Potens-
sammenhænge

$$y = b \cdot x^a$$

$$\xrightarrow{\cdot k}$$

x		
y		

$$\xrightarrow[\cdot k^a]{}$$

2009 Karsten Juul

Dette hæfte er en fortsættelse af hæftet "Eksponentielle sammenhænge, 2009".

Indhold

Nyere hæfter:

http://mat1.dk/kort_om_potenssammenhaenge.pdf 1/5-11

http://mat1.dk/oevelser_til_haeftet_kort_om_potenssammenhaenge.pdf 29/5-11

Potens-sammenhænge

1. udgave 2009

© 2009 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra

www.mat1.dk

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om klasse/hold, lærer og skole/kursus.

Afsnit 24. Hvad er en potens-sammenhæng?

DEFINITION 24.1 Hvad er en potens-sammenhæng?

Vi kalder en sammenhæng for en potens-sammenhæng hvis den kan beskrives ved en ligning der fås ved at indsætte bestemte tal for a og b i ligningen

(1) $y = b \cdot x^a$

hvor b skal være positiv.

Opgave 24.2: Ligningen

(2) $y = x^{2,6} \cdot 1{,}4$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = b \cdot x^a$ for at få sammenhængen (2)?

Svar: Vi skal sætte

$$\underline{\underline{a = 2{,}6}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 1{,}4}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 1{,}4 \cdot x^{2,6}$$

som kan omskrives til ligningen (2).

Bemærkning: I svaret på 24.2 viste vi at ligningen (2) kan fås ved at sætte bestemte tal ind for a og b i ligning (1) i definition 24.1 , dvs. vi viste at (2) er en potens-sammenhæng.

Opgave 24.3: Ligningen

(3) $y = \dfrac{4}{x}$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = b \cdot x^a$ for at få sammenhængen (3)?

Svar: For at få sammenhængen (3) skal vi i ligningen $y = b \cdot x^a$ sætte

$$\underline{\underline{a = -1}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 4}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 4 \cdot x^{-1}$$

som vi kan omskrive til ligningen (3) da

$$4 \cdot x^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4 \cdot 1}{x} = \frac{4}{x} .$$

Her har vi brugt reglerne

$$p^{-1} = \frac{1}{p} , \quad p \cdot \frac{q}{r} = \frac{p \cdot q}{r} \quad \text{og} \quad p \cdot 1 = p .$$

Opgave 24.4: Ligningen

(4) $y = \sqrt{x}$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = b \cdot x^a$ for at få sammenhængen (3)?

Svar: For at få sammenhængen (3) skal vi i ligningen $y = b \cdot x^a$ sætte

$$\underline{\underline{a = \tfrac{1}{2}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 1}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

som vi kan omskrive til ligningen (4) da

$$1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \ .$$

Her har vi brugt reglerne

$$1 \cdot p = p \quad \text{og} \quad p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p} \ .$$

Øvelse 24.5

Hver af følgende sammenhænge kan vi få ved at sætte tal ind for a og b i ligningen $y = b \cdot x^a$. Angiv i hvert tilfælde hvad der skal indsættes for a og b .

(1) $y = 4 \cdot x^3$ (2) $y = x^4 \cdot 3$ (3) $y = \frac{5{,}9}{x}$ (4) $y = 2{,}5 \cdot \sqrt{x}$.

Opgave 24.6: Et kvadratisk område dækkes med kakler der hver vejer 238 enheder.

a) Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 2 kakler bredt (og højt)?

b) Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 3 kakler bredt?

c) Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 8 kakler bredt?

d) Opskriv en ligning til beregning af vægten y når bredden x er kendt.

Svar:

a) $238 \cdot 2^2$.

b) $238 \cdot 3^2$.

c) $238 \cdot 8^2$.

d) $y = 238 \cdot x^2$.

Bemærkning: Sammenhængen $y = 238 \cdot x^2$ er en potens-sammenhæng. Dette følger af definition 24.1 da vi får ligningen $y = 238 \cdot x^2$ når vi i $y = b \cdot x^a$ indsætter $a = 2$ og $b = 238$.

