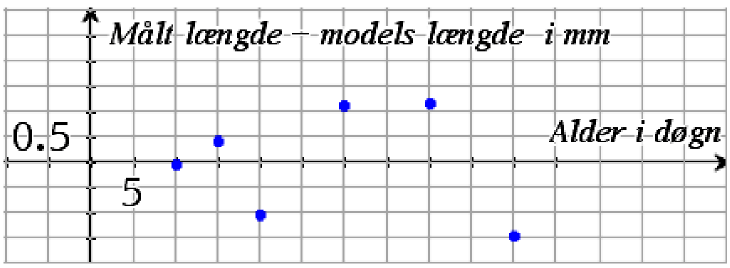
I fjerde række i tabellen har vi trukket models y fra målt y .

Tallene i fjerde række kaldes **residualer** .

Længde i cm	x	10	15	20	30	40	50
Bredde i cm	$y_{\text{målt}}$	43	60	74	105	132	155
Bredde i cm	y_{model}	43,0	59,6	75,0	103,9	130,8	156,5
Residual i cm	$y_{\text{målt}} - y_{\text{model}}$	0,0	0,4	–1,0	1,1	1,2	–1,5

Vi ser at den største afvigelse mellem målt værdi og modelværdi for bredden er 0,12 cm,
og det er når længden er 12,5 cm.

Figuren nedenfor viser residualerne.
Sådan en figur kaldes et **residualplot**.



10. Tegn et residualplot.

10a. Opgave

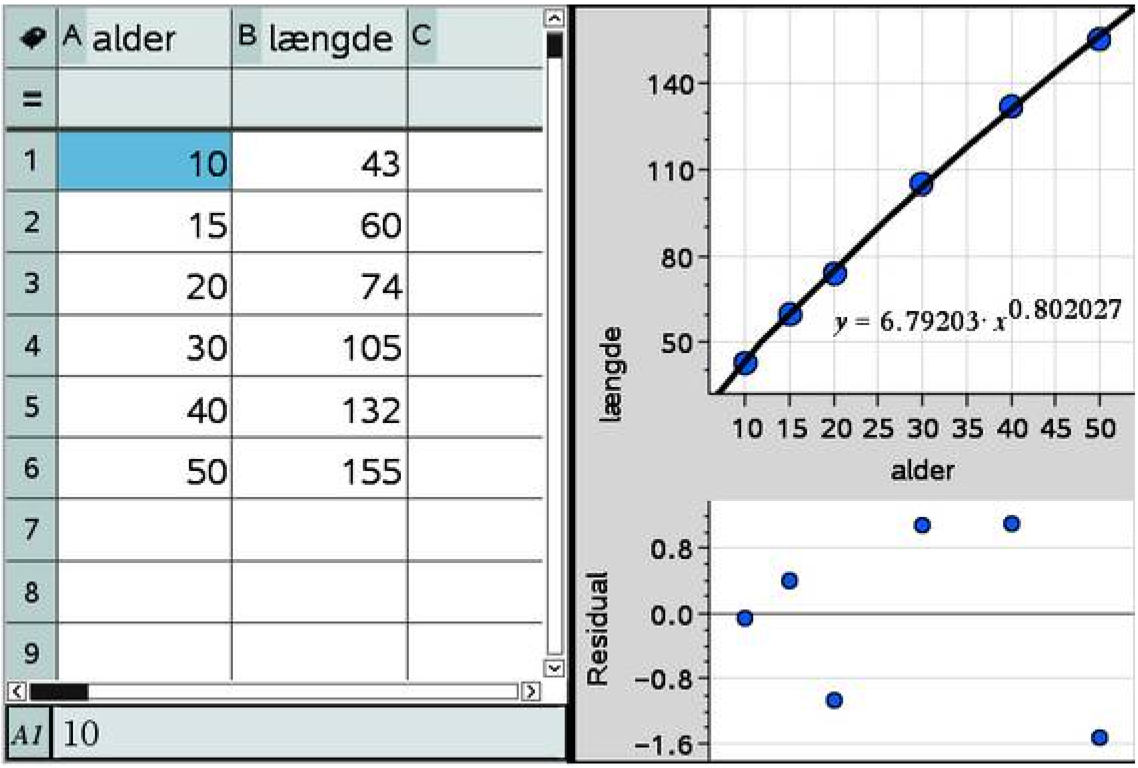
Tegn et residualplot til opgave 8a:

Brugsanvisning til opgave 10a

Hvis vinduet med punktplottet ikke er aktivt, så klik i det.
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Residualer / Residualplot .

