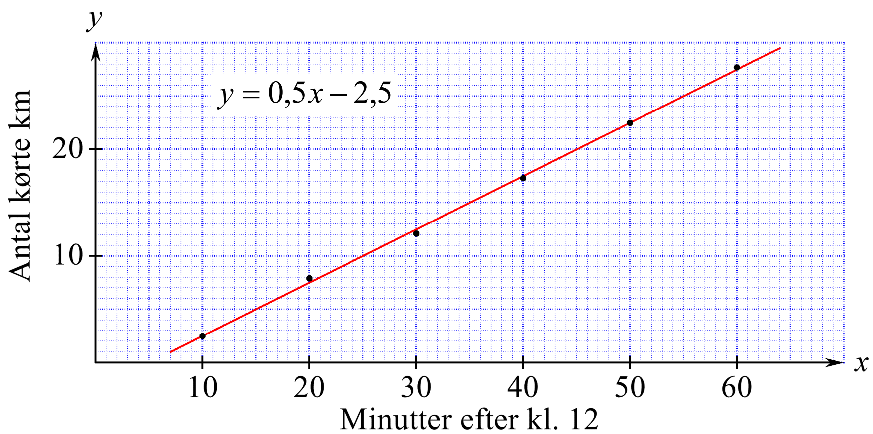
# Lineære sammenhænge

for C-niveau i stx




2013 Karsten Juul

# 1: Oplæg om lineære sammenhænge

Vi køber en 12 mm høj plante som vokser 4 mm hver dag. Vi kan tænke os til føgende:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Efter | 1 | dag er højden | $12+4$ | mm |
| Efter | 2 | dage er højden | $12+4\cdot 2$ | mm |
| Efter | 10 | dage er højden | $12+4\cdot 10$ | mm |
| Efter | $x$ | dage er højden | $12+4\cdot x$ | mm |

Der gælder altså at når $y$ er højden (i mm), er

$$y = 4\cdot x+12$$

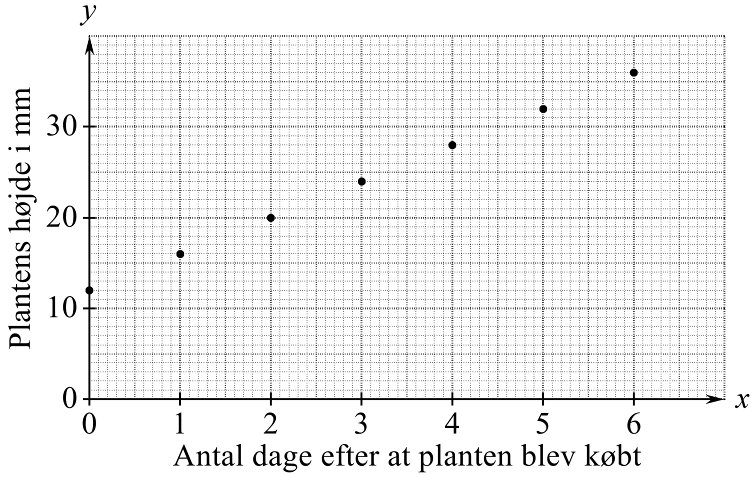
Ligningen for denne sammenhæng er altså af typen

$$y = a\cdot x+b$$

---

I koordinatsystemet har vi tegnet

en prik der viser at 0 dage efter købet er højden 12 mm,
en prik der viser at 1 dag senere er planten 4 mm højere,
en prik der viser at efter endnu en dag er planten igen blevet 4 mm højere,
osv.




Da stigningen er den samme hver dag, kommer punkterne til at ligge på en ret linje.
Derfor kalder man en sammenhæng lineær når stigningen hele tiden er den samme.

Når stigningen hele tiden er den samme, må ligningen for sammenhængen være af typen

$$y = a\cdot x+b$$

hvor $a$ er det vi skal lægge til værdien af $y$ hver gang vi gør værdien af $x$ én enhed større.

