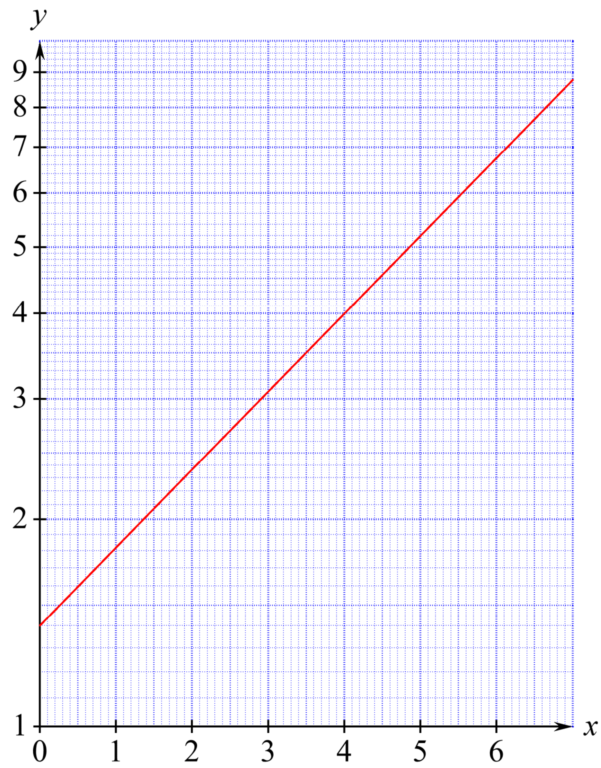
Øvelser

til hæftet

Kort om Eksponentielle Sammenhænge



2011 Karsten Juul

Dette hæfte indeholder bl.a. mange småspørgsmål der gør det nemmere for elever at arbejde effektivt på at få kendskab til emnet.

Indhold

Øvelser til hæftet "Kort om eksponentielle sammenhænge"

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

Øvelse 1.1

Da vi både har ganget og divideret med 100, har vi ikke ændret tallet.

Vi har ganget med 100 ved at rykke kommaet 2 pladser mod højre.

% betyder "hundrededele".

(a) Da $1{,}3 = \frac{1{,}3 \cdot 100}{100} = \frac{130}{100} = 130\,\%$, gælder:

Når vi ganger *et tal* med **1,3** , får vi et *facit* der er **130 % af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,3** , får vi et *facit* der er **30 % større end** *tallet* .

(b) Udfyld efter samme princip som i (a):

Da $1{,}045 = \frac{1{,}045 \cdot \underline{\qquad}}{100} = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{100} = \underline{\qquad\qquad}\,\%$, gælder

Når vi ganger *et tal* med **1,045** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,045** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(c) Da $0{,}78 = \frac{0{,}78 \cdot \underline{\qquad}}{100} = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{100} = \underline{\qquad\qquad}\,\%$, gælder

Når vi ganger *et tal* med **0,78** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,78** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

Øvelse 1.2

(a) Når vi ganger *et tal* med **1,62** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,62** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(b) Når vi ganger *et tal* med **0,965** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,965** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

(c) Når vi ganger *et tal* med **0,1** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,1** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

(d) Når vi ganger *et tal* med **1,108** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,108** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(e) Når vi ganger *et tal* med **1,26** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,26** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(f) Når vi ganger *et tal* med **0,87** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,87** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

(g) Når vi ganger *et tal* med **2** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **2** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

Øvelse 2.1

Antallet af nogle bakterier vokser sådan at antallet i løbet af en time bliver $1{,}4$ gange så stort. Nu er antallet 340.

Om 1 time er antallet __________ $\cdot$ $1{,}4$.

Om 2 timer er antallet $340 \cdot 1{,}4$ $\cdot$__________ .

Om 3 timer er antallet $340 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}4$ $\cdot$__________ .

Om x timer er antallet ____________________ .

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal timer fra nu.

y = antal bakterier.

Ligning: ______________________________ .

Øvelse 2.2

Vi køber 14 enheder af et stof. Det er et radioaktivt stof, så der bliver automatisk mindre og mindre af det. Stoffet henfalder sådan at mængden i løbet af et år bliver ganget med $0{,}96$.

Om 1 år er mængden _______ $\cdot$ $0{,}96$.

Om 2 år er mængden $14 \cdot 0{,}96$ $\cdot$__________ .