Der er en bemærkning til på næste side.

Bemærkning: Når bredden er t, er vægten $y = \underline{\underline{238 \cdot t^2}}$.

Når bredden er $2 \cdot t$, er vægten $y = 238 \cdot (2 \cdot t)^2 = 238 \cdot 2^2 \cdot t^2 = \underline{\underline{238 \cdot t^2 \cdot 4}}$.

Ved at sammenligne de to resultater kan vi se at vægten firedobles når bredden fordobles.

Øvelse 24.7

Om nogle kasser gælder:

Bredden er 3 gange højden.

Længden er 5 gange højden.

a) Når højden er 2, hvad er så bredden? og længden? og rumfanget?

b) Opskriv en ligning til beregning af rumfanget y når højden x er kendt.

c) Når højden er t, hvad er så rumfanget?

d) Når højden er $2 \cdot t$, hvad er så rumfanget?

e) Hvad sker der med rumfanget når højden fordobles?

Afsnit 25. Hvordan ser grafen ud for en potens-sammenhæng?

Opgave 25.1: Følgende tre sammenhænge er alle potenssammenhænge (ifølge definition 24.1).

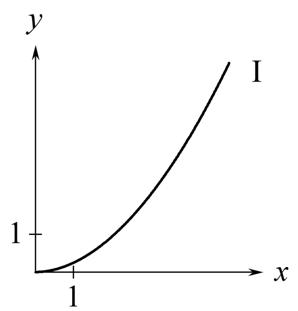
I: $y = 0{,}25 \cdot x^{1{,}9}$

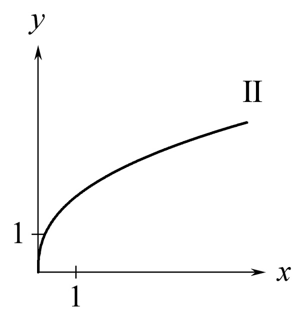
II: $y = 2 \cdot x^{0{,}4}$

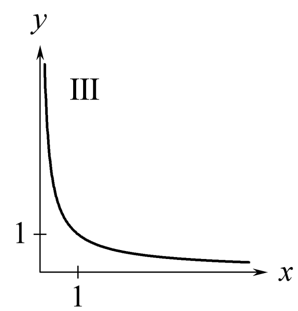
III: $y = x^{-0.8}$

Tegn graferne for de tre sammenhænge.

Svar: Ved hjælp af et elektronisk hjælpemiddel eller ved metoden fra afsnit 4 kan vi tegne graferne.







Bemærkning: Af graferne ses at

de to sammenhænge hvor a er positiv, er voksende,

og

den sammenhæng hvor a er negativ, er aftagende.

