14. Logistisk differentialligning

14a Vi opstiller en differentialligning

For en population af dyr er $N(t)$ antallet af dyr på tidspunktet t uger.

Det er oplyst at populationen vokser sådan at

(1) *væksthastigheden* er proportional med
produktet af *antallet* og *differensen mellem 300 og antallet*

Ud fra (1) kan vi opstille en differentialligning:

(2) $N' = k \cdot N \cdot (300 - N)$

N ' = væksthastigheden
N = antallet
300 – N = differensen mellem 300 og antallet

14b Vi finder proportionalitetskonstanten

Det er oplyst at

væksthastigheden er 20 på det tidspunkt hvor *antallet* er 100

dvs.

(3) $N' = 20$ når $N = 100$

Ud fra (2) og (3) kan vi finde proportionalitetskonstanten k:

$$20 = k \cdot 100 \cdot (300 - 100)$$

$$k = 0{,}001$$

Antallet $N(t)$ er altså en løsning til differentialligningen

(4) $N' = 0{,}001 \cdot N \cdot (300 - N)$

14c Hvad er en logistisk differentialligning?

Differentialligning (4) er af typen

$$y' = k \cdot y \cdot (M - y)$$

En differentialligning af denne type kaldes en logistisk differentialligning.

14d Hvordan ændres væksthastigheden?

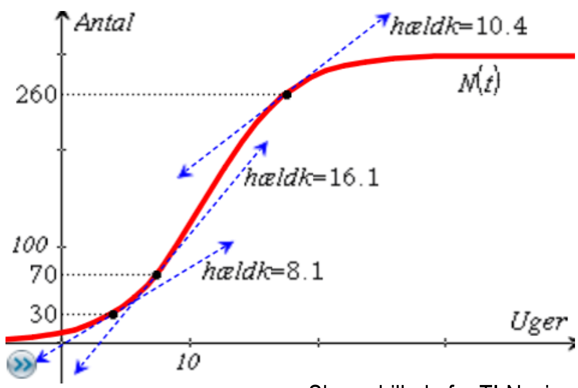
Af (4) får vi:

Når $N = 30$ er $N' = 8{,}1$

Når $N = 70$ er $N' = 16{,}1$ Se figur

Når antallet er 70, så vokser det altså hurtigere end når det er 30.
Grunden er at

så længe der er god plads, gælder at når der er flere dyr, vil der komme flere unger.



Skærmbillede fra TI-Nspire

Af (4) får vi:

Når $N = 260$ er $N' = 10{,}4$ Se figur

Når antallet er 260, så vokser det altså langsommere end når det er 70. Grunden er at

når der er mange dyr, er der mindre plads pr. dyr, og så kommer der ikke så mange unger.

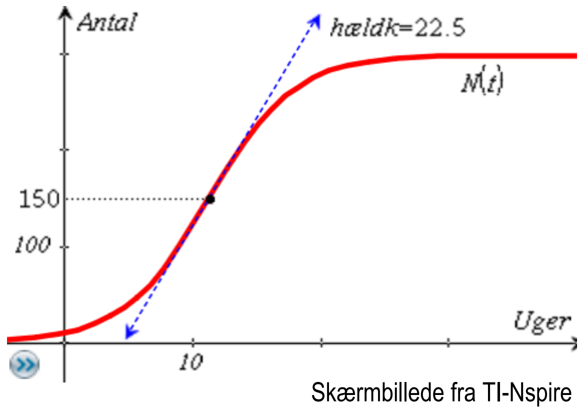
14e Hvor stor er populationen når den vokser hurtigst?

Vi vil finde ud af hvor stort antallet N er når vægsthastigheden er størst. Vi skal altså finde ud af hvad N skal være for at følgende udtryk er størst:

$$hast(N) = 0{,}001 \cdot N \cdot (300 - N) = 0{,}3 \cdot N - 0{,}001 \cdot N^2$$

Vi får $hast'(N) = 0{,}3 - 0{,}002 \cdot N$ så $hast'(N) = 0$ netop når $N = 150$.

Da $hast'(100) = 0{,}1$ og $hast'(200) = -0{,}1$, er $hast$ voksende i intervallet $N \leq 150$ og aftagende i intervallet $150 \leq N$, så største vækstthastighed er $hast(150) = 22{,}5$.



Skærmbillede fra TI-Nspire

Se figur

Når antallet af dyr er 150,
er væksthastigheden størst.
Den største væksthastighed er 22,5

14f Vi finder forskrifter for løsningerne til differentialligningen

I formelsamlingen står at funktionerne

(5) $\quad y = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-kM \cdot t}}$ er løsning til $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$

Af (5) får vi at funktionerne

(6) $\quad N(t) = \dfrac{300}{1 + c \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}}$ er løsning til $N' = 0{,}001 \cdot N \cdot (300 - N)$

14g Vi finder den af løsningerne der passer med populationen

Det er oplyst at til tiden $t = 0$ er antallet $N = 10$.

Dette indsætter vi i (6) og får $10 = \dfrac{300}{1 + c \cdot e^{-0{,}3 \cdot 0}}$ dvs. $10 = \dfrac{300}{1 + c}$ så $c = 29$.

Antallet af dyr er altså fastlagt ved

(7) $\quad N(t) = \dfrac{300}{1 + 29 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}}$

14h Hvad sker der med antallet i det lange løb?

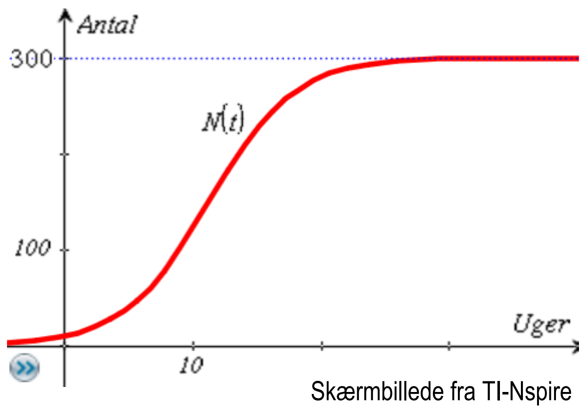
Da $29 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$ er eksponentielt aftagende, er

$$29 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} \approx 0 \quad \text{når } t \text{ er stor}$$

så af (7) ser vi at

$$N(t) \approx 300 \quad \text{når } t \text{ er stor}$$

Se figur



Skærmbillede fra TI-Nspire

Altså er 300 den øvre grænse for hvor mange dyr der er plads til. Tallet 300 kaldes *bæreevnen*.

For en logistisk funktion y hvor $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$, er M den øvre grænse for y , og $\frac{M}{2}$ er størrelsen af y når y' er størst.