Om 3 år er mængden $14 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96$ $\cdot$__________ .

Om x år er mængden ____________________ .

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal år efter købet.

y = mængden af det radioaktive stof.

Ligning: ______________________________ .

Øvelse 3.1

Om en vare oplyses:

I år 2000 er forbruget 38 ton, og forbruget vokser 13,8 % hvert år.

Vi vil skrive en ligning der viser sammenhængen mellem forbrug og tidspunkt:

Vi vælger følgende betegnelser:

x = antal år efter _______________ .

y = _________________________ .

Nul år efter _______________ var forbruget _______________, dvs.

Når $x =$ _______ er $y =$ _______________ .

Et år senere er forbruget _______ % større.

For at udregne det tal der er _______ % større ganger vi med __________ :

Når $x = 1$ er y = _________ $\cdot$ _________ .

Når $x = 2$ er y = _________ $\cdot$ _________ $\cdot$ _________ = _________ $\cdot$ _________^{2} .

Den søgte ligning er _____________________________ .

Øvelse 3.2

I denne øvelse er x = antal måneder efter maj 2008 og y = omsætningen (i mio. kr.).

(a) Omsætningen i butik A stiger med 20% hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x: ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. $y =$ __________ .

(b) Omsætningen i butik B stiger med 0,2 mio. kr. hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x: ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. $y =$ __________ .

(c) Omsætningen i butik C falder med 20% hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x: ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. $y =$ __________ .

(d) Omsætningen i butik D falder med 0,2 mio. kr. hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x: ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. $y =$ __________ .

Øvelse 4.1

Om nogle bakterier i en næringsopløsning gælder

$$y = 350 \cdot 1{,}18^x$$

hvor y er antallet af bakterier og x er antal timer efter at bakterierne blev anbragt i skålen.

Hvad fortæller tallene 350 og 1,18 om antallet af bakterier?

Øvelse 4.2

I et computerspil afhænger gevinsten af den temperatur der opnås. Der gælder

$$y = 110 \cdot 0{,}98^x$$

hvor x er temperaturen (i $°C$) og y er antal mønter man vinder.

Hvad fortæller tallene 110 og 0,98 om spillet?

Øvelse 4.3

Man har indsprøjtet et antal enheder af et stof i et dyr. Der gælder

$$y = 16 \cdot 0{,}83^x$$

hvor y er antal enheder i kroppen, og x er antal timer efter indsprøjtningen.

Hvad fortæller tallene 16 og 0,83 om mængden af stoffet i kroppen?

Øvelse 5.1

Om en plante er oplyst at

$$y = 15 \cdot 1{,}08^x$$

hvor y er højden i cm, og x er antal uger efter udplantningen.

Hvor mange cm og hvor mange procent bliver planten højere i de første 5 uger efter udplantningen?

Øvelse 5.2

Et radioaktivt stof anbringes i en beholder. Der gælder

$$y = 130 \cdot 0{,}89^x$$

hvor y er antal gram der er tilbage, og x er antal år efter at stoffet blev anbragt i beholderen.

(a) Hvor mange gram og hvor mange procent aftager mængden af det radioaktive stof i løbet af de første 10 år?

(b) Hvor mange gram og hvor mange procent aftager mængden af det radioaktive stof i løbet af de næste 10 år?

Øvelse 6.1

For et firma gælder

$$y = 68 \cdot 1{,}14^x$$

hvor y er antal ansatte, og x er antal år efter 2002.

Hvor mange ansatte er der i 2005?

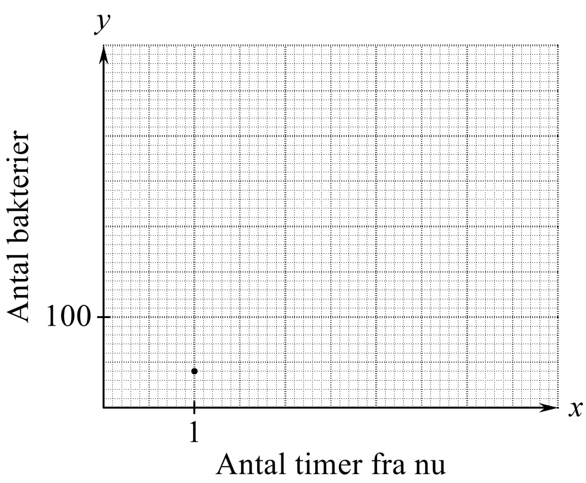
Hvilket år er antallet af ansatte ca. 150?