SÆTNING 25.2

En potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ er

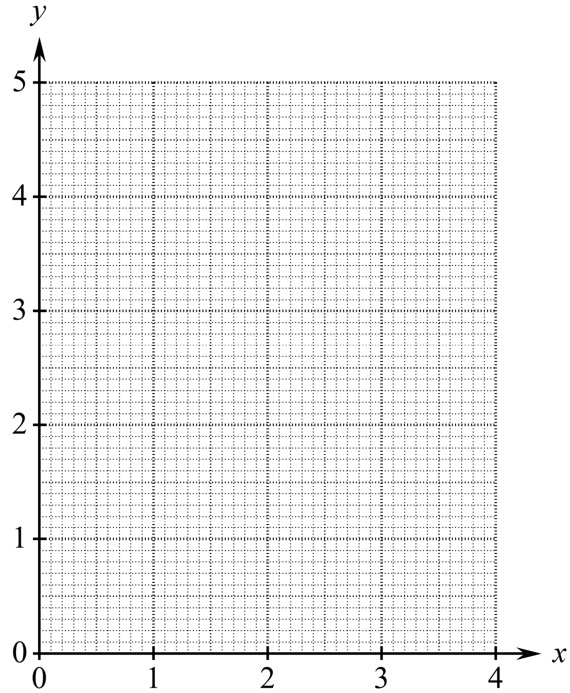
aftagende hvis a er negativ

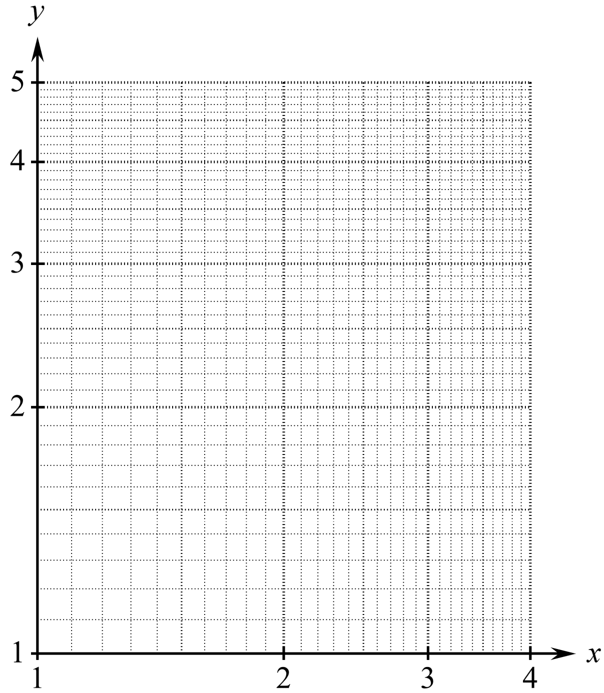
og

voksende hvis a er positiv.

Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

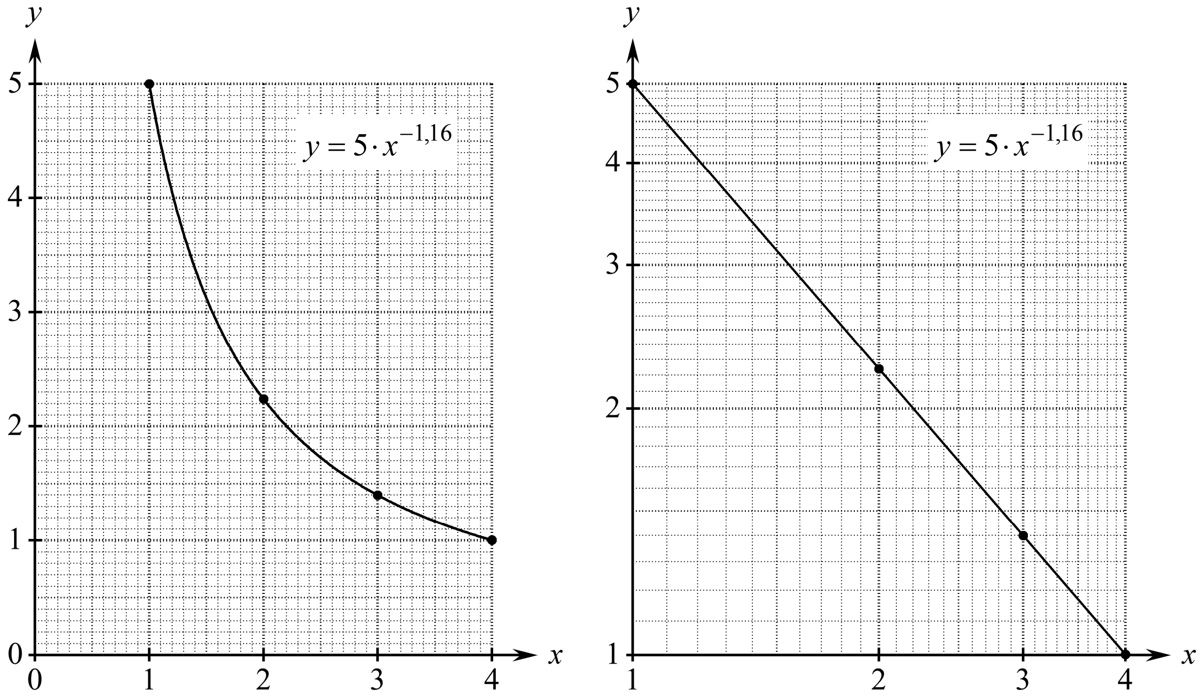
I koordinatsystemet nedenfor til højre er hver af akserne en speciel type der kaldes en logaritmisk akse. Et koordinatsystem kaldes et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem hvis begge akser er logaritmiske.