Besvarelse af opgave 10a

Nederst til højre i vinduet med punktplot er vist residualplottet.



11. Brug residualplot til at bestemme største afvigelse.

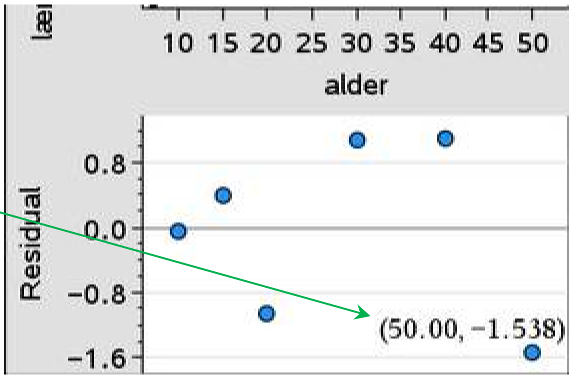
11a. Opgave

Brug residualplottet til at bestemme den af de seks målte værdier af længde der afviger mest fra den tilhørende modelværdi.

11b. Brugsanvisning til opgave 11a

På residualplottet finder vi punktet med størst afstand til x-aksen. Når markøren føres hen til punktet, fremkommer koordinatsættet.

Det er y-koordinaten (tallet efter kommaet) der viser afvigelsen. Minus skal ikke medtages da en afvigelse er et positivt tal.



11c. Besvarelse af opgave 11a

På residualplottet finder vi det af punkterne der er længst fra x-aksen. Nspire aflæser koordinatsættet til (50,00, –1,538).

Den største afvigelse mellem målt værdi og modelværdi for længden er altså

1,5 mm og forekommer ved alder 50 døgn .

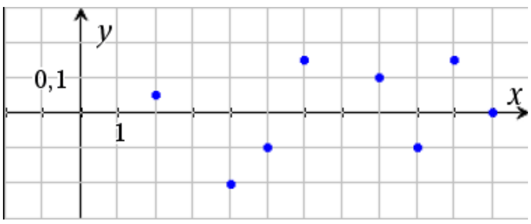
12. Brug residualplot til at kommentere modellens anvendelighed.

12a Opgave

Brug residualplottet til at kommentere modellens anvendelighed til at beskrive sammenhængen.

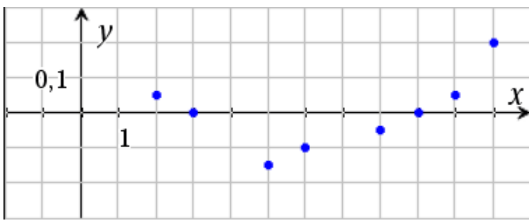
12b Svar hvis residualplottet ser ud som det til højre.

Afvigelserne ser ud til at være tilfældigt fordelt, så det ser ikke ud til at det ville være bedre med en model af en anden type.



