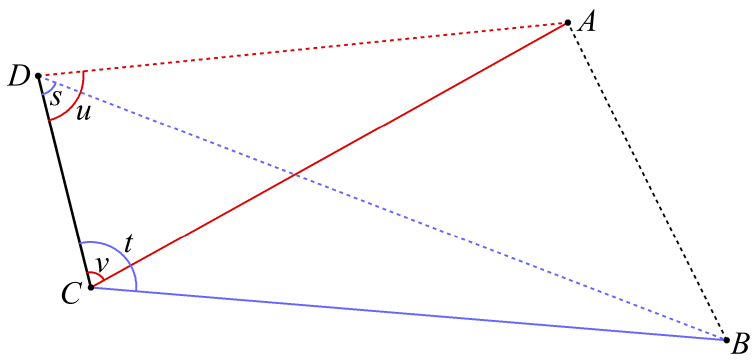
Mere om

trekants-beregning



2012 Karsten Juul

Dette hæfte indeholder tilføjelser til følgende hæfter:

Kortfattet trekantsberegning for gymnasiet og hf 26/11-2010
http://mat1.dk/kortfattet_trekantsberegning_for_gymnasiet_og_hf.pdf

Øvelser til hæftet "Kortfattet trekantsberegning for gymnasiet og hf" 29/5-2011
http://mat1.dk/oevelser_til_haeftet_kortfattet_trekantsberegning_for_gymnasiet_og_hf.pdf

Alle hæfterne kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm

Indhold

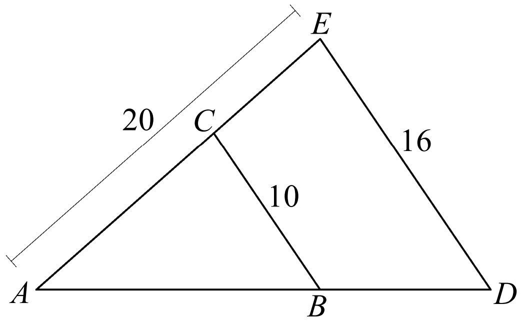
Mere om trekantsberegning

© 2012 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om hold, lærer og skole.

Eksempel med ensvinklede trekanter



Hvad ved vi?

På figuren er siderne *BC* og *DE* parallelle.

Trekanterne *ABC* og *ADE* er altså ensvinklede.

Hvad vil vi udregne?

Vi vil udregne $|CE|$.

Plan for udregninger:

Ved hjælp af reglerne for ensvinklede trekanter kan vi udregne længder af sider i trekanterne, men *CE* er ikke side i en af trekanterne. Vi udregner derfor først $|AC|$. Så kan vi derefter udregne $|CE|$ ved at trække $|AC|$ fra 20.

Skalafaktoren *k*:

Da trekanterne er ensvinklede, skal alle sider i trekant *ABC* ganges med samme tal *k* for at få den tilsvarende side i trekant *ADE*. Tilsvarende sider er sider der ligger over for lige store vinkler.

Vi udregner *k*:

Da siderne med længder 10 og 16 ligger over for samme vinkel, må gælde

$$10 \cdot k = 16$$

Vi dividerer begge sider med 10 og får

$$k = 1{,}6$$

Vi udregner $|\mathbf{AC}|$:

Da AC og siden med længde 20 ligger over for vinklerne B og D der er lige store, gælder

$$|AC| \cdot 1{,}6 = 20$$

Vi dividerer begge sider med 1,6 og får

$$|AC| = 12{,}5$$

Vi udregner $|\mathbf{CE}|$:

Vi får nu at

$$|CE| = 20 - 12{,}5$$

dvs.

$$\underline{\underline{|CE| = 7{,}5}}$$

Eksempel på udregning af vinkel ved hjælp af sinusrelationen

Opgaven

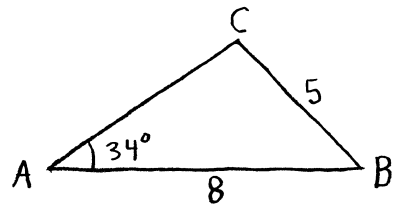
I trekant ABC er

$(*) \quad A = 34°\,,\ \ a = 5\ \ \text{og}\ \ c = 8\,.$

Vi vil udregne vinkel C.