Opgave 25.3: Tegn grafen for sammenhængen $y = 5 \cdot x^{-1,16}$ i begge koordinatsystemerne ovenfor.

Svar: Vi bruger metoden fra afsnit 4 og afsætter de fundne punkter i begge koordinatsystemer. (*Se næste side*).



SÆTNING 25.4

Grafen for en potenssammenhæng er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bemærkning

Når vi ser koordinatsystemer i aviser, tidsskrifter og lærebøger i forskellige fag, skal vi se efter om akserne er sædvanlige, så vi ikke tror at en sammenhæng er lineær når grafen er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk (eller enkeltlogaritmisk) koordinatsystem.

Afsnit 26. Opgaver hvor vi skal bestemme x eller y i $y = b \cdot x^a$

Opgave 26.1: For nogle dyr gælder

(1) $$y = 0{,}24 \cdot x^{2{,}8}$$

hvor y er vægten, målt i gram, og x er længden, målt i cm.

a) Hvad er vægten af et dyr hvis længde er 3 cm?

b) Hvad er længden af et dyr hvis vægt er 0,5 g?

Svar på a): Under ligningen (1) står at x er længden, så da det oplyste tal 3 er længden, skal 3 indsættes på x's plads:

$$y = 0{,}24 \cdot 3^{2{,}8}$$

Ved at udregne dette får vi

$$y = 5{,}2$$

Under ligningen (1) står at y er vægten, så

et 3 cm langt dyr vejer $\underline{\underline{5{,}2\text{ g}}}$.

Svar på b): Under ligningen (1) står at y er vægten, så da det oplyste tal 0,5 er vægten, skal 0,5 indsættes på y's plads:

$$0{,}5 = 0{,}24 \cdot x^{2{,}8}$$

For at løse denne ligning starter vi med at dividere begge sider med 0,24:

$$\frac{0{,}5}{0{,}24} = \frac{0{,}24 \cdot x^{2{,}8}}{0{,}24}$$

Vi forkorter brøken på højre side og får

$$\frac{0{,}5}{0{,}24} = x^{2{,}8}$$

Denne ligning har løsningen

$$x = \sqrt[2{,}8]{\frac{0{,}5}{0{,}24}}$$

Ved at udregne dette får vi

$$x = 1{,}3$$

Under ligningen (1) står at x er længden, så

et dyr hvis vægt er 0,5 g , har længden $\underline{\underline{1{,}3\text{ cm}}}$.

Øvelse 26.2

Antallet af dyr i en indhegning afhænger af dyrenes længde. Der gælder

$$y = 5800 \cdot x^{-2,3}$$

hvor y er antal dyr i indhegningen, og x er dyrenes længde, målt i cm.

a) Hvor mange dyr er der i indhegningen, hvis dyrenes længde er 6 cm?

b) Hvad er dyrenes længde når der er 19 dyr i indhegningen?

Øvelse 26.3

Sammenhængen mellem tykkelse og længde for visse stængler kan beskrives ved ligningen

$$y = 13 \cdot x^{0,72}$$

hvor y er længden i cm, og x er tykkelsen i mm.

Hvor tyk er en 100 cm lang stængel?

Øvelse 26.4

Prisen for nogle figurer er fastlagt ved

$$y = 20 \cdot x^{3,5}$$

hvor y er prisen i kr. og x er højden i cm.