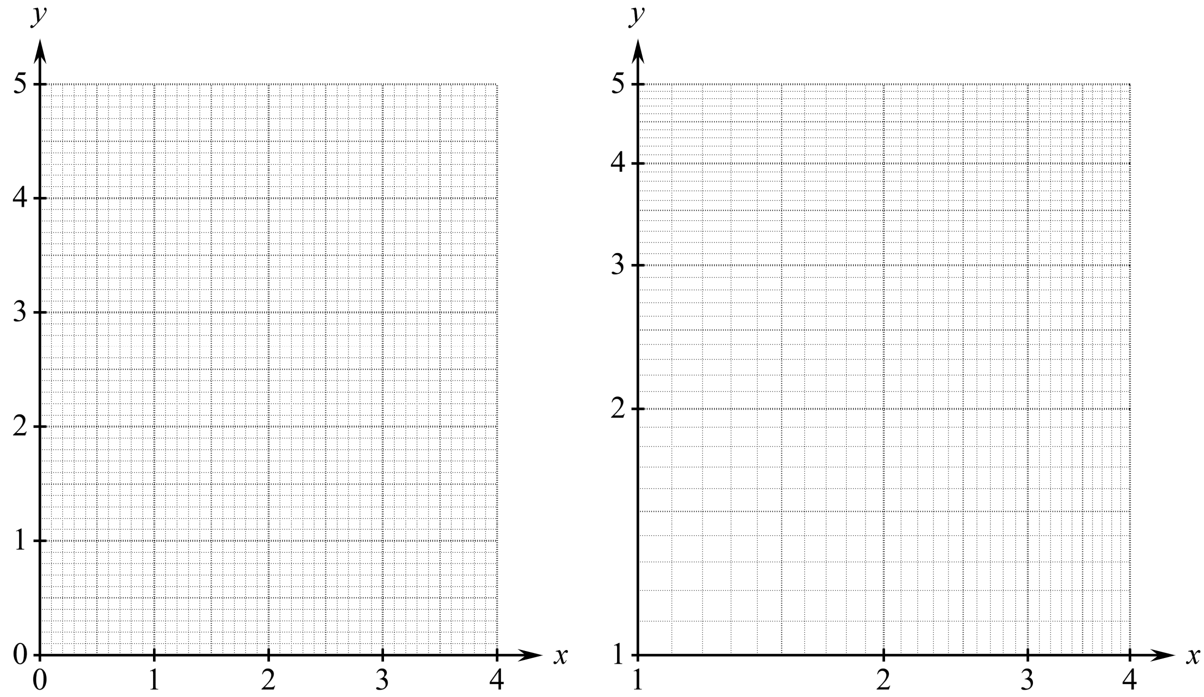
12c Svar hvis residualplottet ser ud som det til højre.

Afvigelserne ser ud til at ændres med en vis systematik (danner bue), så det ser ud til at det ville være bedre med en model af en anden type.

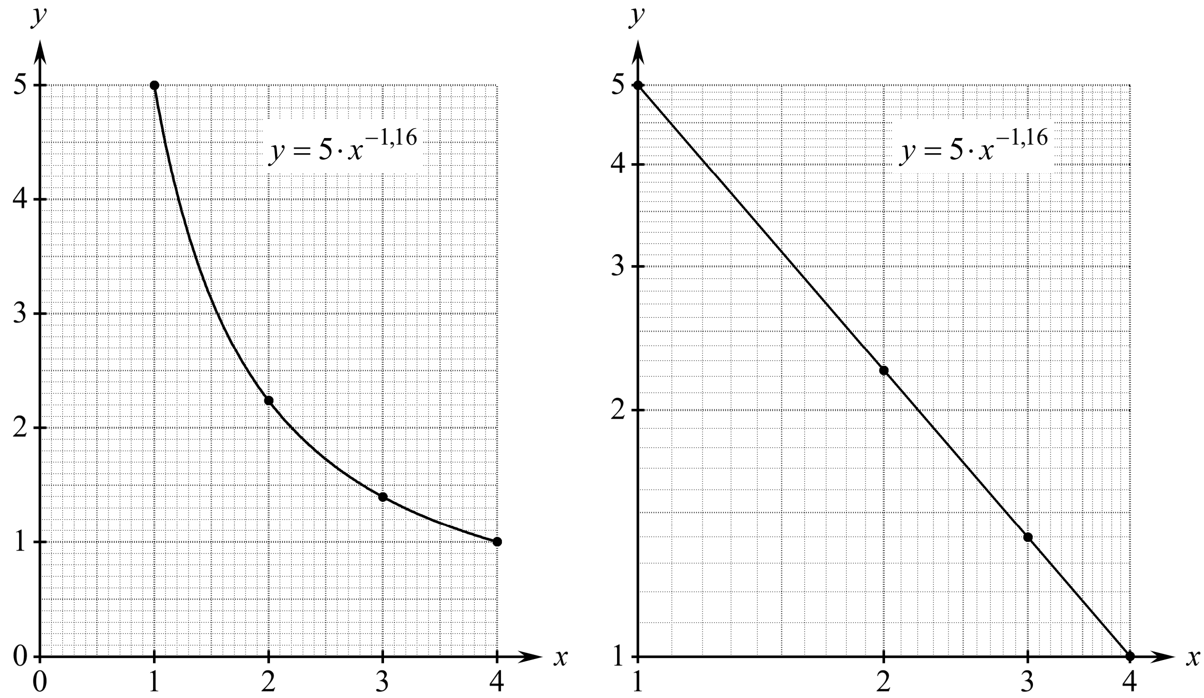


13. Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

13a. Regel I koordinatsystemet nedenfor til højre er hver af akserne en speciel type. Det kaldes en **logaritmisk akse** . Et koordinatsystem kaldes et **dobbeltlogaritmisk koordinatsystem** hvis begge akser er logaritmiske.