Skitsen

Vi tegner en skitse:



Udregningen

Vi sætter ind i sinusrelationen:

$$\frac{5}{\sin(34°)} = \frac{8}{\sin(C)}$$

Nspire løser denne ligning mht. C for $0° < C < 180°$ og får:

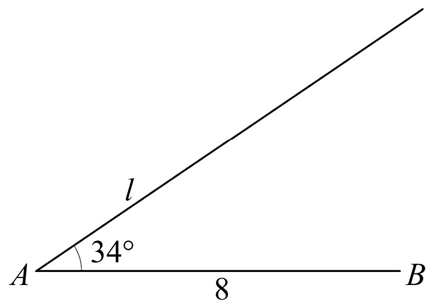
$$C = 63{,}5° \qquad \text{eller} \qquad C = 116{,}5°$$

De to trekanter

Det viser sig at der er to trekanter der opfylder $(*)$.

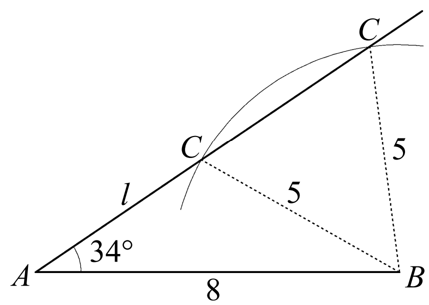
I den ene af disse trekanter er $C = 63{,}5°$,
og i den anden er $C = 116{,}5°$.

Vi vil tegne de to trekanter.
Først tegner vi AB og vinkel A:



Punktet C ligger på l, og afstanden fra B til C er 5.

Derfor tegner vi en cirkel med centrum B og radius 5:



Nu har vi de to trekanter ABC.

Eksempel hvor vi bruger cosinusrelationen og sinusrelationen til at udregne en afstand

Summen af vinklerne i en trekant

Når vi kender to vinkler i en trekant, så kan vi udregne den tredje. Det er fordi man altid får 180° når man lægger alle tre vinkler sammen.

Finde side i trekant med sinusrelationen

Hvis vi i en trekant kender

vinklerne og en af siderne

så kan vi udregne

enhver af de andre sider.

Dette kan vi gøre med sinusrelationen.

Finde side i en trekant med cosinusrelationen

Hvis vi i en trekant kender

to sider og vinklen mellem dem

så kan vi udregne

den tredje side.

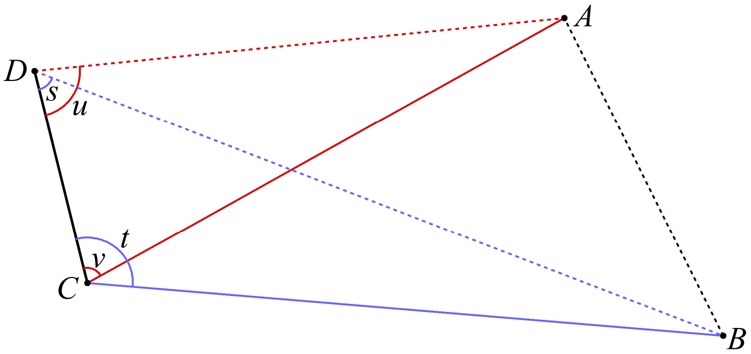
Dette kan vi gøre med cosinusrelationen.

Eksempel hvor vi bruger cosinusrelationen og sinusrelationen til at udregne en afstand

Figuren viser et landområde set ovenfra. Vi vil

finde afstanden mellem og *A* og B,

men vi kan ikke måle denne afstand (på grund af forhold i landskabet).



Vores målinger

Vi finder to steder C og D hvor der gælder:

Fra C kan vi se både A, B og D.

Fra D kan vi se både A, B og C.

Vi kan måle afstanden mellem C og D.