Øvelse 7.1

I koordinatsystemet er afsat et af punkterne på grafen der viser sammenhængen mellem følgende variable:

x = antal timer fra nu.

y = antal bakterier.



(a) Om 1 time er der _______ bakterier.

Hver time ganges antallet af bakterier med 1,75 .

(b) Om 2 timer er der _______ bakterier.

(c) Afsæt et grafpunkt der viser svaret på (b).

(d) Om 3 timer er der _______ bakterier.

(e) Afsæt et grafpunkt der viser svaret på (d).

(f) Afsæt nogle flere grafpunkter.

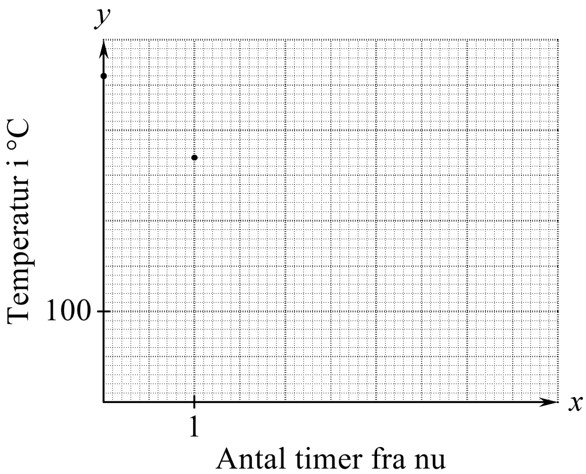
(g) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem y og x : __________________________ .

Øvelse 7.2

I koordinatsystemet er afsat to punkter på grafen der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal timer fra nu.

y = temperatur i °C.



(a) Nu er temperaturen _______ °C.

(b) Om 1 time er temperaturen _______ °C.

Hver time ganges temperaturen med samme tal.

(c) Om 2 timer er temperaturen _______ °C.

(d) Vis svaret fra (c) ved at afsætte et grafpunkt i koordinatsystemet.

(e) Afsæt flere grafpunkter i koordinatsystemet.

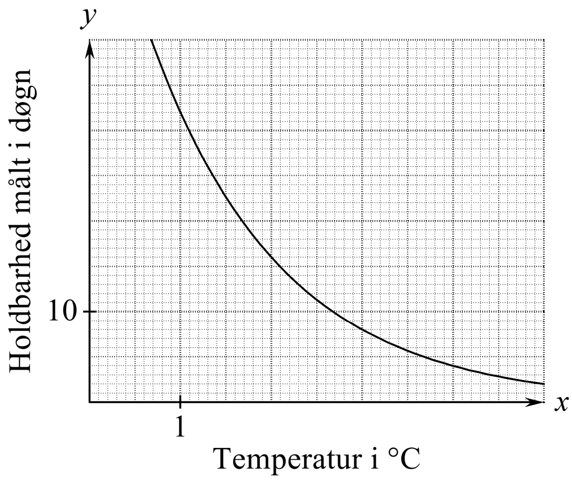
(f) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem y og x: _________________________ .

Øvelse 7.3

Grafen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = temperaturen (målt i °C).

y = varens holdbarhed (målt i døgn).



(a) Når temperaturen er 1 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(b) Når temperaturen er 2 °C, er holdbarheden _______ døgn.

Hver gang temperaturen bliver én grad højere, bliver holdbarheden ganget med et bestemt tal.

(c) Dette tal er _______ .

(d) Vis hvordan dette tal kan bruges til at udregne holdbarheden når temperaturen er 3 °C:

______________________________ .

(e) Hvis vi aflæser på grafen, så får vi at når temperaturen er 3 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(f) Når temperaturen er 0 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(g) Når temperaturen er 10 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(h) Når temperaturen er x °C, er holdbarheden ____________________ døgn.

(i) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem y og x: _________________________ .