---

For sammenhængen $y=3x+5$ skal vi lægge 3 til $y$ hver gang vi gør $x$ én enhed større.
Altså bliver $y$-værdierne større og større, så sammenhængen er voksende.

For sammenhængen $y=-2x+8$ skal vi lægge $-2$ til $y$ hver gang vi gør $x$ én enhed større.
Altså bliver $y$-værdierne mindre og mindre, så sammenhængen er aftagende.

## 2. Ligning for lineær sammenhæng

**2a. Regel:** En sammenhæng mellem to variable $x$ og $y$ er **lineær** hvis den har en ligning af typen $y = a \cdot x + b$ hvor $a$, $b$ og $x$ kan være alle tal.

Tallet $a$ som står foran $x$ kaldes hældningskoefficienten.

Den lineære sammenhæng
er voksende hvis $a$ er positiv .
er aftagende hvis $a$ er negativ .

**2b. Eksempel:** Hvis $a = 5$ og $b = -2$ er $y = 5 \cdot x + (-2)$ dvs. $y = 5x - 2$

**2c. Eksempel:** Hvis $a = 1$ og $b = 0{,}25$ er $y = 1 \cdot x + 0{,}25$ dvs. $y = x + 0{,}25$

## 3. Graf for lineær sammenhæng

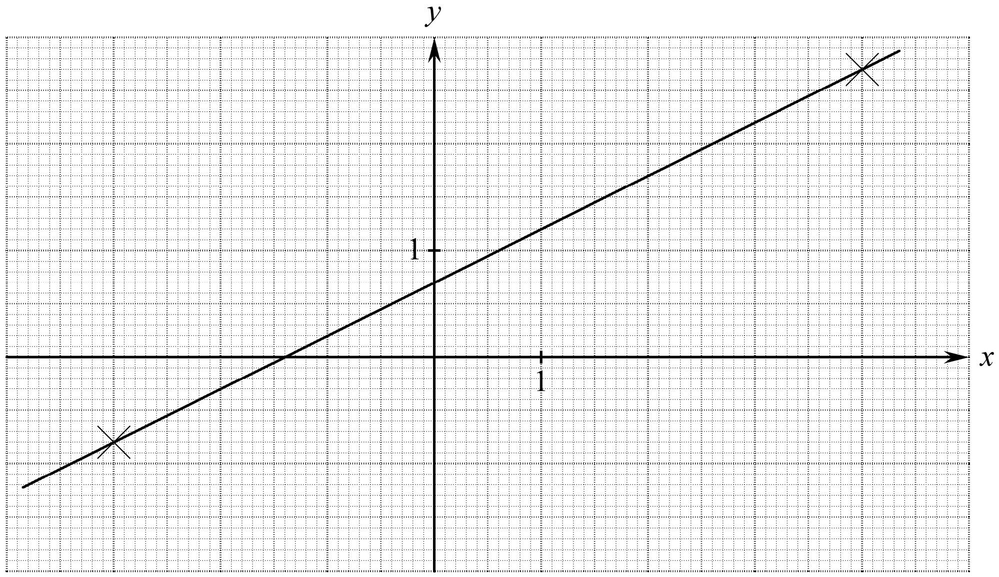
**3a. Regel:** Grafen for en lineær sammenhæng er en ret linje .

**<u>3b. Opgave:</u>** Tegn grafen for sammenhængen $y = 0{,}5x + 0{,}7$

**Metode 1:** Da grafen er en ret linje, behøver vi kun udregne to punkter for at kunne tegne den. <u>De to punkter skal ligge langt fra hinanden</u> for at få stor nøjagtighed.

