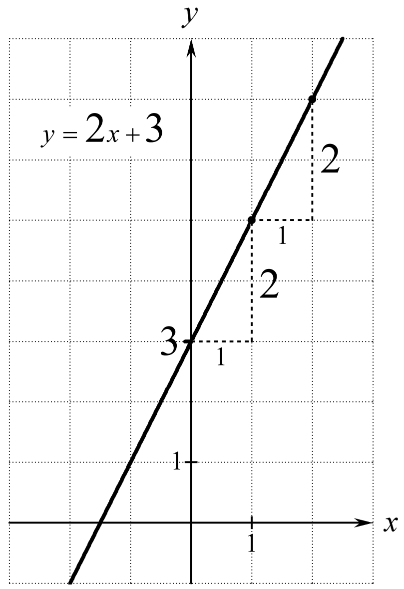
Lineære sammenhænge



2008 Karsten Juul

Dette hæfte er en fortsættelse af hæftet "Variabelsammenhænge, 2008".

Indhold

Nyere hæfter m.m.:

http://mat1.dk/lineaere_sammenhaenge_for_gymnasiet_og_hf.pdf 20/10-10

http://mat1.dk/betydning_af_ax+b.pdf 3/4-10

http://mat1.dk/lineaere_sammenhaenge_udg2.pdf 15/10-9

Lineære sammenhænge
1. udgave 2008

Afsnit 8. Hvad er en lineær sammenhæng?

DEFINITION 8.1 Hvad er en lineær sammenhæng?

Vi kalder en sammenhæng for lineær hvis den kan beskrives ved en ligning der fås ved at indsætte bestemte tal for a og b i ligningen

(1) $y = ax + b$

Opgave 8.2: Ligningen

(2) $y = 0{,}4x - 1{,}7$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = ax + b$ for at få sammenhængen (2)?

Svar: Vi skal sætte

$$\underline{\underline{a = 0{,}4}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = -1{,}7}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 0{,}4x + (-1{,}7)$$

som kan omskrives til ligningen (2).

Bemærkning

I svaret på 8.2 viste vi at sammenhængen (2) kan fås ved at sætte bestemte tal ind for a og b i ligning (1) i definition 8.1 . Ifølge definition 8.1 har vi altså vist at (2) er en lineær sammenhæng.

Opgave 8.3: Ligningen

(3) $y = 2 \cdot (3 - x)$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = ax + b$ for at få sammenhængen (3)?

Svar: Først omskriver vi ligningen (3) ved at gange 2 ind i parentesen:

(3a) $y = 6 - 2x$

For at få sammenhængen (3) skal vi altså i ligningen $y = ax + b$ sætte

$$\underline{\underline{a = -2}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 6}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = (-2)x + 6$$

som kan omskrives til ligningen (3a).

Øvelse 8.4

For hver af følgende sammenhænge skal du finde ud af hvilke tal vi skal indsætte for a og b i ligningen $y = ax + b$ for at få sammenhængen.

(1) $y = -x - 3$ (2) $y = 1 + x$ (3) $y = 8{,}5$ (4) $y = \frac{x}{2}$ (5) $y = 5(x+3)+1$

Øvelse 8.5

Opskriv de to ligninger der fremkommer når du i ligningerne (1) og (2) nedenfor erstatter u med 2 og v med 1. For hver af de to ligninger skal du udfylde en tabel som den til højre.

x	1	2	3
y			

(1) $y = u - (v - x)$ (2) $y = x + u - v$

Indsæt et andet tal for u og et andet tal for v sådan at de to ligninger ikke får samme tabel, eller forklar hvorfor det ikke kan lade sig gøre.

Eksempel 8.6

For nogle plader er der følgende sammenhæng mellem omkredsen og højden:

(4a) **Omkredsen** er det tal vi får når vi ganger **højden** med 3 og lægger 2 til resultatet.

Opgave 8.7: Skriv (4a) som en ligning. (*Se eksempel 8.6*)

Svar: Vi indfører betegnelserne

x = højde

y = omkreds

Så kan (4a) skrives sådan:

y fås ved at gange ***x*** med 3 og lægge 2 til resultatet

Med symboler kan (4a) altså skrives sådan:

(4b) $\underline{\underline{y = 3x + 2}}$.

Opgave 8.8: En plade A har omkredsen 16. Hvilket tal får vi hvis vi ganger A's højde med 3 og lægger 2 til? (*Se eksempel 8.6*)

Svar: Ifølge (4a) får vi A's omkreds, dvs. $\underline{\underline{16}}$.

Opgave 8.9: Hvis x er 5, vil y så være 16? (*Se eksempel 8.6*)

Svar: Hvis x er 5 vil

$y = 3 \cdot 5 + 2$

dvs. $y = 17$. Svaret er altså:

$\underline{\underline{\text{Nej, } y \text{ er ikke } 16 \text{ når } x \text{ er } 5}}$.

Opgave 8.10: Skriv en ligning med x der udtrykker at vi får 16 når vi ganger x med 3 og lægger 2 til.

