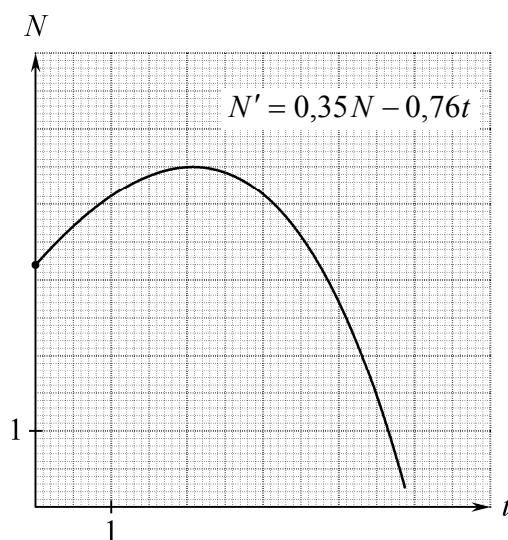


# Opstilling af model ved hjælp af differentialkvotient



2010 Karsten Juul

Til eleven

Dette hæfte giver dig mulighed for at arbejde sådan med nogle begreber at der er god mulighed for at der går noget op for dig.

Du skal selv skrive hæftet færdigt ved at udfylde de tomme pladser. Brug blyant og viskelæder.

## Indhold

1. Ligning for væksthastighed .....	1
2. Udregne fremtidig størrelse ud fra væksthastighed .....	4
3. Udføre udregningerne med Nspire 1.7 .....	6
4. Undersøge modeller .....	8

Opstilling af model ved hjælp af differentialkvotient

1. udgave 2010

© 2010 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra [www.mat1.dk](http://www.mat1.dk)

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til [kj@mat1.dk](mailto:kj@mat1.dk) som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om hold, lærer og skole.

# 1. Ligning for væksthastighed

## Eksempel 1.1

På en skærm ser vi en stolpe der vokser. Vi kan hele tiden se tidspunkt, højde og højdens væksthastighed. Vi aflæser følgende:

Tidspunkt i minutter	12	15	20
Højde i cm	3,32	4,48	7,39
Væksthastighed i cm pr. minut	0,332	0,448	0,739

Det ser ud til at der gælder følgende regel: Når vi kender højden, kan vi udregne dens væksthastighed ved at \_\_\_\_\_.

Vi vil skrive denne regel som en ligning.

Derfor kalder vi højden  $h$ . Så kan vi skrive væksthastigheden sådan:  $h'$ .

Nu kan vi skrive reglen som følgende ligning:  $h' =$  \_\_\_\_\_.

## Eksempel 1.2

Nogle bakterier er et sted hvor der er rigelig plads og næring.

Når der er 1000 bakterier, er væksthastigheden (tilvækst pr. minut) 8 bakterier.

Når **der er dobbelt så mange bakterier til at dele sig**, dvs.

når der er 2000 bakterier, er tilvæksten pr. minut \_\_\_\_\_ bakterier.

Når der er 4000 bakterier, er tilvæksten pr. minut \_\_\_\_\_ bakterier.

Når der er 1500 bakterier, er tilvæksten pr. minut \_\_\_\_\_ bakterier.

Når antal er 1000, fås tilvækst pr. minut ved at gange antal bakterier med \_\_\_\_\_.

Når antal er 1500, fås tilvækst pr. minut ved at gange antal bakterier med \_\_\_\_\_.

Når antal er 2000, fås tilvækst pr. minut ved at gange antal bakterier med \_\_\_\_\_.

Når antal er 4000, fås tilvækst pr. minut ved at gange antal bakterier med \_\_\_\_\_.

Antallet af bakterier kalder vi  $b$ . Så kan vi skrive væksthastigheden sådan: \_\_\_\_\_.

Når vi kender antallet af bakterier,  
kan vi udregne væksthastigheden ved hjælp af ligningen: \_\_\_\_\_.

### Eksempel 1.3

På en skærm er der en figur der vokser. Vi kan hele tiden se tidspunkt, diameter og diameterens væksthastighed. Vi har aflæst følgende:

Tidspunkt i minutter	1,2	1,5	1,9
Diameter i cm	5,3	6,5	8,7
Væksthastighed i cm pr. minut	3,3	4,5	6,7

Det ser ud til at der gælder følgende regel: Når vi kender diameteren, kan vi udregne dens væksthastighed ved at \_\_\_\_\_ .

