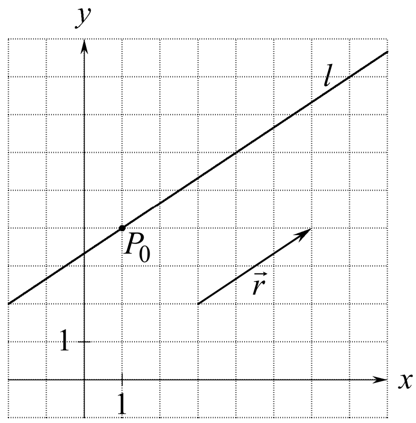
Linje og plan i gymnasiets koordinatgeometri

1. Parameterfremstilling for linje i planen



På figuren ser vi linjen *l*, punktet $P_0(1,4)$ og vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hvis vi ganger $\vec{r}$ med et tal *t*, får vi en vektor $t\vec{r}$ som er nulvektor eller en vektor der er parallel med *l*.

Heraf følger:

(1) Hvis vi lægger $t\vec{r}$'s koordinater til P_0's koordinater, så får vi koordinaterne til et punkt $P(x,y)$ på *l*, og ethvert punkt på *l* kan vi få på denne måde.

Når vektoren $t\vec{r}$ tegnes som en pil med begyndelsespunkt P_0, vil pilens endepunkt ligge på *l* da $t\vec{r}$ er nulvektor eller parallel med *l*. Man får altid endepunktets koordinater når man lægger vektorens koordinater til begyndelsespunktets koordinater.

Derfor siger vi at

(1) og (2) fortæller det samme.

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathrm{R}$

er en **parameterfremstilling** for *l*.

Hvis $t = -1{,}5$ er

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1{,}5)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

så $(-3{,}5\,,1)$ er et **punkt på** *l*.

Ligningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},\ t \in \mathrm{R}$$

er **parameterfremstilling** for en linje *l*.

For at kunne skrive en **parameterfremstilling** for en linje skal vi kende et **punkt på** linjen og en vektor der er **parallel** med linjen.

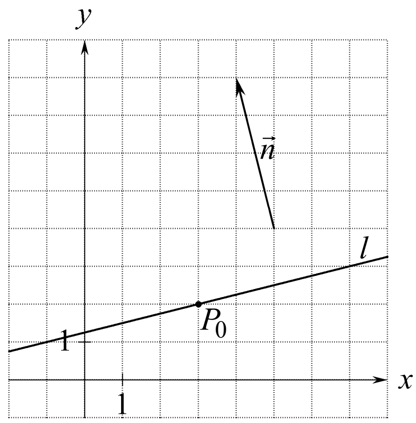
(x_0, y_0) er et **punkt på** *l*.

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en **retningsvektor** for *l*, dvs. at den er **parallel** med *l*.

Vektoren der er ganget med *t*, er **parallel** med *l*. Dette har vi brug for at vide i opgaver med vinkel, parallel eller vinkelret.

Et punkt (x,y) ligger på *l* netop hvis der findes et tal *t* så ligningens højreside ved udregning giver dette koordinatsæt. Se (3).

2. Ligning for linje i planen



På figuren ser vi linjen *l*, punktet $P_0(3\,,2)$ og vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ er vinkelret på *l*, så

(4) et punkt $P(x,y)$ ligger på *l*

netop når

(5) $\overrightarrow{P_0P}$ er **nulvektor** eller en vektor der er **vinkelret** på $\vec{n}$.

Heraf følger at et punkt $P(x,y)$ ligger på *l* netop når

(6) skalarproduktet af $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ er nul,

dvs. når

(7) $(-1)(x-3)+4(y-2)=0$.

$\overrightarrow{P_0P}$ er vinkelret på $\vec{n}$ netop når $\overrightarrow{P_0P}$ er parallel med *l*. Når vektorens begyndelsespunkt ligger på *l*, så vil endepunktet ligge på *l* netop når vektoren er nulvektor eller parallel med *l*.

(6) og (7) fortæller det samme.

Derfor er dette en **ligning for** *l*.

Denne ligning reducerer vi til

(8) $-x+4y-5=0$.

Når en af (4), (5), (6), (7) og (8) er sand, så er de alle sande.

Vi indsætter punktet $(-5\,,0)$ i (8) og får

(9) $-(-5)+4\cdot 0-5=0$

Denne ligning er sand, så $(-5\,,0)$ ligger på *l*.

Ligningen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

hvor *a* og *b* ikke begge er 0, er **ligning for** en linje *l*.

(x_0, y_0) er et **punkt på** *l*.

For at kunne skrive en **ligning** for en linje skal vi kende et **punkt på** linjen og en vektor der er **vinkelret** på linjen.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er en **normalvektor** for *l*, dvs. den er **vinkelret** på *l*.

Ligningen kan reduceres til formen

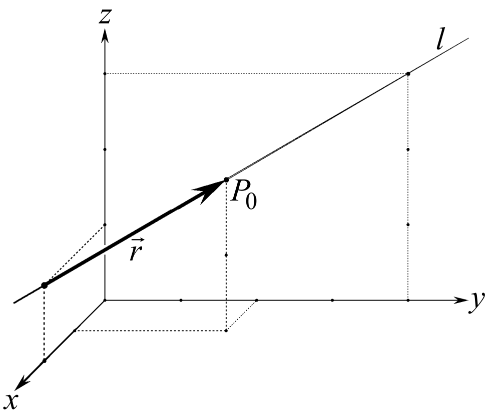
$$ax+by+c=0 \ .$$

Tallene der står foran *x* og *y* er koordinater til en vektor der er **vinkelret** på *l*. Dette har vi brug for at vide i opgaver med vinkel, parallel eller vinkelret.