Svar: $\underline{\underline{16 = 3x + 2}}$

Øvelse 8.11

(1) Skriv en ligning der udtrykker at

vi får 17 når vi ganger x med 3 og lægger 2 til resultatet.

(2) Løs denne ligning, og skriv hvad løsningen fortæller om pladerne fra eksempel 8.6 .

(3) Gang 7 med 3 og læg 2 til, og fortæl hvad resultatet fortæller om pladerne fra eksempel 8.6 .

Øvelse 8.12

Denne øvelse drejer sig om grafen for sammenhængen (4b) i 8.7 .

(1) Hvad er y-koordinaten til det grafpunkt som har x-koordinat 0,5 ?

(2) Hvad er x-koordinaten til det grafpunkt som har y-koordinat 5 ?

(3) Hvad fortæller svaret på (1) om pladerne fra 8.6 ?

(4) Hvad fortæller svaret på (2) om pladerne fra 8.6 ?

(5) Ligger punktet $(3, 12)$ på grafen?

(6) Formulér spørgsmål (5) som et spørgsmål om højde og omkreds for pladerne fra 8.6 .

Øvelse 8.13

Om alle Peters trekanter gælder:

Højden er det tal vi får når vi dividerer grundlinjen med 2 og lægger 4 til resultatet.

(1) Skriv denne sammenhæng som en ligning, og husk at det er nødvendigt først at skrive hvilke bogstaver der står for højde og grundlinje (se 8.7).

Om en af Peters trekanter er oplyst:

Vi får 12 når vi dividerer grundlinjen med 2 og lægger 4 til.

(2) Skriv denne oplysning som en ligning.

(3) Løs ligningen, og skriv hvad løsningen fortæller om Peters trekanter.

De følgende spørgsmål drejer sig om grafen for sammenhængen fra spørgsmål (1).

(4) Ligger punktet $(1,\ 4{,}5)$ på grafen?

(5) Formulér spørgsmål (4) som et spørgsmål om højde og grundlinje i Peters trekanter.

(6) Hvad er y-koordinaten til det grafpunkt som har x-koordinat 10 ?

(7) Formulér spørgsmål (6) som et spørgsmål om højde og grundlinje i Peters trekanter.

Afsnit 9. Hvordan ser grafen ud for en lineær sammenhæng?

Ligningen

(1) $y = 0{,}5x + 0{,}7$

viser en lineær <u>sammenhæng</u> mellem to <u>variable</u> y og x.

Ved at beregne nogle støttepunkter (se afsnit 4) kan vi tegne grafen for sammenhængen (1). Hvis vi gør det, vil vi se at punkterne ligger på en ret linje. Hvis vi prøver med en anden lineær sammenhæng, vil vi se at også for denne sammenhæng ligger punkterne på en ret linje.

Hvis en oplysning om noget der gælder, er særlig vigtig, så kalder man denne oplysning for en <u>SÆTNING</u> . Rammen indeholder sådan oplysning.

SÆTNING 9.1 Hvordan ser grafen ud for en lineær sammenhæng?
Grafen for en lineær sammenhæng er en ret linje.

<u>Opgave 9.2:</u> **Tegne graf for sammenhængen *y* = *ax*+*b***

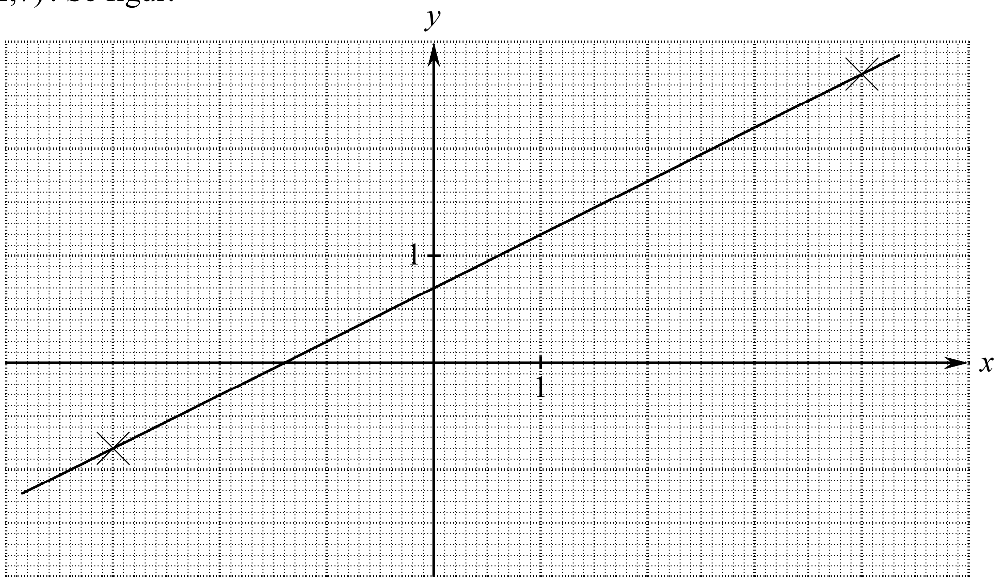
Tegn grafen for sammenhængen (1).