Vi vil skrive denne regel som en ligning.

Derfor kalder vi diameteren  $d$  . Så kan vi skrive væksthastigheden sådan \_\_\_\_\_ .

Nu kan vi skrive reglen som følgende ligning: \_\_\_\_\_ .

### Eksempel 1.4

Koncentrationen af et stof aftager:

Tidspunkt (s)	0	2,5	7,5
Koncentration (mol/L)	4	2	1
Væksthastighed (mol/L/s)	-1,6	-0,4	-0,1

Ud fra disse tabelværdier kan vi gætte en regel for hvordan vi kan udregne væksthastigheden når vi kender koncentrationen.

Når vi kalder koncentrationen for  $a$  , kan vi skrive reglen som følgende ligning:

\_\_\_\_\_

### Eksempel 1.5

I et computerspil stiger prisen på en vare:

Tidspunkt (timer)	1	2	4
Pris (kr.)	0,72	4,39	49,6
Væksthastighed (kr. pr. time)	1,72	6,39	53,6

Ud fra disse tabelværdier kan vi gætte en regel for hvordan vi kan udregne væksthastigheden når vi kender tidspunkt og pris.

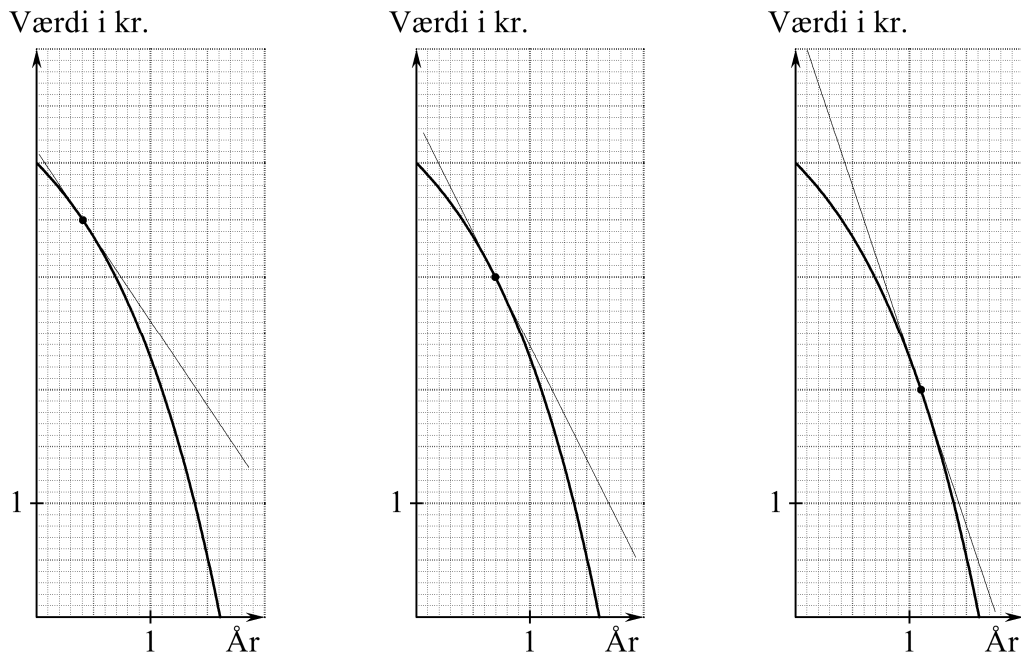
Når vi kalder prisen  $p$  og tidspunktet  $t$  , kan vi skrive reglen som følgende ligning:

\_\_\_\_\_

## Eksempel 1.6

Grafen viser hvordan værdien af en vare falder.

Grafen er tegnet tre gange. I hvert koordinatsystem er afsat ét punkt på grafen. Tangenten i dette punkt er tegnet.



På det tidspunkt hvor værdien er 3 kr., er væksthastigheden -2 kr. pr. år.

På det tidspunkt hvor værdien er \_\_\_\_\_ kr., er væksthastigheden \_\_\_\_\_ kr. pr. år.

På det tidspunkt hvor værdien er \_\_\_\_\_ kr., er væksthastigheden \_\_\_\_\_ kr. pr. år.