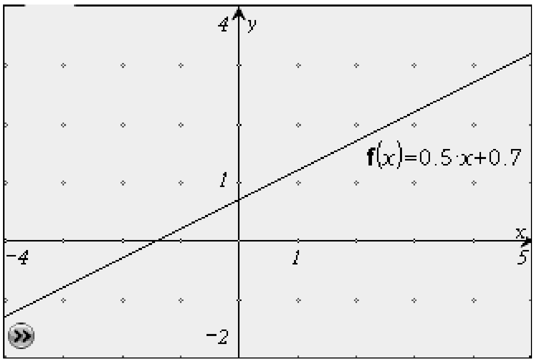
Når $x = -3$ er $y = 0{,}5 \cdot (-3) + 0{,}7 = -0{,}8$
Når $x = 4$ er $y = 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}7 = 2{,}7$

Grafen er den rette linje gennem punkterne $(-3, -0{,}8)$ og $(4, 2{,}7)$ .




**Metode 2:** Vi taster forskriften $f(x) = 0{,}5 \cdot x + 0{,}7$ på Nspire på en grafside og får grafen til højre.

Vi kan aflæse denne graf nøjagtigt ved at afsætte et punkt på grafen og ændre en af punktets koordinater.



## 4. Bestem $y$ når vi kender $x$

**4a. Opgave:** Nogle skiver findes i forskellige størrelser. Når $y$ er tykkelsen, målt i mm, og $x$ er diameteren, målt i mm, er $y = 0{,}2x + 0{,}1$

Hvad er **tykkelsen** når **diameteren** er 14 mm?

**Metode:** Spørgsmålet kan oversættes til

Hvad er $y$ når $x$ er 14 ?

Da der i opgaven står at $y$ er tykkelsen og $x$ er diameteren.

Vi indsætter 14 for $x$ i $y = 0{,}2x + 0{,}1$ og får

$$y = 0{,}2 \cdot 14 + 0{,}1$$

Vi udregner højresiden og får

$$y = 2{,}9$$

I opgaven står at $y$ er tykkelsen.

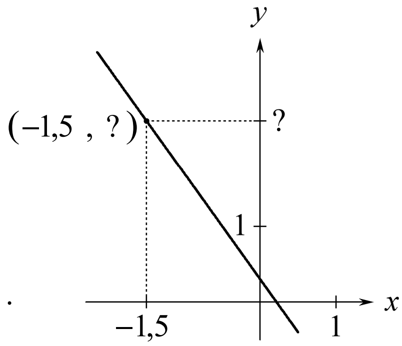
**Konklusion:** Tykkelsen af en skive er $\underline{\underline{2{,}9 \text{ mm}}}$ når dens diameter er 14 mm

---

**4b. Opgave:** Billedet viser grafen for sammenhængen

$$y = -1{,}4 \cdot x + 0{,}3$$

Udregn $y$-koordinaten til det grafpunkt som har $x$-koordinat $-1{,}5$ .




**Metode:** Når $x = -1{,}5$ er $y = -1{,}4 \cdot (-1{,}5) + 0{,}3 = 2{,}4$

**Konklusion:** Grafpunkt med $x$-koordinat $-1{,}5$ har $y$-koordinat $\underline{\underline{2{,}4}}$ .

## 5. Bestem $x$ når vi kender $y$

**5a. Opgave:** Nogle skiver findes i forskellige størrelser. Når $y$ er tykkelsen, målt i mm, og $x$ er diameteren, målt i mm, er $y = 0{,}2x + 0{,}1$

Hvad er **diameteren** når **tykkelsen** er 4,5 mm?

**Metode:** Spørgsmålet kan oversættes til

Hvad er $x$ når $y$ er 4,5 ?

Da der i opgaven står at $y$ er tykkelsen og $x$ er diameteren.

Vi indsætter 4,5 for $y$ i $y = 0{,}2x + 0{,}1$ og får

$$4{,}5 = 0{,}2x + 0{,}1$$

Vi løser denne ligning mht. $x$ og får

$$x = 22$$

I opgaven står at $x$ er diameteren.