Øvelse 7.4

Ligningen

$$y = 0{,}4 \cdot 1{,}6^x$$

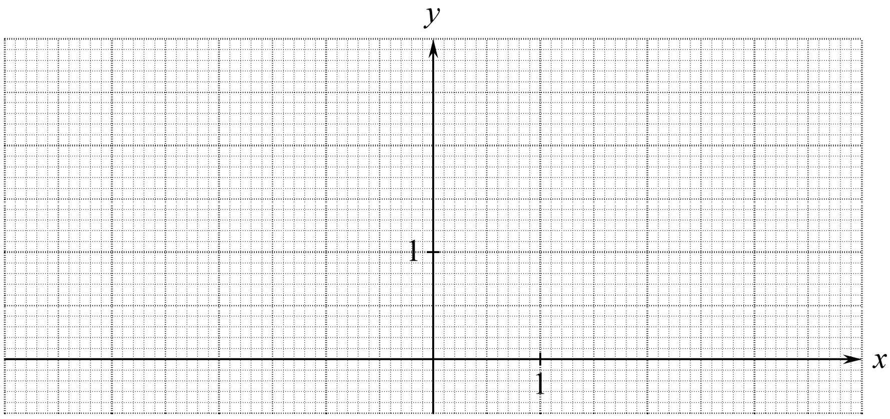
viser sammenhængen mellem to variable y og x.

(a) Find ud af hvad y er når $x = -1$, og afsæt denne oplysning som et punkt i koordinatsystemet.

Udregning: $y =$ ________________ = ________ .

(b) Udfyld tabellen, og tegn grafen (i ramme 7 i teorihæftet ser vi at sådan en graf er en krum kurve uden knæk).

x:	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y:									



Øvelse 7.5

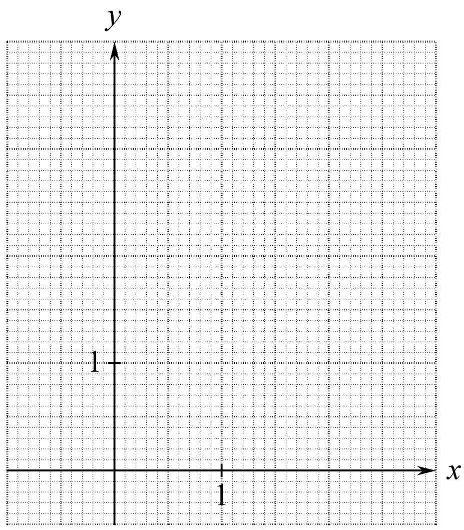
Ligningen

$$y = 1{,}5 \cdot 0{,}4^x$$

viser sammenhængen mellem to variable y og x.

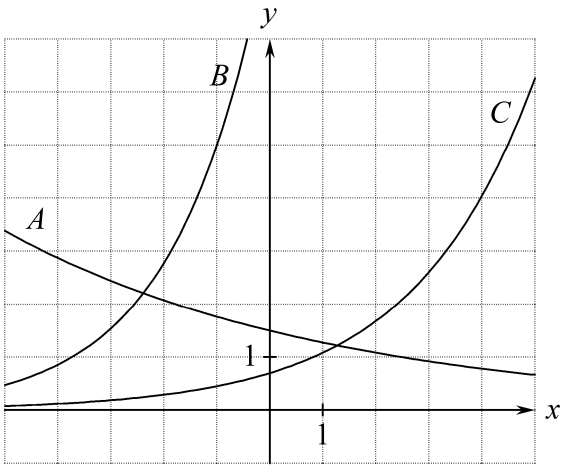
Udfyld tabellen og tegn grafen.

x:	–1	0	1	2	3
y:					



Øvelse 7.6

Figuren viser graferne for tre eksponentielle sammenhænge $y = b \cdot a^x$ som vi kalder A, B og C.



For hver af dem skal du afgøre om

$0 < a < 1$ eller $1 < a$

og begrunde det ved hjælp af sætning 7.3 i teorihæftet.

Skriv $0 < a < 1$ eller $1 < a$.	Skriv *voksende* eller *aftagende*.

For A er ___________ da A er ________________ .

For B er ___________ da B er ________________ .

For C er ___________ da C er ________________ .

Øvelse 7.7

For hver af de eksponentielle sammenhænge $y = b \cdot a^x$ nedenfor skal du skrive om den er voksende eller aftagende, og begrunde det.

(a) Sammenhængen $y = 1.2 \cdot 1.03^x$ er *voksende* for $a > 1$ da $a =$ 1,03 .

(b) Sammenhængen $y = 0{,}6 \cdot 2{,}4^x$ er _______________ for ____________ da $a =$ ________ .

(c) Sammenhængen $y = 5 \cdot 0{,}04^x$ er _______________ for ____________ da $a =$ ________ .