Vi måler vinkler mellem sigtelinjer. Afstande er i meter. Vi får

$$|CD| = 183\,,\quad u = 81{,}7°\,,\quad v = 75{,}0°\,,\quad s = 54{,}9°\,,\quad t = 108{,}8°\,.$$

Plan for udregninger

Hvis vi i trekant ABC kender siderne ***AC*** og ***BC*** og ***vinklen*** imellem dem, så kan vi udregne længden af AB med cosinusrelationen.

Vinklen kan vi nemt udregne da vi kender t og v.

AC er en side i trekant ACD. I denne kender vi vinklerne u og v, så vi kan nemt udregne vinklen A. Da vi kender vinklerne og en side kan vi udregne længden af de andre sider med sinusrelationen. Vi nøjes med at udregne længden af AC.

På tilsvarende måde udregner vi siden ***BC*** i trekant BCD.

Siden *AC*

Vinkelsummen i en trekant er 180°, så i trekant ACD er

$$A = 180° - u - v = \underline{\underline{23{,}3°}}$$

Sinusrelationen siger at

> for alle sider i en trekant får vi det samme tal når vi dividerer siden med sinus til sidens modstående vinkel.

Derfor gælder at

$$\frac{|CD|}{\sin(A)} = \frac{|AC|}{\sin(u)} \quad \text{dvs.} \quad \frac{183}{\sin(23{,}3°)} = \frac{d_1}{\sin(81{,}7°)} \quad \text{hvor } d_1 = |AC|$$

Nspire løser denne ligning mht. d_1 og får $d_1 = \underline{457{,}806}$

Siden *BC*

I trekant BCD laver vi udregninger af samme type som i trekant ACD:

$$B = 180° - s - t = \underline{16{,}3°}$$

$$\frac{183}{\sin(16{,}3°)} = \frac{d_2}{\sin(54{,}9°)} \quad \text{hvor } d_2 = |BC|$$

$$d_2 = \underline{533{,}449}$$

Siden *AB*

I trekant ABC er

$$C = t - v = 33{,}8°$$

Da C er vinklen mellemsiderne d_1 og d_2, og $c = |AB|$ er siden over for vinklen, følger af cosinusrelationen at

$$c^2 = {d_1}^2 + {d_2}^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos(C)$$

Vi løser denne ligning mht. c og får

$$c = \underline{297{,}110}$$

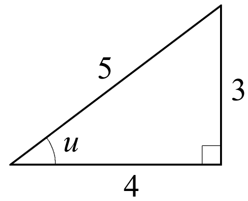
Konklusion

Afstanden mellem A og B er $\underline{\underline{\text{ 297 meter }}}$.

De 11 opgavetyper med sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant

I trekanten til højre er siderne med længde 3 og 4 **<u>kateter</u>**, fordi vinklen mellem dem er ret. Siden med længde 5 er **<u>hypotenuse</u>**, fordi den ikke er en af kateterne.

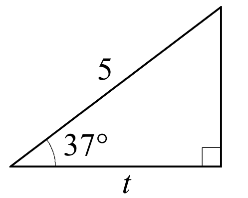
Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben. Den katete du holder i, er **<u>vinklens hosliggende katete</u>**. Den anden katete er **<u>vinklens modstående katete</u>**.



<u>Type 1</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.
<u>Udregn:</u> Vinklens hosliggende katete.

$5 \cdot \mathbf{cos}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

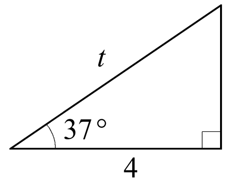
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 2</u>
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens hosliggende katete.
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{cos}(37°) = 4$ Nspire løser mht. t

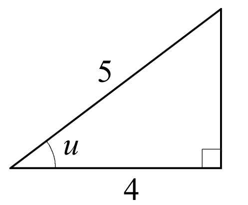
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 3</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.
<u>Udregn:</u> Vinklen mellem disse.