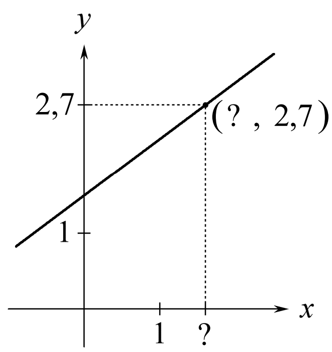
**Konklusion:** Diameteren af en skive er $\underline{\underline{22 \text{ mm}}}$ når dens tykkelse er 4,5 mm

---

**5b. Opgave:** Billedet viser grafen for sammenhængen

$$y = 0{,}75 \cdot x + 1{,}5$$

Udregn $x$-koordinaten til det grafpunkt som har $y$-koordinat 2,7 .




**Metode:** Vi skal finde et tal $x$ så

$$2{,}7 = 0{,}75 \cdot x + 1{,}5$$

Vi løser denne ligning mht. $x$ og får $x = 1{,}6$ .

**Konklusion:** Grafpunkt med $y$-koordinat 2,7 har $x$-koordinat $\underline{\underline{1{,}6}}$ .

## 6. Lineær vækst

**6a. Regel:** For en lineær sammenhæng $y = ax + b$ gælder:

Hver gang vi gør $x$ én enhed større , skal vi lægge $a$ til værdien af $y$.

Dette er reglen for lineær vækst og reglen for hvad $a$ i $y = ax+b$ fortæller .

**6b. Regel:** For en lineær sammenhæng $y = ax + b$ gælder:

Når $x$ er 0 , er $y$ lig $b$ .

Dette er reglen for hvad $b$ i $y = ax+b$ fortæller .

---

**6c. Eksempel:** Af 6b og 6a får vi: På grafen for $y = \mathbf{3}x+\mathbf{5}$ ligger punkterne (0,5), (1,8), (2,11), (3,14) osv.

**6d. Eksempel:** Af 6b og 6a får vi: Hvis vi aflæser punkterne (0,7), (1,11), (2,15), (3,19) på en lineær graf, er $y = \mathbf{4}x+\mathbf{7}$ .

## 7. Skriv ligning ud fra beskrivelse af lineær vækst

**Opgave**

Man skal betale 10 kr. for at starte på et computerspil, og herefter skal man betale 0,50 kr. pr. minut man spiller.

Skriv en ligning vi kan bruge til at udregne prisen $y$ i kr. for at spille når vi kender antal minutter $x$ vi spiller.

**Svar**

Når antal minutter $x$ er 0 er prisen $y$ lig 10 .
Hver gang vi gør antal minutter $x$ én større, skal vi lægge 0,50 til prisen $y$ .

Af reglerne for hvad $a$ og $b$ i $y = ax + b$ fortæller, får vi:

$\underline{\underline{y = 0{,}50 \cdot x + 10}}$ når $x$ = antal minutter og $y$ = prisen i kr.

## 8. Skriv hvad *a* og *b* i lineær sammenhæng fortæller

**Opgave**

For en cirkel på et elektronisk billede kan radius udregnes ved hjælp af formlen
$y = -2 \cdot x + 80$ hvor $x$ er temperaturen i °C og $y$ er radius i mm.

Hvad fortæller tallene $-2$ og $80$ om radius?

**Svar**

Af reglerne for hvad $a$ og $b$ i $y = ax + b$ fortæller, får vi:

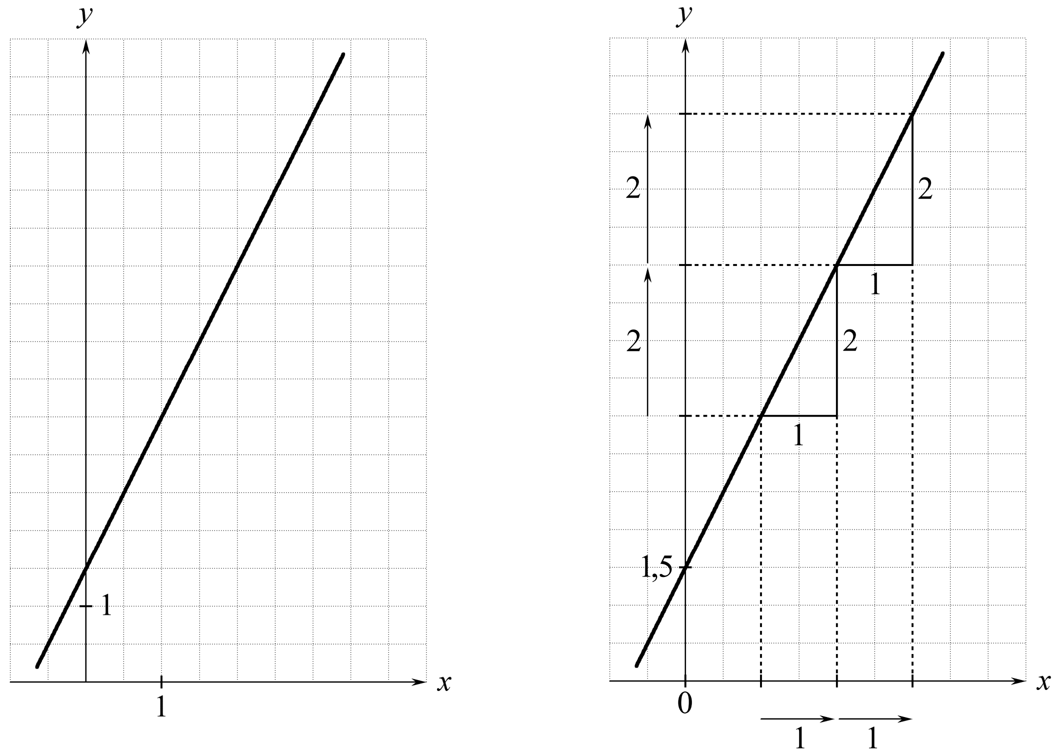
Hver gang vi gør temperaturen $x$ én grad større, skal vi lægge –2 til radius $y$ .
Når temperaturen $x$ er 0 , er radius $y$ lig 80 .

Dvs.:

80: <u>Radius er 80 mm ved 0 °C</u>

–2 : <u>Radius bliver 2 mm mindre for hver grad temperaturen stiger .</u>

## 9. Find ligning ud fra lineær graf




Grafen til venstre viser sammenhængen mellem to variable $x$ og $y$.

Når $x = 0$ er $y = 1{,}5$.

På billedet til højre har vi vist hvor vi har aflæst 1,5

Hver gang vi gør $x$ 1 enhed større, så bliver $y$ 2 enheder større.

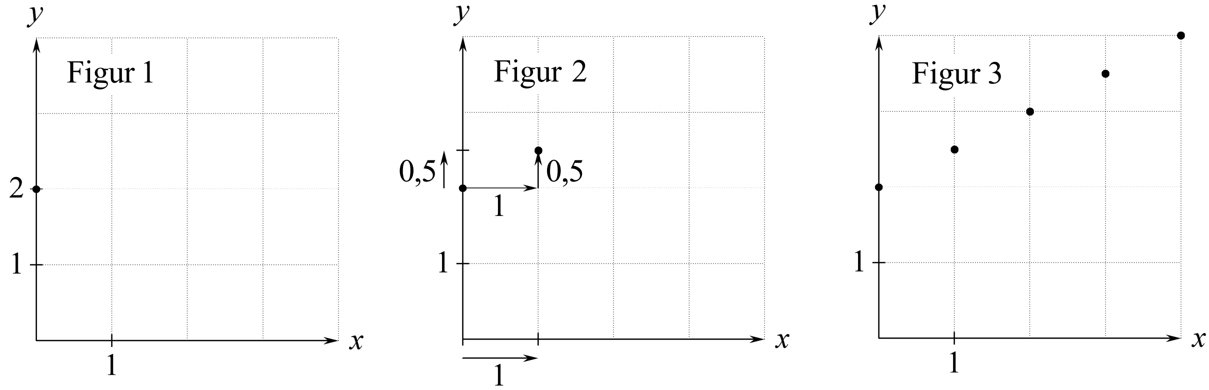
På billedet til højre har vi vist hvordan vi ser dette.