(d) Sammenhængen $y = 1{,}6 \cdot 0{,}71^x$ er _______________ for ____________ da $a =$ ________ .

(e) Sammenhængen $y = 1{,}0013^x$ er _______________ for ____________ da $a =$ ________ .

Øvelse 7.8

(a) Et punkt kan trækkes frem og tilbage på grafen for $y = 0{,}06 \cdot 1.1^x$.
Hvis punktets x-koordinat bliver større, vil dets y-koordinat blive _______________ .

(b) Et punkt kan trækkes frem og tilbage på grafen for $y = 1200 \cdot 0{,}995^x$.
Hvis punktets x-koordinat bliver større, vil dets y-koordinat blive _______________ .

(c) Et punkt kan trækkes frem og tilbage på grafen for $y = 4 \cdot 0{,}011^x$.
Hvis punktets x-koordinat bliver større, vil dets y-koordinat blive _______________ .

Øvelse 8.1

Grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng går gennem punkterne
$(-1\ ,\ 16)$ og $(2\ ,\ 6{,}75)$.

Bestem ligningen for denne sammenhæng.

Øvelse 8.2

Vi indsprøjter et stof i kroppen på et svin. Mængden af stoffet i kroppen kan beskrives ved

(1) $y = b \cdot a^x$

hvor x er antal timer efter at vi indsprøjtede stoffet, og y er antal milligram af stoffet der er tilbage i kroppen.

Efter 4 timer måler vi at der er 9,6 milligram tilbage.
Efter 10,5 timer måler vi at der er 5,2 milligram tilbage.

(a) Hvilke af disse fire målte tal er x-værdier, og hvilke er y-værdier?

(b) De målte tal viser at grafen for sammenhængen (1) går gennem punkterne

(,) og (,) .

(c) Bestem ligningen for sammenhængen mellem x og y.

(d) Hvor meget er der tilbage af stoffet 30 timer efter at vi indsprøjtede det?

Øvelse 8.3

På skærmen er der en figur. Når vi ændrer bredden, så ændres højden automatisk, og der gælder at

(1) $y = b \cdot a^x$

hvor x er bredden og y er højden.

Højden er 2,20 når bredden er 1.
Højden er 9,19 når bredden er 16.

(a) Udregn a og b i ligningen (1).

(b) Hvad er bredden når højden er 4,9?

Øvelse 8.4

En øl sættes ind i et køleskab. <u>Temperaturforskellen mellem øl og køleskab</u> kan beskrives ved en sammenhæng af typen

$$y = b \cdot a^x$$

hvor y er temperaturforskellen, målt i °C, og x er antal minutter øllen har stået i køleskabet.
Efter 3 minutter i køleskabet er temperaturforskellen 31 °C, og efter 13 minutter er temperaturforskellen 28 °C.

(a) Bestem a og b.

(b) Hvor lang tid skal øllen stå i køleskabet før temperaturforskellen er 1 °C?

(c) Hvad var temperaturforskellen da øllen blev stillet i køleskabet?

(d) Hvor mange procent falder temperaturforskellen på et minut?

(e) Hvor mange procent falder temperaturforskellen på en time?

Øvelse 9.1

Tabellen viser hvordan mængden af et stof i en opløsning er aftaget.

Timer efter at opløsningen blev lavet:	0	2	4	6	8	10	12
Mængde i gram:	14	12	10	8	7	6	5

(1) Hvis vi når opløsningen lige er lavet, stiller spørgsmålet "Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er?", hvad er så svaret?

(2) Hvis vi 2 timer efter at opløsningen er lavet, stiller spørgsmålet "Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er?", hvad er så svaret?

(3) Hvis vi 4 timer efter at opløsningen er lavet, stiller spørgsmålet "Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er?", hvad er så svaret?

Øvelse 9.2

For en eksponentielt voksende sammenhæng med fordoblingskonstant 6 oplyses:

Når $x = 3$ er $y = 7$.

Brug oplysningen om fordoblingskonstant til at bestemme flere eksempler på sammenhørende værdier af x og y:

Når $x =$ _____ er $y =$ _____ . Når $x =$ _____ er $y =$ _____ .

Øvelse 9.3

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = antal år efter 2000

y = antal indbyggere

Det oplyses at fordoblingskonstanten er 4,2 .

Hvad fortæller tallet 4,2 om antallet af indbyggere?