<u>Svar:</u> Da grafen er en ret linje (ifølge sætning 9.1), behøver vi kun udregne to punkter for at kunne tegne den.

For at få stor nøjagtighed <u>skal de to punkter ligge langt fra hinanden</u>.

Når $x = -3$ er $y = 0{,}5\cdot(-3) + 0{,}7 = -0{,}8$
Når $x = 4$ er $y = 0{,}5\cdot 4 + 0{,}7 = 2{,}7$

Nu kan vi tegne grafen som den rette linje gennem punkterne $(-3, -0{,}8)$ og $(4, 2{,}7)$. Se figur.



<u>Øvelse 9.3</u> **Tegne graf for sammenhængen *y* = *ax*+*b***

Denne øvelse drejer sig om grafen for sammenhængen $y = -0{,}8x + 2$.

(1) Hvorfor kan vi for denne graf nøjes med to støttepunkter? (Se 9.2).
(2) Tegn et koordinatsystem hvor både x-akse og y-akse går fra -6 til 6 .
(3) Hvis vi skal tegne grafen i dette koordinatsystem, hvorfor dur det så ikke at bruge de to støttepunkter der har x-koordinater 0 og 1? (Se 9.2).
(4) Tegn grafen i det tegnede koordinatsystem

SÆTNING 9.4 Afgøre om sammenhængen y = ax+b er voksende eller aftagende

En lineær sammenhæng $y = ax + b$ er

aftagende hvis a er negativ

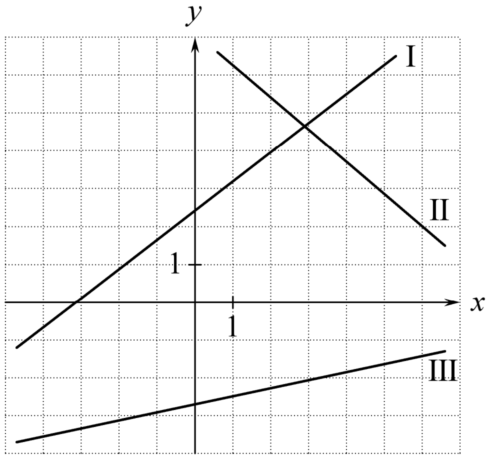
og

voksende hvis a er positiv.

Opgave 9.5: Afgøre om sammenhængen y = ax+b er voksende eller aftagende

På figuren nedenfor er vist graferne for tre lineære sammenhænge I, II og III .
Afgør for hver af dem om a er positiv eller negativ.

Svar: Sammenhæng I er voksende, så a er positiv (ifølge 9.4).
Sammenhæng II er aftagende, så a er negativ (ifølge 9.4).
Sammenhæng III er voksende, så a er positiv (ifølge 9.4).



Øvelse 9.6 Afgøre om sammenhængen y = ax+b er voksende eller aftagende

For hver af følgende sammenhænge mellem x og y skal du skrive en begrundelse for at den er voksende, eller for at den er aftagende, eller for at den hverken er voksende eller aftagende.

(1) $y = 0{,}2x - 3$ (2) $y = -4 + x$ (3) $y = -x - 2$ (4) $y = 0{,}6 - 4x$ (5) $y = 100 + 0 \cdot x$

Afsnit 10. Opgaver hvor vi skal bestemme *y* eller *x* i $y = ax + b$

Eksempel 10.1

For nogle skiver der findes i forskellige størrelser, gælder

(1) $$y = 0{,}2x + 0{,}1$$

hvor y er tykkelsen, målt i mm, og x er diameteren, målt i mm.

Opgave 10.2: Hvad er tykkelsen af en skive hvis diameter er 14 mm? (*Se eksempel 10.1*)

Svar: Under ligningen (1) står at x diameteren, så da det oplyste tal 14 er en diameter, skal 14 indsættes på x's plads:

$$y = 0{,}2 \cdot 14 + 0{,}1$$

Ved at udregne dette får vi

$$y = 2{,}9 \;.$$

Under ligningen (1) står at y er tykkelsen, så

en skive med diameter 14 mm har tykkelsen $\underline{\underline{2{,}9 \text{ mm}}}$.

Opgave 10.3: Hvad er diameteren af en skive hvis tykkelse er 4,5 mm? (*Se eksempel 10.1*)

Svar: Under ligningen (1) står at y er tykkelsen, så da det oplyste tal 4,5 er en tykkelse, skal 4,5 indsættes på y's plads:

$$4{,}5 = 0{,}2x + 0{,}1$$

For at løse denne ligning starter vi med at trække 0,1 fra på begge sider:

$$4{,}4 = 0{,}2x$$

Derefter dividerer vi begge sider med 0,2:

$$\frac{4{,}4}{0{,}2} = \frac{0{,}2x}{0{,}2}$$

Vi får

$$22 = x$$

Under ligningen (1) står at x er diameteren, så

en skive med tykkelse 4,5 mm har diameteren $\underline{\underline{22 \text{ mm}}}$.