13b. Oplæg For sammenhængen $y = 5 \cdot x^{-1,16}$ har vi i begge koordinatsystemerne afsat nogle støttepunkter. I det dobbeltlogaritmiske er grafen en ret linje.



13c. Regel Grafen for en funktion f er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem netop når f er en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$.

13d. Husk Når vi ser koordinatsystemer i aviser, tidsskrifter og lærebøger i forskellige fag, skal vi se efter om akserne er sædvanlige, så vi ikke tror at en sammenhæng er lineær når grafen er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk (eller enkeltlogaritmisk) koordinatsystem.

14. Eksempel på graf i dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

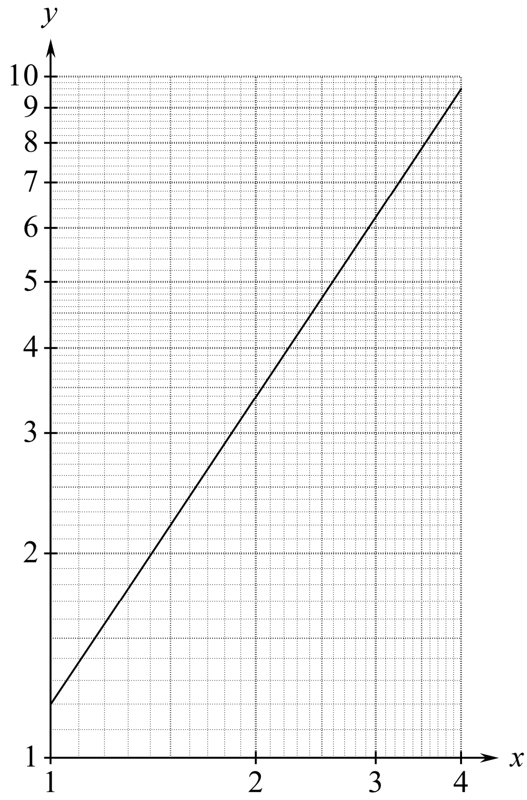
Billedet viser grafen for en funktion f.

Grafen er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem, så f er en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$.

På grafen kan vi aflæse at $f(1) = 1{,}2$ og $f(2) = 3{,}4$.

Bemærk: mellem y-værdierne 5 og 6 er der fem vandrette linjer, mens der mellem 4 og 5 er ti vandrette linjer.

Når vi er opmærksomme på det, kan vi se at $f(3) = 6{,}2$ og $f(4) = 9{,}6$.



15. En egenskab ved en logaritmisk akse.

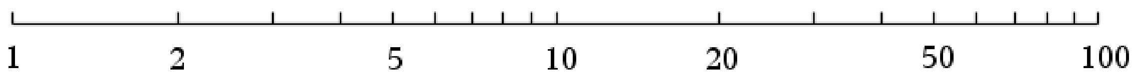
Nedenfor er vist en logaritmisk akse.

Der gælder:

> Stykket fra 10 til 100 er magen til stykket fra 1 til 10, bortset fra at tallene er 10 gange så store.

Hvis vi fortstte aksen til begge sider, ville gælde:

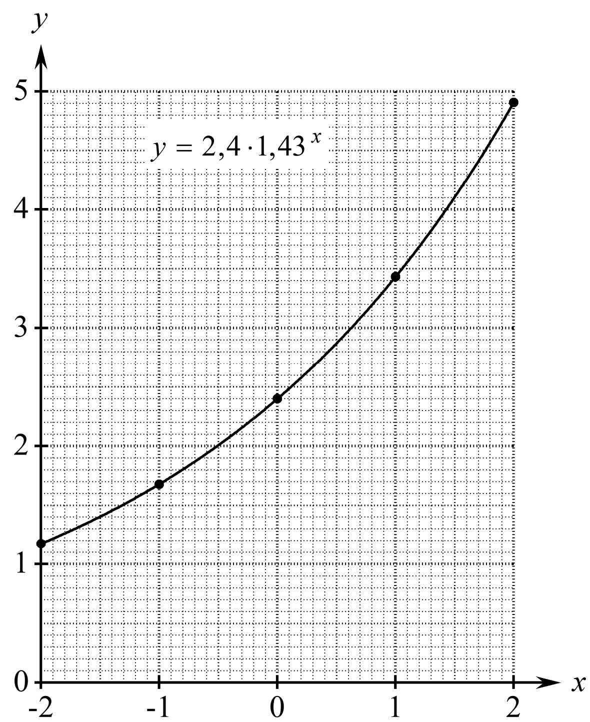
> Stykket fra 1 til 10 er magen til stykket fra 0,1 til 1, bortset fra at tallene er 10 gange så store.
>
> Stykket fra 100 til 1000 er magen til stykket fra 10 til 100, bortset fra at tallene er 10 gange så store.