Øvelse 9.4

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = forsøgets varighed (i minutter)

y = mængde der er tilbage (målt i gram når forsøget er slut)

Det oplyses at halveringskonstanten er 18 .

Hvad fortæller tallet 18 om mængden der er tilbage?

Øvelse 9.5

Punkterne $(x, y) = (10, 15)$ og $(x, y) = (20, 30)$ ligger på grafen for en eksponentielt voksende sammenhæng.

(a) Hvad er fordoblingskonstanten?

(b) Brug fordoblingskonstanten til at finde to punkter til på grafen.

Øvelse 9.6

Tabellen viser nogle sammenhørende værdier af x og y for en eksponentielt aftagende sammenhæng.

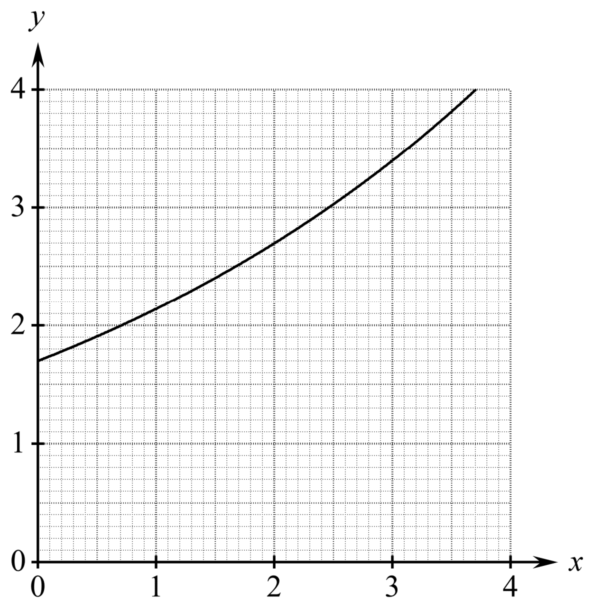
Hvad er halveringskonstanten?

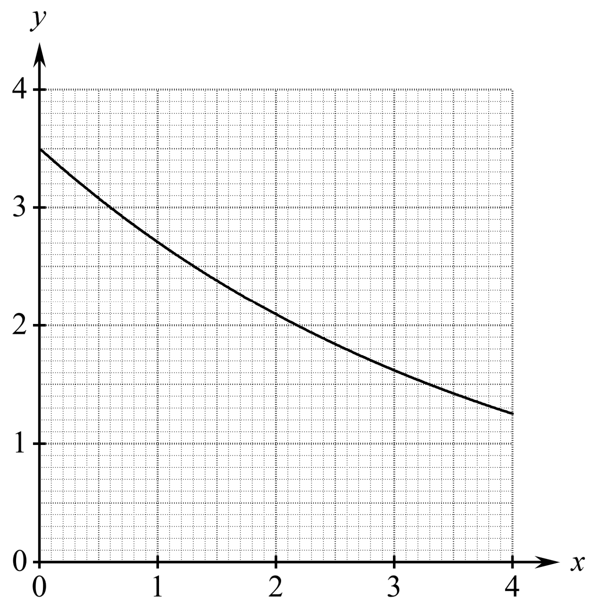
x	4	8	13
y	6,9	4,0	2,0

Øvelse 9.7

(a) Figuren nedenfor til venstre viser grafen for en eksponentielt voksende sammenhæng.
Aflæs fordoblingskonstanten.

(b) Figuren nedenfor til højre viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.
Aflæs halveringskonstanten.