Øvelse 10.4

Om en vare er oplyst at

$$y = 3{,}65x + 8{,}90$$

hvor y er prisen i kr. og x er bredden i cm.

(1) Hvad er bredden når prisen er 28,61 kr.?

(2) Hvad er prisen når bredden er 8 cm?

I følgende opgave lader vi t stå for et tal som endnu ikke er oplyst.

Opgave 10.5: Hvad er diameteren af en skive hvis tykkelse er t mm? (*Se eksempel 10.1*)

Svar: Under ligningen (1) står at y er tykkelsen, så da det oplyste tal t er en tykkelse, skal t indsættes på y's plads:

$$t = 0{,}2x + 0{,}1$$

For at løse denne ligning starter vi med at trække 0,1 fra på begge sider:

$$t - 0{,}1 = 0{,}2x$$

Derefter dividerer vi begge sider med 0,2:

$$\frac{t-0{,}1}{0{,}2} = \frac{0{,}2x}{0{,}2}$$

Vi får

$$\frac{t-0{,}1}{0{,}2} = x$$

Under ligningen (1) står at x er diameteren, så for en skive med tykkelse t mm er diameteren i mm lig

(2) $$\underline{\underline{\frac{t-0{,}1}{0{,}2}}}\ .$$

Bemærkning

Hvis $t = 4{,}5$ får vi af (2) at diameteren i mm er

$$\frac{4{,}5-0{,}1}{0{,}2} = 22\ .$$

Øvelse 10.6

Vi beskæftiger os stadig med varerne fra øvelse 10.4.

(1) Hvis p står for prisen på en af varerne, hvad er så bredden af denne vare (udtrykt ved p)?

(2) Vis hvordan svaret på (1) kan bruges til at besvare første spørgsmål i øvelse 10.4.

Afsnit 11. Hvordan kan vi beregne ændringer i *y* og *x* for en lineær sammenhæng?

Eksempel 11.1

For en plante gælder

(1) $$y = 1{,}5x + 3{,}7$$

hvor y er vægten, målt i gram, og x er længden målt i cm.

Opgave 11.2: Nu er plantens længde 5,2 cm. Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 2,6 cm længere? (*Se eksempel 11.1*)

Svar: x er 5,2. Spørgsmålet er: hvor meget større bliver y når x bliver 2,6 enheder større?

Når x er blevet 2,6 enheder større, så har x størrelsen

$$5{,}2 + 2{,}6 = 7{,}8$$

Vi bestemmer y når x er 5,2 og 7,8:

Når $x = 5{,}2$ er $y = 1{,}5 \cdot 5{,}2 + 3{,}7 = 11{,}5$.

Når $x = 7{,}8$ er $y = 1{,}5 \cdot 7{,}8 + 3{,}7 = 15{,}4$.

Da x voksede fra 5,2 til 7,8, så voksede y altså fra 11,5 til 15,4.
Nu kan vi nemt regne ud hvor meget større y er blevet:

$$15{,}4 - 11{,}5 = 3{,}9$$

Der gælder altså:

Planten blev $\underline{\underline{3{,}9 \text{ gram}}}$ tungere da den blev 2,6 cm længere.

Bemærkning

Trinene i udregningerne er vist nedenfor.

$\xrightarrow{+2{,}6}$

x	5,2	?
y		

Trin 1

$\xrightarrow{+2{,}6}$

x	5,2	7,8
y	?	?

Trin 2

$\xrightarrow{+2{,}6}$

x	5,2	7,8
y	11,5	15,4

$\xrightarrow[+\,?]{}$

Trin 3

$\xrightarrow{+2{,}6}$

x	5,2	7,8
y	11,5	15,4

$\xrightarrow[+\,3{,}9]{}$

Trin 4

Øvelse 11.3

Spørgsmålene drejer sig om planten fra eksempel 11.1 .
Nu er plantens længde 3,6 cm.

(1) Hvad er plantens længde når den er blevet 1,8 cm længere?

(2) Hvad er plantens vægt nu?

(3) Hvad er plantens vægt når den er blevet 1,8 cm længere?

(4) Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 1,8 cm længere?

(5) Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 3,2 cm længere?

Opgave 11.4: Nu vejer planten 7,9 gram. Hvor meget længere end nu vil planten være når den er blevet 2,1 gram tungere? (*Se eksempel 11.1*)

Svar: y er 7,9. Spørgsmålet er: hvor meget større bliver x når y bliver 2,1 enheder større?

Når y er blevet 2,1 enheder større, så har y størrelsen

$$7{,}9 + 2{,}1 = 10{,}0$$

Vi bestemmer x når y er 7,9 og 10,0:

Ved at løse ligningen $7{,}9 = 1{,}5x + 3{,}7$ får vi $x = 2{,}8$.

Ved at løse ligningen $10{,}0 = 1{,}5x + 3{,}7$ får vi $x = 4{,}2$.

Da y voksede fra 7,9 til 10,0, så voksede x altså fra 2,8 til 4,2.
Nu kan vi nemt regne ud hvor meget større x er blevet:

$$4{,}2 - 2{,}8 = 1{,}4$$

Der gælder altså:

Planten blev $\underline{\underline{1{,}4\text{ cm}}}$ længere da den blev 2,1 gram tungere.