En gul figur er 3 cm høj, en rød figur er 5 cm høj, og en blå figur er 7 cm høj.

a) Hvor mange kroner er den røde dyrere end den gule?

b) Hvor mange kroner er den blå dyrere end den røde?

c) Hvor mange procent er den røde dyrere end den gule?

d) Hvor mange procent er den blå dyrere end den røde?

Afsnit 27. Hvordan kan vi beregne ændringer i y og x for en potens-sammenhæng?

Opgave 27.1: Det årlige varmetab gennem loftet afhænger af tykkelsen af isoleringen. For en bestemt bolig gælder at

$$y = 5400 \cdot x^{-0,75}$$

hvor y er varmetabet i kWh og x er tykkelsen i cm.

a) Nu er tykkelsen 10 cm. Hvor mange procent vil varmetabet nedsættes hvis tykkelsen øges med 85 %?

b) Nu er tykkelsen 8 cm. Hvor mange procent skal tykkelsen øges for at varmetabet bliver nedsat med 37 %?

Svar på a): x er 10. For at udregne det tal der er 85 % større, skal vi gange med $100\% + 85\% = 185\% = \frac{185}{100} = 1{,}85$: $10 \cdot 1{,}85 = 18{,}5$.

Når $x = 10$ er $y = 5400 \cdot 10^{-0,75} = 960{,}27$.

Når $x = 18{,}5$ er $y = 5400 \cdot 18{,}5^{-0,75} = 605{,}36$.

$\xrightarrow{+85\%}$

x	10	18,5
y	960,27	605,36

$\xrightarrow[-37\%]{}$

Vi udregner hvor mange procent y er blevet ændret:

$$\frac{605{,}36 - 960{,}27}{960{,}27} = -0{,}36959 \approx -37\%$$

Vi har nu fundet ud af at

varmetabet $\underline{\underline{\text{nedsættes } 37\%}}$ når tykkelsen på 10 cm øges med 85 %.

Svar på b): x er 8.

Når $x = 8$ er $y = 5400 \cdot 8^{-0,75} = 1135{,}21$

dvs. y er 1135,21. For at udregne det tal der er 37 % mindre, skal vi gange med $100\% - 37\% = 63\% = \frac{63}{100} = 0{,}63$: $1135{,}21 \cdot 0{,}63 = 715{,}18$.

Vi finder nu ud af hvad x er, når y er 715,18:

Vi løser ligningen $715{,}18 = 5400 \cdot x^{-0,75}$

og får $x = 14{,}81$.

$\xrightarrow{+85\%}$

x	8	14,81
y	1135,21	715,18

$\xrightarrow[-37\%]{}$

Vi udregner hvor mange procent x er blevet ændret:

$$\frac{14{,}81 - 8}{8} = 0{,}85125 \approx 85\% .$$

Vi har nu fundet ud af at

når tykkelsen på 8 cm $\underline{\underline{\text{øges } 85\%}}$, så nedsættes varmetabet 37 %.

Bemærkning: Af svarene på de to spørgsmål ser vi at uanset om tykkelsen er 8 cm eller 10 cm, gælder:

Når tykkelsen øges 85 % , så nedsættes varmetabet 37 %.

Dette kan også udtrykkes sådan:

Når tykkelsen ganges med 1,85 , så ganges varmetabet med 0,63 .

Øvelse 27.2

Et dyr vokser sådan at

$$y = 2{,}7 \cdot x^{1{,}6}$$

hvor y er vægten i gram, og x er længden i cm.

a) Længden blev målt tre gange. Første gang var længden 2 cm, og anden gang var længden 3 cm.

Hvad var vægten da dyrets længde første gang blev målt, og hvad var vægten anden gang.

b) Hvor mange procent er længden vokset fra første til anden måling, og hvor mange procent er vægten vokset i samme periode?

c) Fra anden til tredje måling er vægten vokset 30%. Hvor mange procent er længden vokset i samme periode?

Opgave 27.3: **Bevis for 27.4**

I denne opgave står både *a*, *b*, *k* og *t* for tal som endnu ikke er oplyst.