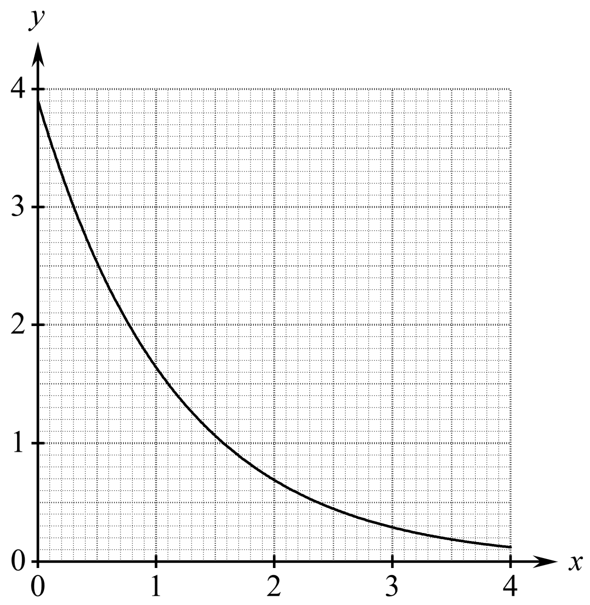


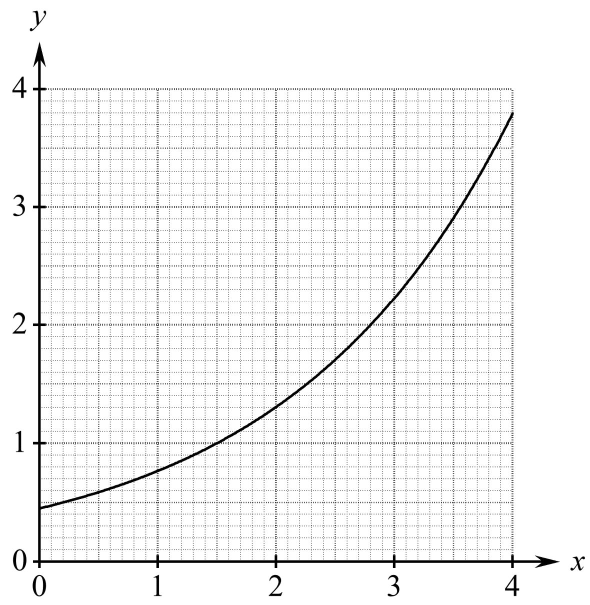


Øvelse 9.8

(a) Figuren nedenfor til venstre viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.
Aflæs halveringskonstanten.

(b) Figuren nedenfor til højre viser grafen for en eksponentielt voksende sammenhæng.
Aflæs fordoblingskonstanten.





Øvelse 10.1

Bestem halveringskonstanten for den eksponentielt aftagende sammenhæng $y = 0{,}95 \cdot 0{,}23^x$.

Øvelse 10.2

Bestem fordoblingskonstanten for den eksponentielt voksende sammenhæng $y = 0{,}13 \cdot 1{,}016^x$.

Øvelse 10.3

På en skærm kan vi ændre en trekant ved at trække med musen. Der gælder

$$y = 4 \cdot 1{,}06^x$$

hvor y er højden (i cm) og x er grundlinjen (i cm).

Bestem fordoblingskonstanten, og skriv hvad dette tal fortæller om højden og grundlinjen.

Øvelse 11.1

(a) Når $x = 0{,}7$ er $y =$

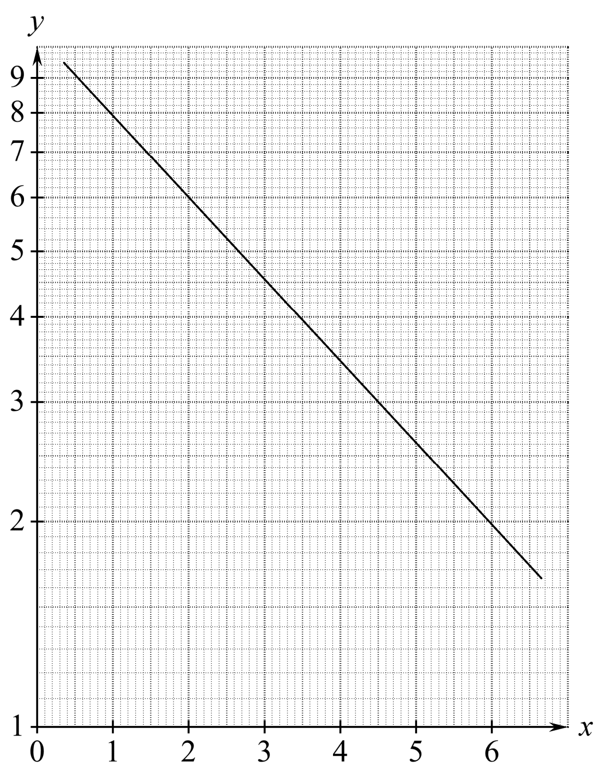
(b) Når $y = 8{,}6$ er $x =$

(c) Når $x = 5{,}8$ er $y =$

(d) Når x bliver 4 enheder større, vil y blive _____% mindre.

(e) $T_{\frac{1}{2}} =$

(f) I koordinatsystemet til højre skal du tegne grafen for en eller anden eksponentielt voksende sammenhæng hvor $T_2 = 1{,}3$.