$5 \cdot \mathbf{cos}(u) = 4$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

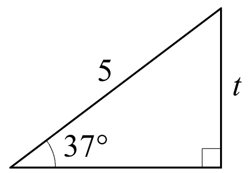
vinklens hosliggende katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 4</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.
<u>Udregn:</u> Vinklens modstående katete.

$5 \cdot \mathbf{sin}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

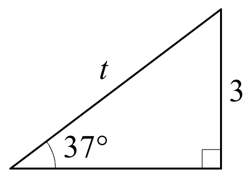
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 5</u>
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens modstående katete.
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{sin}(37°) = 3$ Nspire løser mht. t

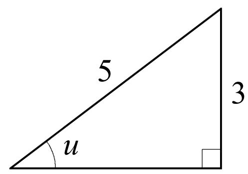
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



<u>Type 6</u>
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.
<u>Udregn:</u> Katetens modstående vinkel.

$5 \cdot \mathbf{sin}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

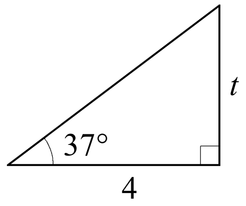
vinklens modstående katete
spids vinkel
hypotenusen



Type 7
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens hosliggende katete.
<u>Udregn:</u> Vinklens modstående katete.

$4 \cdot \mathbf{tan}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

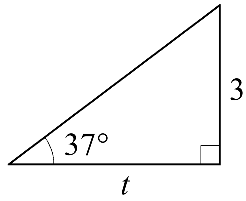
vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 8
<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens modstående katete.
<u>Udregn:</u> Vinklens hosliggende katete.

$t \cdot \mathbf{tan}(37°) = 3$ Nspire løser mht. t

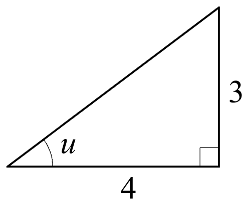
vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 9
<u>Kendt:</u> De to kateter.
<u>Udregn:</u> En spids vinkel.

$4 \cdot \mathbf{tan}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

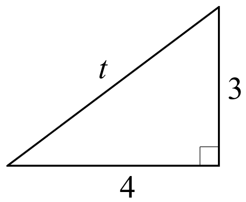
vinklens modstående katete
spids vinkel
vinklens hosliggende katete



Type 10
<u>Kendt:</u> De to kateter.
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$3^2 + 4^2 = t^2$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

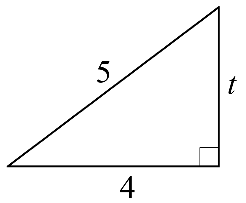
hypotenuse
kateter



Type 11
<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.
<u>Udregn:</u> Den anden katete.

$t^2 + 4^2 = 5^2$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse
kateter



De 4 formler til udregning af sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant

Hver af de 11 metoder ovenfor bruger en af følgende fire formler:

I en retvinklet trekant gælder

(1) $\quad den\_ene\_katete^2 + den\_anden\_katete^2 = hypotenusen^2$

For en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

(2) $\quad hypotenusen \cdot \mathbf{cos}(\,vinkel\,) = vinklens\_hosliggende\_katete$

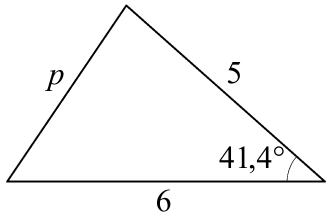
(3) $\quad hypotenusen \cdot \mathbf{sin}(\,vinkel\,) = vinklens\_modstående\_katete$

(4) $\quad vinklens\_hosliggende\_katete \cdot \mathbf{tan}(\,vinkel\,) = vinklens\_modstående\_katete$

De 4 opgavetyper der løses ved hjælp af cosinusrelationen eller sinusrelationen.