Ud fra disse tal kan vi gætte en regel for hvordan vi kan udregne væksthastigheden på et tidspunkt hvor vi kender varens værdi. Når vi kalder værdien  $v$ , kan vi skrive reglen som følgende ligning: \_\_\_\_\_

## Eksempel 1.7

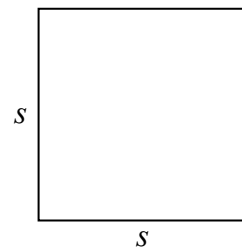
I et kvadrat er sidens væksthastighed proportional med arealet.  
Der gælder altså følgende ligning

\_\_\_\_\_

hvor  $k$  er en konstant.

Når sidens længde er 2, er sidens væksthastighed 12.

Ud fra denne oplysning kan vi finde konstanten  $k$  sådan:



## Eksempel 1.8

Der ledes salt ud i en sø med hastigheden 1,3 kg pr. dag. Saltet forlader søen med en hastighed på 8 % pr. dag (8 % af den mængde salt der er i søen på det pågældende tidspunkt).

Når mængden af salt i søen er nået op på 5 kg, vokser mængden med hastigheden \_\_\_\_\_ kg pr. dag.

Når mængden af salt i søen er nået op på 16 kg, vokser mængden med hastigheden \_\_\_\_\_ kg pr. dag.

På et tidspunkt hvor mængden af salt i søen er kendt, kan væksthastigheden for mængden udregnes ved hjælp af ligningen \_\_\_\_\_ hvor \_\_\_\_\_ betegner mængden af salt i søen målt i kg.

Som tiden går bliver mængden af salt i søen \_\_\_\_\_ *større* og \_\_\_\_\_ *større* , og væksthastigheden bliver \_\_\_\_\_ og \_\_\_\_\_ .

## 2. Udregne fremtidig størrelse ud fra væksthastighed

### Eksempel 2.1

Et kar fyldes med væske. Væskehøjdens væksthastighed er hele tiden 8,5 mm pr. time.

I løbet af 7 timer bliver væskehøjden \_\_\_\_\_ mm større.

I løbet af 0,4 timer bliver væskehøjden \_\_\_\_\_ mm større.

På et tidspunkt er højden 42,51 mm . 0,02 timer senere er højden \_\_\_\_\_ mm.

### Eksempel 2.2

Vægten af nogle bakterier vokser.

$t$  = tidspunktet (målt i minutter)

$M$  = vægten (målt i gram)

$M'$  = \_\_\_\_\_ (målt i \_\_\_\_\_ )

Beskriv betydningen af symbolet  $M'$  ligesom betydningen af  $M$  og  $t$  er beskrevet.

På ethvert tidspunkt kan væksthastigheden  $M'$  udregnes ud fra vægten sådan:

$$(1) \quad M' = 0,012 \cdot M - 1,5 .$$

På det tidspunkt hvor vægten er 500 gram, vokser vægten med hastigheden \_\_\_\_\_ gram pr. minut.

På det tidspunkt hvor vægten er 600 gram, vokser vægten med hastigheden \_\_\_\_\_ gram pr. minut.

Væksthastigheden er ikke den samme hele tiden.

Væksthastigheden bliver \_\_\_\_\_ og \_\_\_\_\_ .

**Vi går ud fra at væksthastigheden i løbet af 0,01 minut ændrer sig så lidt at vi kan regne som om den ikke ændrede sig.**

*Eksemplet fortsætter på næste side.*

På tidspunktet  $t = 4$  er vægten 500 gram.

På tidspunktet  $t = 4$  er væksthastigheden \_\_\_\_\_ gram pr. minut *ifølge ligning (1)*.

I det første 0,01 minut efter tidspunktet  $t = 4$  bliver vægten \_\_\_\_\_ gram større.

På tidspunktet  $t = 4,01$  er vægten \_\_\_\_\_ gram. ← Skriv alle 6 cifre!

På tidspunktet  $t = 4,01$  er væksthastigheden \_\_\_\_\_ gram pr. minut *ifølge ligning (1)*.

På tidspunktet  $t = 4,02$  er vægten \_\_\_\_\_ gram. ← Skriv alle 10 cifre!

I første skridt ovenfor udregnede vi vægten på tidspunktet  $t = 4,01$ . I andet skridt udregnede vi vægten på tidspunktet  $t = 4,02$ . Efter \_\_\_\_\_ skridt mere har vi udregnet vægten på tidspunktet  $t = 6$ . (Nspire er ca. et sekund om at gennemføre dette. I næste afsnit står hvad vi skal taste).