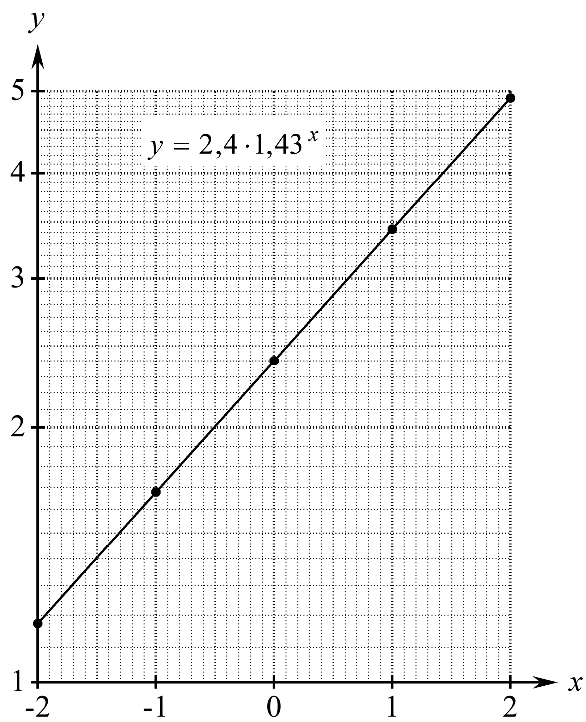


16. Enkeltlogaritmisk koordinatsytem.

16a. Regel Et koordinatsystem kaldes et **enkeltlogaritmisk koordinatsystem** , hvis
den lodrette akse er logaritmisk og
den vandrette akse er almindelig.

16b. Regel Grafen for en funktion f er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem netop når f er en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$.





Proportionale variable

17. Proportionale variable, regler.

17a. Om to variable x og y siger vi at

y er proportional med x

hvis

$y = k \cdot x$

og k er det samme tal for alle værdier af x .

17b. Tallet k kan udregnes ved hjælp af følgende formel

$$k = \frac{y}{x}$$

hvor x og y skal være sammenhørende værdier af x og y (dvs. (x,y) er et punkt på grafen).

18a. Proportionale variable, opgave

Opgave

De to variable x og y er proportionale.

x	12	15	
y	168		266

Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

Besvarelse af opgaven står i næste ramme!

18b. Proportionale variable, besvarelse af opgave.

Svar

Udregne k :

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først.

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

Vi kan bestemme k med formlen

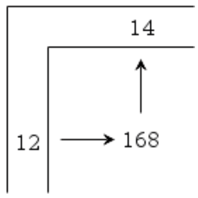
(2) $k = \dfrac{y}{x}$

I tabellen ser vi at når $x = 12$ er $y = 168$.
Dette indsætter vi i formlen (2) ovenfor:

$$k = \frac{168}{12}$$

$$k = 14$$

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$\dfrac{168}{12} = 14$

Dette tal indsætter vi i formlen (1) ovenfor og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(3) $\underline{y = 14 \cdot x}$

Udregne y :

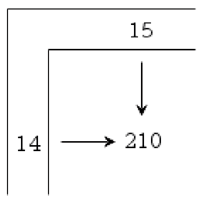
For at finde y når x er 15, sætter vi x til 15 i formlen (3) ovenfor:

$$y = 14 \cdot 15$$

Heraf får vi $y = 210$ så

y er 210 når x er 15

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$14 \cdot 15 = 210$

Udregne x :

For at finde x når y er 266,
sætter vi y til 266 i formlen (3) ovenfor:

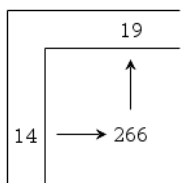
$$266 = 14 \cdot x$$

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$x = 19$$

så x er 19 når y er 266

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

solve$(266=14 \cdot x,x)$ ▸ $x=19$

Udfyldt tabel :

x	12	15	19
y	168	210	266

Omvendt proportionale variable

19. Omvendt proportionale variable, regler.

19a. Om to variable x og y siger vi at

y er omvendt proportional med x

hvis

$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

og k er det samme tal for alle værdier af x .