<u>Type 12:</u> Udregn side med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> En vinkel mellem to sider og disse to sider.
<u>Udregn:</u> Siden over for vinklen.



altid 2

$$p^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(41{,}4°)$$

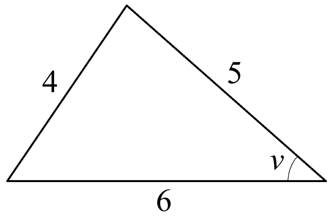
vinklens ben

siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

<u>Type 13:</u> Udregn vinkel med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> De tre sider.
<u>Udregn:</u> Vinklen.



altid 2

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(v)$$

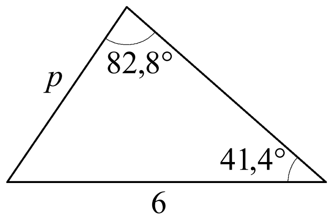
vinklens ben

siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. v for $0° \le v \le 180°$

<u>Type 14:</u> Udregn side med sinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> En side og to vinkler.
<u>Udregn:</u> En af de andre sider.



$$\frac{p}{\sin(41.4°)} = \frac{6}{\sin(82.8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

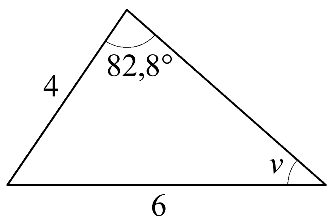
siden der er p enheder, ligger over for vinklen der er 41,4°

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

Hvis det var siden over for den ukendte vinkel vi skulle finde, så måtte vi først udregne denne vinkel ved at udnytte at summen af de tre vinkler er $180°$.

<u>Type 15:</u> Udregn vinkel med sinusrelation
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> To sider og vinklen over for en af dem.
<u>Udregn:</u> Vinklen over for den anden af de to sider.



$$\frac{4}{\sin(v)} = \frac{6}{\sin(82{,}8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

siden der er 4 enheder, ligger over for vinklen af størrelse v

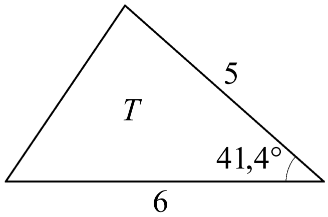
Nspire løser ligningen mht. v for $0° \le v \le 180°$

Lommeregneren giver både en løsning under $90°$ og en løsning over $90°$. <u>Husk at begrunde hvilken af løsningerne der skal bruges</u>. I dette tilfælde kan begrundelsen være: "Vinklen er under $90°$ da siden over for vinklen ikke er den største i trekanten." I nogle opgaver er det oplyst om vinklen er <u>stump</u> (dvs. over $90°$) eller <u>spids</u> (dvs. under $90°$).

De 3 opgavetyper med sinusformlen for trekants areal

<u>Type 16</u>

<u>Kendt:</u> To sider og vinklen mellem dem.
<u>Udregn:</u> Arealet.



Arealet er $T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(41{,}4°)$

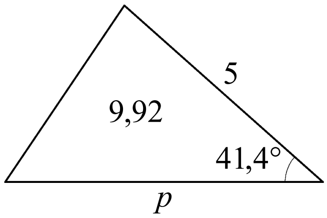
altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider

Nspire udregner ligningens højre side.

<u>Type 17</u>

<u>Kendt:</u> Arealet, vinklen mellem to sider og en af de to sider.
<u>Udregn:</u> Den anden af de to sider.



$$9{,}92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot p \cdot \sin(41{,}4°)$$

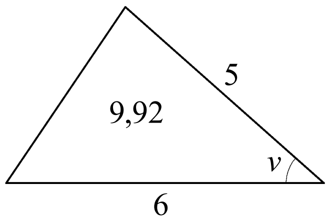
altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider

Nspire løser ligningen mht. p.

<u>Type 18</u>

<u>Kendt:</u> Arealet og to sider.
<u>Udregn:</u> Vinklen mellem de to sider.



$$9{,}92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(v)$$

altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider

Nspire løser ligningen mht. v for $0° < v < 180°$.

Ligningen har både en løsning under $90°$ og en løsning over $90°$. Hvis opgaven er i en prøve, så vil der være flere oplysninger så det fremgår hvilken af de to trekanter opgaven drejer sig om.