Bemærkning

Trinene i udregningerne er vist nedenfor.

x		
y	7,9	?

$\xrightarrow{+\,2{,}1}$

Trin 1

x	?	?
y	7,9	10,0

$\xrightarrow{+\,2{,}1}$

Trin 2

$\xrightarrow{+\,?}$

x	2,8	4,2
y	7,9	10,0

$\xrightarrow{+\,2{,}1}$

Trin 3

$\xrightarrow{+\,1{,}4}$

x	2,8	4,2
y	7,9	10,0

$\xrightarrow{+\,2{,}1}$

Trin 4

Øvelse 11.5

Spørgsmålene drejer sig om planten fra eksempel 11.1 .
Nu er plantens vægt 4,9 gram.

(1) Hvad er plantens vægt når den er blevet 1,2 gram tungere længere?

(2) Hvad er plantens længde nu?

(3) Hvad er plantens længde når den er blevet 1,2 gram tungere?

(4) Hvor meget længere end nu vil planten være når den er blevet 1,2 gram tungere?

(5) Hvor meget længere end nu vil planten være når den er blevet 3 gram tungere?

I følgende opgave lader vi *t* stå for et tal som endnu ikke er oplyst.

Opgave 11.6: Nu er plantens længde 5,2 cm. Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet t cm længere? (*Se eksempel 11.1*)

Svar: x er 5,2. Spørgsmålet er: hvor meget større bliver y når x bliver t enheder større?
Når x er blevet t enheder større, så har x størrelsen

$$5{,}2+t$$

Vi bestemmer y når x er 5,2 og $5{,}2+t$:

Der er parentes da 1,5 skal ganges med det vi får når 5,2 lægges til *t*.

Når $x = 5{,}2$ er $y = 1{,}5 \cdot 5{,}2 + 3{,}7 = 11{,}5$

Når $x = 5{,}2+t$ er $y = 1{,}5 \cdot (5{,}2+t) + 3{,}7 \;=\; 7{,}8 + 1{,}5t + 3{,}7 \;=\; 11{,}5 + 1{,}5t$

Vi kan nu regne ud hvor meget større y er blevet:

$$11{,}5 + 1{,}5t \;-\; 11{,}5 \;=\; 1{,}5t$$

Der gælder altså at da planten blev t cm længere, så var vægtstigningen i gram

$$\underline{\underline{1{,}5t}}$$

Bemærkninger

Opgavens resultat kan anskueliggøres sådan:

$\xrightarrow{+\,t}$

x	5,2	
y		

$\xrightarrow[+\,1{,}5t]{}$

Stigningen i y-værdien er halvanden gange stigningen i x-værdien.

Øvelse 11.7

I bemærkningerne ovenfor står en regel om planten fra 11.1. Vis hvordan reglen kan bruges til at besvare følgende spørgsmål:

(1) Nu er plantens længde 5,2 cm. Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 1 cm længere?

(2) Nu er plantens længde 5,2 cm. Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 2 cm længere?

(3) Nu er plantens længde 5,2 cm. Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 10 cm længere?

Vi lader igen t stå for et tal som endnu ikke er oplyst.

Opgave 11.8: Når x starter med at have værdien t og derefter bliver gjort 1 enhed større, hvor meget større bliver så y ? (*Se eksempel 11.1*)

Dette spørgsmål er anskueliggjort her:

$\xrightarrow{+1}$

x	t	
y		

$\xrightarrow[+?]{}$

Svar: Værdien af x øges fra t til $t+1$.

Når $x = t$ er $y = 1{,}5t + 3{,}7$

Når $x = t+1$ er $y = 1{,}5(t+1) + 3{,}7 = 1{,}5t + 1{,}5 + 3{,}7 = 1{,}5t + 5{,}2$

Vi kan nu regne ud hvor meget større y bliver når x øges fra t til $t+1$:

$$1{,}5t + 5{,}2 - (1{,}5t + 3{,}7) = 1{,}5t + 5{,}2 - 1{,}5t - 3{,}7 = 1{,}5$$

Altså gælder at

y bliver $\underline{\underline{1{,}5}}$ større når x bliver 1 større.

Bemærkning

Start-tallet t indgår ikke i svaret. Der gælder altså:

Hver gang x bliver 1 enhed større, så vil y blive 1,5 enheder større.

Øvelse 11.9

I bemærkningen ovenfor står en regel om planten fra 11.1. Vis hvordan reglen kan bruges til at besvare følgende spørgsmål:

(1) Hvor meget tungere bliver planten når den bliver 1 cm længere?

(2) Hvor meget tungere bliver planten når den bliver 2 cm længere?

(3) Hvor meget tungere bliver planten når den bliver 3 cm længere?

Øvelse 11.10

Ligningen

$$y = 5x + 2$$

viser sammenhængen mellem to variable x og y.