Af reglerne for hvad $a$ og $b$ i $y = ax + b$ fortæller, får vi:

Figuren viser grafen for sammenhængen $\underline{\underline{y = 2x + 1{,}5}}$

## 10. Tegn graf ud fra lineær ligning

Sammenhængen $y = 0{,}5x + 2$ er af typen $y = ax + b$ med $a = 0{,}5$ og $b = 2$.
Når $x = 0$ er $y = 2$. På figur 1 har vi brugt dette til at tegne et punkt på grafen.
Hver gang vi gør $x$ en enhed større, skal lægge 0,5 til $y$.
På figur 2 har vi brugt dette til at tegne endnu et grafpunkt.
Vi gentager dette og får punkterne på figur 3. Ud fra disse punkter kan vi tegne grafen.
Hvis tallene ikke er simple, tegner vi grafen ved en af metoderne fra ramme 3.



## 11. Lineær regression

**Opgave**

Vi har målt længde og bredde for nogle komponenter:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| længde i cm | 11,5 | 12,5 | 13,5 | 14,5 | 15,5 |
| bredde i cm | 5,1 | 5,3 | 5,9 | 6,1 | 6,6 |

Bredden $y$, målt i cm, er med god tilnærmelse givet ved

$$y = ax + b$$

hvor $x$ er længden målt i cm.

Find tallene a og b.

**Svar**

Vi indtaster tallene sådan at

længde kommer på den vandrette akse og

bredde kommer på den lodrette akse.

Nspire laver lineær regression på de indtastede tal og får

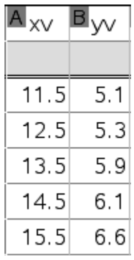
$$f(x) = 0{,}38x + 0{,}67 \ .$$

Dvs.

$$\underline{\underline{a = 0{,}38}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 0{,}67}}$$

**Sådan taster vi på Nspire**

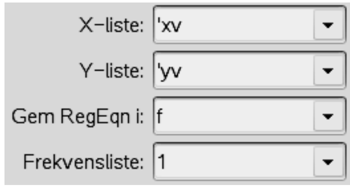
Vi vælger vindue af type "Lister og Regneark" og taster tabel sådan →




Lad ikke markør stå i sidste felt du ændrer.

I menuen vælger vi
Statistik/
Statistiske beregninger.../
Lineær regression (mx+b)...

Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nedenfor. I X-liste-feltet og Y-liste-feltet, skal du ikke taste navnet, du skal vælge det.




Når vi i et matematikfelt i et notevindue taster $f(x)$ og trykker på enter får vi $f(x) = 0.38 \cdot x + 0.67$

Den lineære sammenhæng der passer bedst med tabellen, har ligningen $y = 0{,}38x + 0{,}67$ .

## 12. Regression, årstal

**Opgave**

Tabellen viser antallet af boliger i et bestemt område.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Årstal | 1998 | 2000 | 2002 | 2004 | 2006 | 2008 |
| Antal boliger | 133 | 170 | 186 | 218 | 232 | 247 |

Antallet af boliger kan med god tilnærmelse beskrives ved en ligning af typen $y = ax + b$ hvor $y$ er antallet af boliger, og $x$ er antal år efter 1998.

Find tallene $a$ og $b$.

**Svar**

Vi taster følgende tabel:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| $y$ | 133 | 170 | 186 | 218 | 232 | 247 |

Vi taster ikke årstal da $x$ ikke er årstallet.

Nspire laver lineær regression på hele denne tabel og får $y = 11{,}2571x + 141{,}381$

Dvs. $\underline{\underline{a = 11{,}3 \quad \text{og} \quad b = 141}}$

Den lineære sammenhæng der passer bedst med tabellen, har ligningen $y = 11{,}3x + 141$ .

