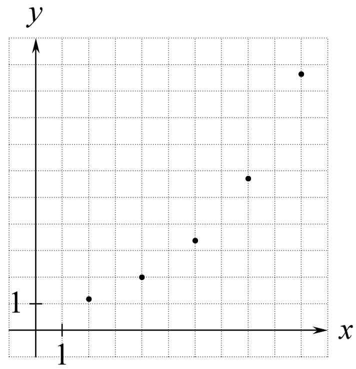
Numerisk differentiation ud fra tabel

Når man taler om *numeriske* udregninger, så mener man *tilnærmede* udregninger.

Eksempel Begrundelse for "reglen for numerisk differentiation ud fra tabel"

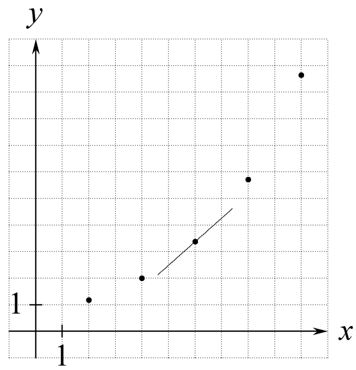
Om en funktion f har vi ikke andre oplysninger end følgende tabel:

x	2	4	6	8	10
$f(x)$	1,18	2,00	3,38	5,71	9,65



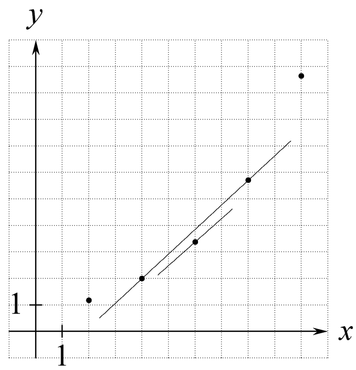
På øverste figur har vi tegnet grafpunkterne svarende til disse tabelværdier.

Vi vil udregne en tilnærmet værdi for $f'(6)$.
$f'(6)$ er hældningskoefficienten for tangenten i grafpunktet med x-koordinat 6.



Ud fra punkterne skønner vi at tangenten må ligge ca. som den linje vi har tegnet på den midterste figur.

På nederste figur har vi tegnet en sekant. Vi ser at denne sekants hældningskoefficient må være tæt på tangentens hældningskoefficient.



Sekantens hældningskoefficient kan vi udregne sådan:

$$\frac{f(8)-f(4)}{8-4} = \frac{5{,}71-2{,}00}{8-4} = 0{,}9275$$

Altså er

$$f'(6) \approx 0{,}93$$

Regel for numerisk differentiation ud fra en tabel

Hvis f er differentiabel, og tallet m ligger midt mellem tallene a og b, og afstanden mellem a og b er lille, så er

$$f'(m) \approx \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Eksempel Hvor nøjagtig er ovenstående regel?

x	0,8	1,4	2	2,6	3,2
$f(x)$	0,128	0,686	2	4,394	8,192

Hvis $f(x)=\frac{1}{4}x^3$, er $f'(x)=\frac{3}{4}x^2$ så $f'(2)=3$. Vi forestiller os nu at vi ikke kender forskriften for $f(x)$, og at vi ikke ved andet om $f(x)$ end det der står i tabellen. Vi bruger reglen ovenfor og får

$$f'(2) \approx \frac{f(2{,}6)-f(1{,}4)}{2{,}6-1{,}4} = \frac{4{,}394-0{,}686}{2{,}6-1{,}4} = 3{,}09$$

hvilket er tæt på 3 der er den korrekte værdi.