(1) Find ud af hvad der skal stå efter sidste lighedstegn:

Når $x = t$ er $y =$

(2) Find ud af hvilket reduceret udtryk der skal stå efter sidste lighedstegn:

Når $x = t+1$ er $y = 5(t+1) + 2 =$

(3) Find ud af hvad der skal stå efter de to sidste lighedstegn nedenfor når udregningen skal være omtrent som den i (2)

Når $x = t+2$ er $y = \qquad =$

Vis hvordan dine svar på foregående spørgsmål kan bruges til at besvare følgende to spørgsmål:

(4) Hvor mange enheder bliver y større når x bliver 1 enhed større.

(5) Hvor mange enheder bliver y større når x bliver 2 enhed større.

Afsnit 12. Hvad fortæller *a* og *b* om den lineære sammenhæng $y = ax + b$?

I dette afsnit står både *a*, *b* og *t* for tal som endnu ikke er oplyst.

<u>Eksempel 12.1</u>

Ligningen

(1) $y = ax + b$

viser sammenhængen mellem to variable y og x.

<u>Opgave 12.2:</u> **Bevis for 12.3**

Hvilken ændring sker i værdien af y , når x ændrer værdi fra t til $t+1$? (*Se eksempel 12.1*)

<u>Svar:</u> Vi regner ud hvad y er når x er t og $t+1$:

Når $x = t$ er $y = at + b$

Når $x = t+1$ er $y = a(t+1) + b = at + a + b$

Vi udregner nu ændringen i værdien af y :

$$at + a + b - (at + b) = at + a + b - at - b = a$$

Dvs. når x ændres fra t til $t+1$, så lægges a til værdien af y.

Bemærkninger

Opgavens udregning kan anskueliggøres sådan:

$$\xrightarrow{+1}$$

x	t	$t+1$
y	$at+b$	$at+a+b$

$$\xrightarrow[+a]{}$$

Udregningen i svaret viser at uanset hvilken startværdi x har, så lægges der a til værdien af y når der lægges 1 til værdien af x .

Bemærk at a kan være negativ. Hvis a er -2 , så bliver y altså 2 enheder mindre hver gang x bliver 1 enhed større.

<u>Svaret på 12.2 er et **BEVIS** for sætning 12.3 nedenfor.</u>

Hvad er et BEVIS ?

Et bevis for en påstand er nogle logiske slutninger der gør det fuldstændig sikkert at påstanden gælder.

SÆTNING 12.3 Hvad fortæller *a* i $y = ax+b$?

Hvis $y = ax + b$, fortæller a at

hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver 1 enhed større, så vil $\boldsymbol{y}$ blive $\boldsymbol{a}$ enheder større.

Eksempel 12.4

Ligningen

(2) $y = 5x + 20$

viser sammenhængen mellem følgende to variable

(3) x = temperaturen (målt i °C)
y = overskuddet (målt i mio. kr.)

Opgave 12.5: **Hvad fortæller a i $y = ax+b$?**

I ligningen (2) står tallet 5. Hvad fortæller tallet 5 om overskuddet?
(*Se eksempel 12.4*)

Svar: Reglen om hvad a fortæller (sætning 12.3) siger at

hver gang x bliver 1 enhed større, så vil y blive a enheder større.

Heri erstatter vi a, x og y med oplysningerne fra (2) og (3):

(4) Hver gang **temperaturen** bliver 1 enhed større, så vil **overskuddet** blive **5** enheder større.

Sætningen (4) er klodset sprog, så vi omformulerer (4) til:

For hver grad temperaturen stiger, vokser overskuddet med 5 mio. kr.

Dette er hvad tallet 5 fortæller om overskuddet.

Øvelse 12.6

Mellem de variable

x = antal uger efter at foreningen blev oprettet y = antal medlemmer

er der følgende sammenhæng:

$y = 25x + 70$

Hvad fortæller tallet 25 om antallet af medlemmer? (Brug metoden fra 12.5).

Øvelse 12.7

Mellem de variable

x = antal minutter efter at vandhanen blev åbnet y = antal liter i karret

er der følgende sammenhæng:

$y = 3x + 14$

Hvad fortæller tallet 3 om vandet i karret? (Brug metoden fra 12.5).

Øvelse 12.8

For en bestemt busk vokser bredden hurtigere end højden. Mellem de variable

x = bredde (i cm) y = højde (i cm)

er der følgende sammenhæng:

$y = 0{,}8x + 2$

Hvad fortæller tallet 0,8 om planten? (Brug metoden fra 12.5).

Opgave 12.9: **Bevis for 12.10**

I eksempel 10.1 står at ligningen

(1) $y = ax + b$

viser sammenhængen mellem to variable y og x.

Hvad er y når x er 0?

Svar: Når $x = 0$ er $y = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$.

Dvs. y er $\underline{\underline{b}}$ når x er 0.

Bemærkning

Svaret på 12.9 er et **BEVIS** for sætning 12.10.

Et bevis for en påstand er nogle logiske slutninger der gør det fuldstændig sikkert at påstanden gælder.

SÆTNING 12.10 Hvad fortæller b i $y = ax+b$?

Hvis $y = ax + b$, fortæller b at

når $\boldsymbol{x}$ er 0 , er $\boldsymbol{y}$ lig $\boldsymbol{b}$.