Når *a* og *b* ikke begge er 0, er dette **ligning for** en linje *l*, og $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er **vinkelret** på denne linje.

Et punkt ligger på *l* netop hvis ligningen bliver sand når punktets koordinater indsættes for *x* og *y*. Se (9).

3. Parameterfremstilling for linje i rummet



På figuren ser vi linjen *l*, punktet $P_0(1,2,2)$ og vektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi ganger $\vec{r}$ med et tal *t*, får vi en vektor $t\vec{r}$ som er nulvektor eller en vektor der er parallel med *l*.

Når vektoren $t\vec{r}$ tegnes som en pil med begyndelsespunkt P_0, vil pilens endepunkt ligge på *l* da $t\vec{r}$ er nulvektor eller parallel med *l*. Man får altid endepunktets koordinater når man lægger vektorens koordinater til begyndelsespunktets koordinater.

Heraf følger:

(10) Hvis vi lægger $t\vec{r}$'s koordinater til P_0's koordinater, så får vi koordinaterne til et punkt $P(x,y,z)$ på *l*, og ethvert punkt på *l* kan vi få på denne måde.

Derfor siger vi at

(10) og (11) fortæller det samme.

(11) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

er en **parameterfremstilling** for *l*.

Hvis $t = \frac{1}{2}$ er

(12) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

så $(\frac{1}{2}, 3, 2\frac{1}{2})$ er et **punkt på** *l*.

Ligningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

er **parameterfremstilling** for en linje *l*.

For at kunne skrive en **parameterfremstilling** for en linje skal vi kende et **punkt på** linjen og en vektor der er **parallel** med linjen.

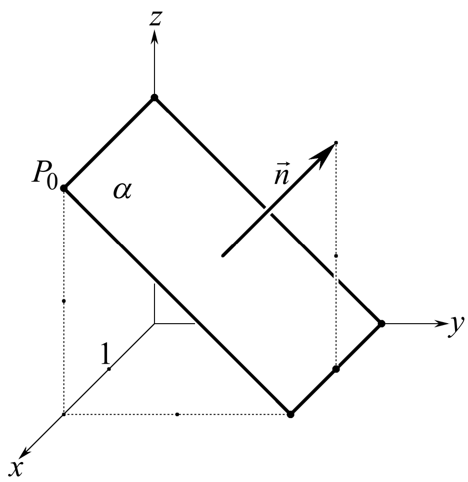
(x_0, y_0, z_0) er et **punkt på** *l*.

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ er en **retningsvektor** for *l*, dvs. at den er **parallel** med *l*.

Vektoren der er ganget med *t*, er **parallel** med *l*. Dette har vi brug for at vide i opgaver med vinkel, parallel eller vinkelret.

Et punkt (x,y,z) ligger på *l* netop hvis der findes et tal *t* så ligningens højreside ved udregning giver dette koordinatsæt. Se (12).

4. Ligning for plan i rummet



På figuren ser vi planen α, punktet $P_0(2\,,0\,,2)$

og vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ er vinkelret på α så

(13) et punkt $P(x,y,z)$ ligger i α

netop når

(14) $\overrightarrow{P_0P}$ er **nulvektor** eller en vektor der er **vinkelret** på $\vec{n}$.

$\overrightarrow{P_0P}$ er vinkelret på $\vec{n}$ netop når $\overrightarrow{P_0P}$ er parallel med α. Når vektorens begyndelsespunkt ligger i α, så vil endepunktet ligge i α netop når vektoren er nulvektor eller parallel med α.

Heraf følger at et punkt $P(x,y,z)$ ligger i α netop når

(15) skalarproduktet af $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{P_0P}=\begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-2\end{pmatrix}$ er nul,

dvs. når

(16) $0\cdot(x-2)+1\cdot(y-0)+1\cdot(z-2)=0$.

(15) og (16) fortæller det samme.

Derfor er dette en **ligning for** α.

Denne ligning reducerer vi til

(17) $y+z-2=0$.

Når en af (13), (14), (15), (16) og (17) er sand, så er de alle sande.

Vi indsætter punktet $(2\,,2\,,0)$ i (17) og får

(18) $2+0-2=0$

Denne ligning er sand, så $(2\,,2\,,0)$ ligger i α.

Ligningen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

hvor a, b og c ikke alle er 0, er **ligning for** en plan α.

For at kunne skrive en **ligning** for en plan skal vi kende et **punkt på** linjen og en vektor der er **vinkelret** på linjen.

(x_0,y_0,z_0) er et **punkt i** α.

$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ er en **normalvektor** for α, dvs. den er **vinkelret** på α.

Tallene der står foran x, y og z er koordinater til en vektor der er **vinkelret** på α. Dette har vi brug for at vide i opgaver med vinkel, parallel eller vinkelret.

Ligningen kan reduceres til formen

$$ax+by+cz+d=0\ .$$

Når a , b og c ikke alle er 0, er dette **ligning for** en plan α, og $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ er **vinkelret** på denne plan.

Et punkt ligger i α netop hvis ligningen bliver sand
når punktets koordinater indsættes for x, y og z. Se (18).