### Eksempel 2.3

En stolpes højde vokser. Højden  $h$  måles i cm, og tiden  $t$  måles i minutter. Følgende er oplyst:

Husk at få alle lommeregnerens cifre frem. På Nspires regneside kan dette gøres ved at kopiere facit til ny linje.

På tidspunktet  $t = 16$  er højden  $h = 1,40$ .

På ethvert tidspunkt er væksthastigheden  $h' = 0,025 \cdot h$ .

På tidspunktet  $t = 16$  er væksthastigheden  $h' =$  \_\_\_\_\_.

Væksthastigheden vokser hele tiden, men vi går ud fra at den næsten ikke når at ændre sig i løbet af 0,01 minut. Så gælder:

Når  $t = 16,01$ , er

$$h = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Når } t = 16,01, \text{ er } h' = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Når  $t = 16,02$ , er

$$h = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Når } t = 16,02, \text{ er } h' = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Når  $t = 16,03$ , er

$$h = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$


Hvis vi fortsætter på denne måde til  $t = 20$ , finder vi ud af hvad  $h$  er når  $t = 20$ .


(Nspire er ca. et sekund om at gennemføre dette. I næste afsnit står hvad vi skal taste).

## 3. Udføre udregningerne med Nspire 1.7

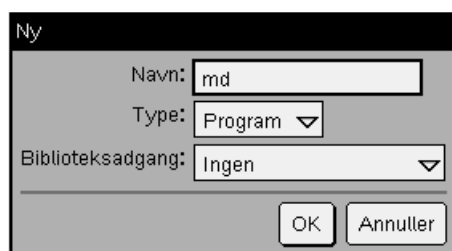
### Eksempel 3.1

I dette eksempel skal du få Nspire til at udføre de udregninger der er omtalt i eksempel 2.3 .

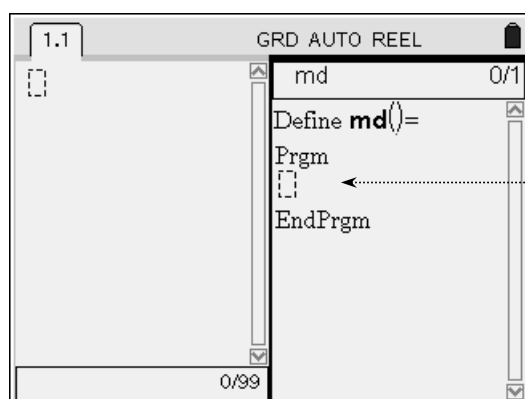
Start på et nyt dokument (  6:Nyt dokument ) og vælg regne-side ( 1:Tilføj Grafregner ). Hvis der er mere end én fane øverst, så er du ikke begyndt forfra.


Vælg:  9: Funktioner og programmer 1: Progradeditor 1: Ny

Giv programmet navnet md ( "m" for model, og "d" for differentialkvotient) og tast  .





Nu ser skærmen sådan ud:




Mellem linjerne **Prgm** og **EndPrgm** skal vi skrive de kommandoer som Nspire skal udføre når vi i regnevinduet taster **md()**  .



Du kan skifte mellem de to vinduer ved at taste   .


Skillelinjen mellem de to vinduer kan du flytte sådan:


  5: Sidelayout 1: Brugerdefineret opdeling


Tryk nogle gange på venstrepil eller højrepil og afslut med  .

Når du taster programmet der er vist på næste side, kan du bruge følgende oplysninger:

Pilen → er i øverste linje i symbolmenuen der fås frem ved at taste   .



Tast **Local** sådan:  3: Definer variable 1: Local

Tast **Disp** sådan:  6: I/O 1: Disp

Tast **While ...** sådan:  4: Kontrol 6: While...EndWhile

(I stedet for at vælge Local, Disp og While...EndWhile i menuen kan du taste dem. I stedet for → kan du taste =: som laves om til → når du gemmer programmet).



For at gøre programmet mere overskueligt er der lavet tomme linjer og indrykning ved hjælp af tasterne  og .

```
Define md()=
Prgm
[ ]
  Local t
  16 → t
[ ]
  Local h
  1.4 → h
[ ]
  Local dh
[ ]
  While t < 20
    0.025·h → dh
    h + dh·0.01 → h
    t + 0.01 → t
  EndWhile
[ ]
  Disp h
[ ]
EndPrgm
```

En plads i Nspires lager giver vi navnet  $t$ .

På denne plads anbringer vi tallet 16.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Tallet på pladsen  $h$  ganger vi med 0,025.  
Resultatet anbringer vi på pladsen  $dh$ .