Opgave 12.11: **Hvad fortæller b ?**

I eksempel 12.4 står at ligningen

(2) $y = 5x + 20$,

viser sammenhængen mellem følgende to variable

(3) x = temperaturen (målt i °C)
y = overskuddet (målt i mio. kr.)

I ligningen (2) står tallet 20. Hvad fortæller tallet 20 om overskuddet?

Svar: Reglen om hvad b fortæller (sætning 12.10) siger at

når $\boldsymbol{x}$ er 0 , er $\boldsymbol{y}$ lig $\boldsymbol{b}$.

Heri erstatter vi $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ med oplysningerne fra (2) og (3):

Når **temperaturen** er 0, er **overskuddet** lig **20**.

Vi omformulerer dette til

Ved 0 °C er overskuddet 20 kr.

Dette er hvad tallet 20 i ligningen (2) fortæller os om overskuddet.

Bemærkning

Nedenfor er anskueliggjort hvad tallene 5 og 20 i ligningen $y = 5x + 20$ fra 12.11 fortæller om overskuddet:

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 →

Temperatur (°C)	–2	–1	0	1	2	3
Overskud (kr.)	10	15	**20**	25	30	35

→ **+5** → **+5** → **+5** → **+5** → **+5**

Opgave 12.12: **Når a er negativ i $y = ax+b$**

Der gælder at $a = -5$ i ligningen

(5) $y = -5x + 90$

hvor

(6) x er temperatur (i °C) og y er overskud (i kr.).

I ligningen (5) står tallet –5. Hvad fortæller tallet –5 om overskuddet?

Svar: Reglen om hvad a fortæller (sætning 12.3) siger at

hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver 1 enhed større, så vil $\boldsymbol{y}$ blive $\boldsymbol{a}$ enheder større.

Heri erstatter vi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ med oplysningerne fra (5) og (6):

Hver gang **temperaturen** bliver 1 enhed større, så vil **overskuddet** blive **–5** enheder større.

Dette betyder:

(7) Hver gang **temperaturen** bliver 1 enhed større, så vil **overskuddet** blive **5** enheder mindre.

Sætningen (7) er klodset sprog, så vi omformulerer (7) til:

For hver grad temperaturen stiger, falder overskuddet med 5 mio. kr.

Dette er hvad tallet –5 i ligningen (5) fortæller os om overskuddet.

Øvelse 12.13

Mellem de variable

x = antal dage efter at der blev lagt brød i skabet y = antal brød i skabet

er der følgende sammenhæng:

$y = -4x + 28$

Hvad fortæller tallet -4 om antallet af brød i skabet? (Brug metoden fra 12.12).

Øvelse 12.14

I et havområde gælder

$y = -0{,}1x + 460$

hvor

x = afstand til havbunden (i meter) y = tryk (i atmosfære)

Hvad fortæller tallene $-0{,}1$ og 460 om trykket?

Øvelse 12.15

Mellem de variable

x = tiden (målt i uger efter 1. maj)

y = dyrets vægt (målt i gram)

er der følgende sammenhæng:

$y = 15x + 80$

Hvad fortæller tallene 15 og 80 om dyrets vægt?

Opgave 12.16: **Når *x* øges med flere enheder** (i spørgsmål (3) øges x med 5 enheder)

Mellem de variable

x = temperaturen i beholder A (i °C)
y = temperaturen i beholder B (i °C)

er der følgende sammenhæng:

$$y = 2{,}2x - 40$$

(1) Hvad fortæller tallene $2{,}2$ og -40 om temperaturerne i de to beholdere?

(2) Hvor mange grader stiger temperaturen i B når temperaturen i A ændres fra 18 grader til 19 grader ?

(3) Hvor mange grader stiger temperaturen i B når temperaturen i A stiger 5 grader?

Svar:

(1) I en sammenhæng $y = ax + b$ gælder:

Hver gang ***x*** bliver 1 enhed større, så vil ***y*** blive ***a*** enheder større.

Når ***x*** er 0 , er ***y*** lig ***b***.

Da $a = 2{,}2$ og $b = -40$, og x og y er temperaturerne i A og B, gælder:

$$\underline{\underline{\text{Hver gang temperaturen i A stiger 1 grad,}}}$$
$$\underline{\underline{\text{så vil temperaturen i B stige 2,2 grader.}}}$$

$$\underline{\underline{\text{Når temperaturen i A er 0 grader, er temperaturen i B } -40 \text{ grader.}}}$$

(2) Når temperaturen i A ændres fra 18 grader til 19 grader, så ændres den 1 grad, så af svaret på (1) får vi:

Temperaturen i B stiger $\underline{\underline{2{,}2 \text{ grader}}}$ når temperaturen i A stiger fra 18 til 19 grader.

(3) Hver gang temperaturen i A stiger 1 grad, stiger temperaturen i B 2,2 grader, så da $2{,}2 \cdot 5 = 11$ får vi:

Temperaturen i B stiger $\underline{\underline{11 \text{ grader}}}$ når temperaturen i A stiger 5 grader.