## 13. Bestem lineær sammenhæng ud fra to punkter

**Opgave:** Der er en lineær sammenhæng mellem temperatur $x$ (målt i °C) og overskud $y$ (målt i mio. kr.).

Når temperaturen er $-3\,°C$, er overskuddet 12 mio. kr.
Når temperaturen er $5\,°C$, er overskuddet 28 mio. kr.

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem temperatur og overskud.

**Svar:** Der er oplyst to $x$-værdier og tilhørende $y$-værdier:

Til $x_1 = -3$ svarer $y_1 = 12$.
Til $x_2 = 5$ svarer $y_2 = 28$.

Vi har altså en tabel med to punkter:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | –3 | 5 |
| $y$ | 12 | 28 |

Nspire laver lineær regression på denne tabel og får $y = 2x + 18$ .

Ligningen $\underline{\underline{y = 2x + 18}}$ viser sammenhængen mellem temperaturen $x$ i °C og overskuddet $y$ i mio. kr.

**Bemærk:** Grafen for $y = 2x + 18$ går præcist gennem punkterne $(-3\,,\,12)$ og $(5\,,\,28)$ . Det er fordi der kun er to punkter i tabellen. Når der er flere målte punkter, vil de normalt ikke ligge præcist på linje. På forsiden af dette hæfte er vist nogle punkter der ikke ligger præcist på linje. Der er også vist grafen for den lineære funktion der passer bedst med punkterne. Denne funktion er bestemt ved lineær regression.

## 14. Bestem skæringspunkt mellem to grafer

**Opgave:** Find koordinatsættet til skæringspunktet mellem graferne for de to sammenhænge $y = 1{,}2\,x - 7{,}4$ og $y = 0{,}6\,x + 2{,}8$

**Metode 1:** Skæringspunktets $x$-koordinat er den $x$-værdi hvor de to ligninger giver samme $y$-værdi, dvs hvor

$$1{,}2\,x - 7{,}4 \;=\; 0{,}6\,x + 2{,}8 \;.$$

Vi løser denne ligning mht. $x$ og får

$$x = 17 \;.$$

Skæringspunktet ligger på grafen for $y = 0{,}6\,x + 2{,}8$ og har derfor $y$-koordinaten

$$y \;=\; 0{,}6 \cdot 17 + 2{,}8 \;=\; 13 \;.$$

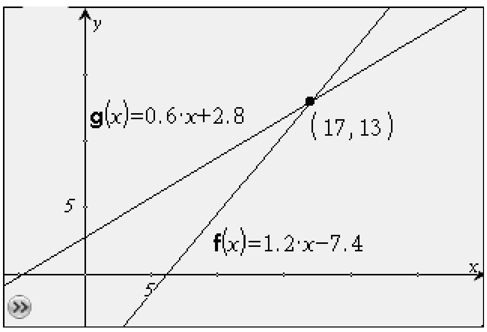
Skæringspunktet er $\underline{\underline{(17\,,13)}}$ .

**Metode 2:** Vi får Nspire til at tegne de to grafer.

Vi ændrer udsnittet af koordinatsystemet så vi kan se skæringspunktet.

Vi får Nspire til at finde skæringspunktet og får $(17\,,13)$ .

Skæringspunktet er $\underline{\underline{(17\,,13)}}$ .



## 15. Hvornår bliver A billigst?

**Opgave:** To forretninger A og B starter samtidigt salget af en vare.

Når $x$ = dage efter salgets start og $y$ = varens pris i kr. er

for A: $y = -3{,}5x + 2239$

for B: $y = -2x + 1888$

Hvornår bliver A billigst?

**Svar:** Vi bestemmer først $x$ så de to priser er ens, dvs. så

$$-3{,}5x + 2239 = -2x + 1888$$

Vi løser denne ligning mht. $x$ og får $x = 234$ .

Efter dag 234 er A billigst.