Til tallet på pladsen  $h$  lægger vi 0,01 gange tallet på pladsen  $dh$ . Resultatet anbringer vi på pladsen  $h$  i stedet for det tal der stod i forvejen.

\_\_\_\_\_


\_\_\_\_\_





Vi undersøger om tallet på pladsen  $t$  er mindre end 20.  
Hvis det er, udfører vi igen de tre kommandoer mellem While og EndWhile.

Tallet på pladsen  $h$  skriver vi i regnevinduet.

Afslut sådan:  2: Kontroller syntaks og gem  
1: Kontroller syntaks og gem.



Skift til regnevinduet sådan:  .

Tast `md()`  for at få programmet til at udregne resultatet (og skriv det i øvelse 2.3).

Gem dokumentet (du skal senere ændre i det mange gange):   1: Filer 3: Gem  
Tast filnavnet `model-diff-23` så du kan finde det igen, og tast . Luk ( 6: Nyt dokument)

### **Afbryde kørende Nspire-program**

Hold tasten nede i noget tid:



-  eller  på lommeregner.
- F12** eller **Pause** på Windows.
- F5** på Mac.

### **Eksempel 3.2**

Vi vil nu løse problemet fra eksempel 2.2. Udfyld de tomme pladser på figuren til højre så programmet finder vægten til tiden  $t = 6$ .

I programmet står  $h$  og  $dh$  i stedet for  $M$  og  $M'$ . Hvis du vil skrive  $m$  og  $dm$ , så skal du rette det alle steder.

```
[ ]
  Local t
  [ ] → t
[ ]
  Local h
  [ ] → h
[ ]
  Local dh
[ ]
  While t < [ ]
    [ ] → dh
    h + dh·0.01 → h
    t + 0.01 → t
  EndWhile
[ ]
  Disp h
[ ]
```

Åbn dokumentet `model-diff-23` og gem det under navnet `model-diff-22` (  1: Filer 4: Gem som).

Skriv rettelserne til programmet.  
Få Nspire til at kontrollere programmet og gemme det.

Kør programmet. Hvis du har tastet rigtigt, skriver Nspire tallet 509,108, dvs. på tidspunktet 6 minutter er vægten 509 gram.

## 4. Undersøge modeller

Husk at gemme programmet hver gang du har ændret det. Ellers får du det foregående resultat igen.

### Eksempel 4.1

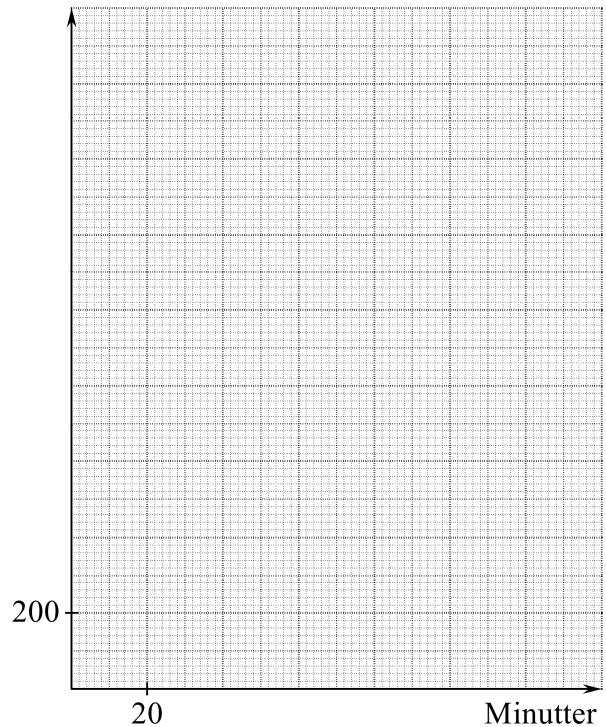
Vi ser stadig på bakterierne fra eksemplerne 2.2 og 3.2. Ved hjælp af programmet i dokumentet model-diff-22 udfylder vi tabellen:

$t$	20	40	60
$M$			

$t$	80	100	120
$M$			

Vi afsætter disse støttepunkter i koordinatsystemet til højre og tegner grafen for  $M$ .