19b. Tallet k kan udregnes ved hjælp af følgende formel

$$k = x \cdot y$$

hvor x og y skal være sammenhørende værdier af x og y (dvs. (x,y) er et punkt på grafen).

20a. Omvendt proportionale variable, opgave.

Opgave

De to variable x og y er omvendt proportionale.

x		12	18
y	9	6	

Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

Besvarelse af opgaven står i næste ramme!

20b. Omvendt proportionale variable, besvarelse af opgave.

Svar

Udregne k :

I opgaven står ikke at vi skal udregne k. Vi skal selv vide at vi skal udregne k først.

Da x og y er omvendt proportionale, er der et tal k så

(1) $\quad y = k \cdot \frac{1}{x}$

Vi kan bestemme k med formlen

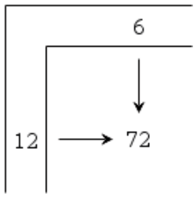
(2) $\quad k = x \cdot y$

I tabellen ser vi at når $x = 12$ er $y = 6$.
Dette indsætter vi i formlen (2) ovenfor:

$$k = 12 \cdot 6$$

$$k = 72$$

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$12 \cdot 6 = 72$

Dette tal indsætter vi i formlen (1) ovenfor og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(3) $\quad \underline{y = 72 \cdot \frac{1}{x}}$

Udregne y :

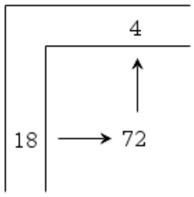
For at finde y når x er 18, sætter vi x til 18 i formlen (3) ovenfor:

$$y = 72 \cdot \frac{1}{18}$$

Heraf får vi $y = 4$ så

y er 4 når x er 18

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$72 \cdot \frac{1}{18} = 4$

Udregne x :

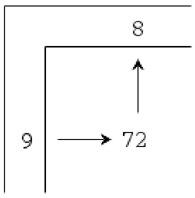
For at finde x når y er 9 , sætter vi y til 9 i formlen (3) ovenfor:

$$9 = 72 \cdot \frac{1}{x}$$

Vi løser denne ligning mht. x og får $x = 8$ så

x er 8 når y er 9

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$\text{solve}\left(9=72\cdot\frac{1}{x},x\right) \blacktriangleright x=8$

Udfyldt tabel :

x	8	12	18
y	9	6	4

21. Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale.

Opgave

På en skærm er et rektangel som vi kan ændre ved at trække med musen.
Højde og bredde er omvendt proportionale. Højden er 2,5 når bredden er 8 .

Hvad er højden når bredden er 3,2 ?

Svar

Vi kalder højden for h og bredden for b.

Udregne k :

Da h er omvendt proportional med b, findes et tal k så

$$h \;=\; k\cdot\frac{1}{b}$$

Da $h=2{,}5$ når $b=8$ må

$$2{,}5 \;=\; k\cdot\frac{1}{8}$$

Vi ganger begge sider med 8 og får $k=20$, dvs.

$$(1) \qquad \underline{h \;=\; 20\cdot\frac{1}{b}}$$

Udregne h :

Vi sætter $b=3{,}2$ i formlen (1) ovenfor:

$$h \;=\; 20\cdot\frac{1}{3{,}2}$$

Heraf får vi $h=6{,}25$ så

højden er 6,25 når bredden er 3,2 .

B
Bestem forskrift, potensfunktion....4
bestem x....2
bestem y....2
D
dobbeltlogaritmisk koordinatsystem....9, 10
E
enkeltlogaritmisk koordinatsystem....9, 11
F
forskrift, potensfunktion....2
G
graf....4
L
logaritmisk akse....9, 10
O
omvendt proportional....12, 14, 16
P
potensfunktion....2
potensfunktion, graf....4
potensregression....4, 7
potensvækst....3
procentændring, potensfunktion....3
proportional....12
R
regression, potens....4, 7
residualplot....6, 8