Ligningen

(1) $\quad y = b \cdot x^a$

viser sammenhængen mellem to variable *y* og *x*.

Hvilken ændring sker i værdien af y, når x ændrer værdi fra t til $t \cdot k$?

Svar: Vi regner ud hvad y er når x er t og $t \cdot k$:

Af potensreglen

$$(u \cdot v)^s = u^s \cdot v^s$$

får vi $(t \cdot k)^a = t^a \cdot k^a$.

Når $x = t$ er $y = b \cdot t^a$

Når $x = t \cdot k$ er $y = b \cdot (t \cdot k)^a = b \cdot t^a \cdot k^a$

Vi ser at når værdien af *x* ændres fra t til $t \cdot k$, så ændres værdien af y

fra $b \cdot t^a$ til $b \cdot t^a \cdot k^a$.

Dvs. værdien af y $\underline{\underline{\text{bliver ganget med } k^a}}$ når værdien af x bliver ganget med *k*.

Bemærkning: Da *t* ikke indgår i svaret, gælder altså at ligegyldig hvilken værdi *x* starter med at have, så vil *y* blive ganget med k^a når *x* bliver ganget med k :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & & \xrightarrow{\cdot k} & \\
x & & & \\
\hline
y & & & \\
 & & \xrightarrow[\cdot k^a]{} &
\end{array}$$

Hvis $a = 0{,}94$ og $k = 1{,}27$, er $k^a = 1{,}27^{0{,}94} = 1{,}252$ så

hver gang *x* bliver ganget med 1,27 , så bliver y ganget med 1,252

dvs.

hver gang *x* øges 27 % , så bliver *y* øget med 25,2 % .

Med udregningerne i svaret på opgave 27.3 har vi gjort rede for at følgende regel gælder:

SÆTNING 27.4

Om en potens-sammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k:

Hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver ganget med $\boldsymbol{k}$, så bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{k^a}$.

Opgave 27.5: For en cylinder hvor højden er lig diameteren, gælder

$$y = \frac{\pi}{4} \cdot x^3$$

hvor y er rumfanget og x er diameteren.

a) Hvad sker der med rumfanget af sådan en cylinder når diameteren fordobles?

b) Hvor mange procent øges rumfanget når diameteren øges 20 % ?

Svar på a): Når x ganges med 2, så vil y blive ganget med $2^3 = 8$ ifølge sætning 27.4 .

Dvs. $\underline{\underline{\text{rumfanget ottedobles}}}$ når diameteren fordobles.

Svar på b): Vi skal gange diameteren med 1,20 for at øge den 20 %.

Når x ganges med 1,20 , så bliver y ganget med $1{,}20^3 = 1{,}728$ ifølge sætning 27.4 .

At y bliver ganget med 1,728 , er det samme som at y bliver øget 72,8 %.

Dvs. rumfanget øges $\underline{\underline{72{,}8\,\%}}$ når diameteren øges 20 %.

Øvelse 27.6:

Hvis en vares pris sættes op, så sælges der mindre af den. For en bestemt vare gælder

$$y = 946000 \cdot x^{-2{,}11} \quad , \quad 10 \le x \le 29$$

hvor y er det beløb der sælges for på en dag, og x er prisen pr. pakke. (Enheden for x og y er kr.).

a) Hvor mange procent falder det beløb der sælges for på en dag, hvis prisen sættes op med 20 % ?

b) Hvor mange procent falder det beløb der sælges for på en dag, hvis prisen sættes op med 40 % ?

c) Hvor mange procent falder det beløb der sælges for på en dag, hvis prisen sættes op fra 10 kr. til 20 kr.?

Øvelse 27.7

Om nogle kasser gælder at højden er 2 gange bredden, og længden er 3 gange bredden.

a) Hvis bredden er 5, hvad er så kassens overflade?

b) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem overfladen y og bredden x .

c) Hvad sker der med overfladen når bredden fordobles?