Antal bakterier



### Eksempel 4.2

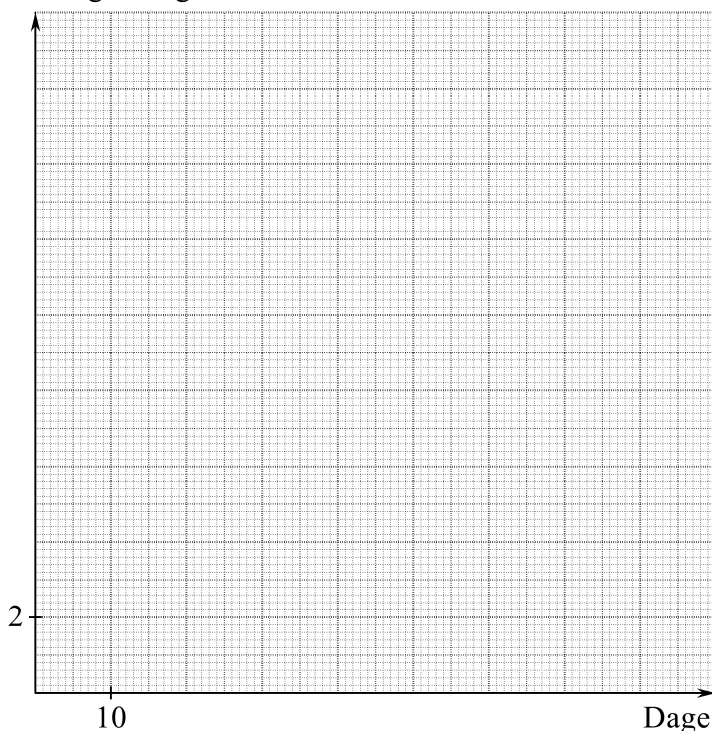
I eksempel 1.8 blev der ledt salt ud i en sø. Til tiden  $t = 0$  er der 5 kg salt i søen. Nedenfor til højre viser vi hvordan programmet md() skal ændres for at udregne mængden af salt i søen på tidspunktet  $t = 15$ .

Vi bruger programmet md() til at udfylde tabellen der viser hvordan saltmængden vokser:

$t$	0	5	15	30	50	80

Vi afsætter disse støttepunkter i koordinatsystemet og tegner grafen.

Saltmængde i kg



```

Local t
  [ ] → t
Local h
  [ ] → h
Local dh
  [ ]
While t < [ ]
  [ ] → dh
  h + dh·0.01 → h
  t + 0.01 → t
EndWhile
Disp h
  
```

### Eksempel 4.3

Vi måler tiden  $t$  i uger. I et bur er forholdene for en bestemt slags dyr sådan at deres antal  $N$  har væksthastigheden

$$N' = 0,439 \cdot (620 - N) .$$

Hvis der er 860 af disse dyr i buret, er væksthastigheden \_\_\_\_\_ dyr pr. uge.

Hvis væksthastigheden skal være positiv, skal antallet af dyr være \_\_\_\_\_.

**Tilfælde A:** På tidspunktet  $t = 0$  er antallet  $N = 860$ .

Ved hjælp af programmet `md()` udregner vi at på tidspunktet  $t = 2,5$  er antallet \_\_\_\_\_ . På dette tidspunkt er væksthastigheden \_\_\_\_\_ dyr pr. uge.

**Tilfælde B:** På tidspunktet  $t = 0$  er antallet  $N = 700$ .

På tidspunktet  $t = 0$  er væksthastigheden \_\_\_\_\_ dyr pr. uge.

**Tilfælde C:** På tidspunktet  $t = 0$  er antallet  $N = 620$ .

På tidspunktet  $t = 0$  er væksthastigheden \_\_\_\_\_ dyr pr. uge,

så på tidspunktet  $t = 0,01$  er antallet af dyr \_\_\_\_\_ .

På tidspunktet  $t = 0,01$  er væksthastigheden \_\_\_\_\_ dyr pr. uge.

så på tidspunktet  $t = 0,02$  er antallet af dyr \_\_\_\_\_ .

**Tilfælde D:** På tidspunktet  $t = 0$  er antallet  $N = 260$ .

På tidspunktet  $t = 0$  er væksthastigheden \_\_\_\_\_ dyr pr. uge.

På tidspunktet  $t = 20$  er antallet af dyr \_\_\_\_\_

og væksthastigheden er \_\_\_\_\_ dyr pr. uge.

For hvert af tilfældene A, B, C og D tegner vi grafen i koordinatsystemet nedenfor ved først at bruge programmet `md()` til at udregne støttepunkter.

Antal dyr