Øvelse 12.1

Tabellen viser en virksomheds overskud.

År	1996	1998	2000	2002	2004	2006
Overskud (mio. kr.)	0,53	0,74	1,1	1,4	1,8	2,6

Udviklingen kan med god tilnærmelse beskrives med ligningen

$$y = b \cdot a^x$$

hvor y er overskuddet (målt i mio. kr.), og x er antal år efter 1996.

Hvad skal a og b være for at ligningen $y = b \cdot a^x$ passer bedst med tabellen?

Øvelse 12.2

Tabellen viser sammenhørende værdier af et lands eksport og tiden.

År	1990	1992	1994	1996	1998
Eksport i mio. kr.	1070	1460	1960	2620	3540

I en model antages det at eksporten kan beskrives ved en model af typen

$$y = b \cdot a^t$$

hvor y er eksporten (i mio. kr.), og t er antal år efter 1990.

(a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b.

(b) Benyt modellen til at beregne eksporten i 2005, og sammenlign med den faktiske eksport i 2005 som var 10400 mio. kr.

Øvelse 12.3

Tabellen viser på forskellige tidspunkter indholdet af et radioaktivt stof i et præparat.

År efter fremstillingen	4	5	6	7	8
Gram	0,71	0,69	0,66	0,64	0,60

Udviklingen i mængden af det radioaktive stof i præparatet kan beskrives ved en model af typen

$$y = b \cdot a^t$$

hvor t er tiden (målt i år efter præparatets fremstilling), og y er indholdet af det radioaktive stof (målt i gram).

(a) Bestem tallene a og b.

(b) Forklar hvad tallet a fortæller om det radioaktive stof i præparatet.

(c) Hvornår er mængden af det radioaktive stof faldet til halvdelen af den mængde der var da præparatet lige var fremstillet?

Øvelse 13.1

I en prognose for antallet af gule mus i en zoo bruger man modellen

$$y = 150 \cdot 1{,}40^x$$

hvor y er antallet af mus og x er antal år efter 2008.

(a) I løbet af 1 år bliver antallet af mus ganget med ________ .

(b) I løbet af 1 år vokser antallet af mus til ________ % af hvad det var.

(c) I løbet af 1 år bliver antallet af mus ________ % større end det var.

(d) I løbet af 3 år bliver antallet af mus ganget med ________ $\overline{}$ = ___________ .

(e) I løbet af 3 år vokser antallet af mus til ________ % af hvad det var.

(f) I løbet af 3 år bliver antallet af mus ________ % større end det var.

(g) I løbet af h år bliver antallet af mus ganget med ___________ .

Øvelse 13.2

For en bestemt maskine er mængden af smøremiddel i maskinen (målt i gram) bestemt ved

$$y = 4{,}34 \cdot 0{,}831^x$$

hvor y er mængden af smøremiddel i maskinen x timer efter at den blev tændt.

(a) I løbet af 1 time bliver mængden ganget med ________ .

(b) I løbet af 1 time ændres mængden til ________ % af hvad den var.

(c) I løbet af 1 time ændres mængden ________ %.

(d) I løbet af 1 time falder mængden ________ %.

(e) I løbet af 5 timer bliver mængden ganget med ________ $\overline{}$ = ___________ .

(f) I løbet af 5 timer ændres mængden til ________ % af hvad det var.

(g) I løbet af 5 år ændres mængden ________ %.

(h) I løbet af 5 år falder mængden ________ %.

(i) I løbet af h timer bliver mængden ganget med ___________ .

Øvelse 13.3

Sammenhængen mellem vægt og pris er $y = 4 \cdot 1{,}09^x$ hvor y er pris i kr., og x er vægt i gram.

Hvis vægten skal være 10 gram større, hvad bliver prisen så ganget med,
og hvor mange procent større bliver prisen?

Øvelse 13.4

Når lys trænger ned i vand, så bliver lysintensiteten mindre jo længere man kommer ned i vandet. For en dam i en park kan man udregne lysintensiteten ved hjælp af formlen $y = 100 \cdot 0{,}988^x$ hvor x er dybden målt i cm under vandets overflade.

Hvis man kommer 30 cm længere ned i vandet, hvad bliver lysintensiteten så ganget med,
og hvor mange procent mindre bliver lysintensiteten.