Øvelse 12.17

Mellem de variable

x = temperaturen i beholder A (i °C)
y = temperaturen i beholder B (i °C)

er der følgende sammenhæng:

$$y = -3x - 8$$

(1) Hvad fortæller tallene -3 og -8 om temperaturerne i de to beholdere?

(2) Hvad sker der med temperaturen i B når temperaturen i A stiger 1 grad?

(3) Hvad sker der med temperaturen i B når temperaturen i A stiger 10 grader?

Øvelse 12.18

Mellem de variable

x = skinnens temperatur (i °C)
y = skinnens længde (i meter)

er der følgende sammenhæng:

$$y = 0{,}005x + 500$$

(1) Hvad fortæller tallet $0{,}005$ om skinnens længde?

(2) Vis hvordan svaret på (1) kan bruges til at regne ud hvor meget længere skinnen bliver når temperaturen ændres fra 14 grader til 15 grader.

(3) Vis hvordan svaret på (1) kan bruges til at regne ud hvor meget længere skinnen bliver når temperaturen ændres fra -10 grader til 30 grader.

Øvelse 12.19

En virksomheds omkostninger i en uge afhænger af hvor stor en mængde der er fremstillet den pågældende uge.

Mellem de variable

x = mængde (i ton)
y = omkostninger (i mio. kr.)

er der følgende sammenhæng:

$$y = 5{,}3 + 0{,}2x$$

(1) Hvad fortæller tallet $0{,}2$ om omkostningerne?

(2) Vis hvordan svaret på (1) kan bruges til at regne ud hvor meget større omkostningerne bliver, hvis der fremstilles 1 ton mere.

(3) Vis hvordan svaret på (1) kan bruges til at regne ud hvor meget større omkostningerne bliver, hvis der fremstilles 100 ton mere.

Øvelse 12.20

Prisen på en vare ændres hver dag.

Mellem de variable

x = antal dage efter udsalgets start.
y = pris i kr.

er der følgende sammenhæng:

$$y = 6000 - 400x$$

Hvor meget billigere bliver varen, hvis vi venter 5 dage med at købe den?

Afsnit 13. Hvordan kan vi bestemme lineære sammenhænge?

<u>**Opgave 13.1:**</u> **Hvordan kan vi udfylde resten af en tabel for en lineær sammenhæng?**

I tabellen er skrevet to af y-værdierne i en lineær sammenhæng $y = ax + b$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y					5	6,5	

Udfyld resten af tabellen.

<u>Svar:</u> <u>Først bruger vi reglen om hvad *a* fortæller (sætning 12.3), til at bestemme *a*:</u>

Af tabellen ovenfor ses at når x ændres fra 1 til 2, så ændres y fra 5 til 6,5.

Dvs. når *x* bliver 1 enhed større, vil *y* blive 1,5 enheder større.

Så må a være 1,5 , ifølge reglen om hvad a fortæller (sætning 12.3).

<u>Så bruger vi reglen om hvad *a* fortæller (sætning 12.3), til at bestemme de andre *y*-værdier i tabellen:</u>

Ifølge denne regel skal vi lægge 1,5 til y hver gang vi lægger 1 til x:

$$\xrightarrow{+\,1}$$

2	3
6,5	

$$\xrightarrow[+\,1{,}5]{}$$

Den udfyldte tabel:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–1	0,5	2	3,5	5	6,5	8

Bemærkning

Af reglen om hvad b fortæller (sætning 12.10), følger at b er 3,5 , så <u>ligningen</u> for sammenhængen er

$$y = 1{,}5x + 3{,}5 \ .$$

<u>**Øvelse 13.2**</u>

I tabellen er skrevet to af y-værdierne i en lineær sammenhæng $y = ax + b$.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y				5	9		

Brug metoden fra 13.1 til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen.

<u>**Øvelse 13.3**</u>

I tabellen er skrevet to af y-værdierne i en lineær sammenhæng $y = ax + b$.

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y			7	6,5			

Brug metoden fra 13.1 til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen.

Øvelse 13.4

I tabellen er skrevet to af y-værdierne i en lineær sammenhæng $y = ax + b$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y			-4	-1			

Brug metoden fra 13.1 til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen.

Øvelse 13.5

(1) Find ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen nedenfor hvis der er en lineær sammenhæng mellem x og y: $y = ax + b$

(2) Find ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen nedenfor hvis x og y er omvendt proportionale: $y = \frac{k}{x}$

x	1	2	3	4
y	24	12		

Øvelse 13.6

I tabellen er skrevet to af y-værdierne i en lineær sammenhæng $y = ax + b$.

x	0	1	2	4	6	9	29
y	10	15					

Brug metoden fra 13.1 til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen, og læg mærke til at afstanden mellem x-værdierne ikke er den samme alle steder.

Øvelse 13.7

I tabellen er skrevet to af y-værdierne i en lineær sammenhæng $y = ax + b$.

x	-4	-2	0	1	2	12	100
y	10	15					

Brug metoden fra 13.1 til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen.

Øvelse 13.8

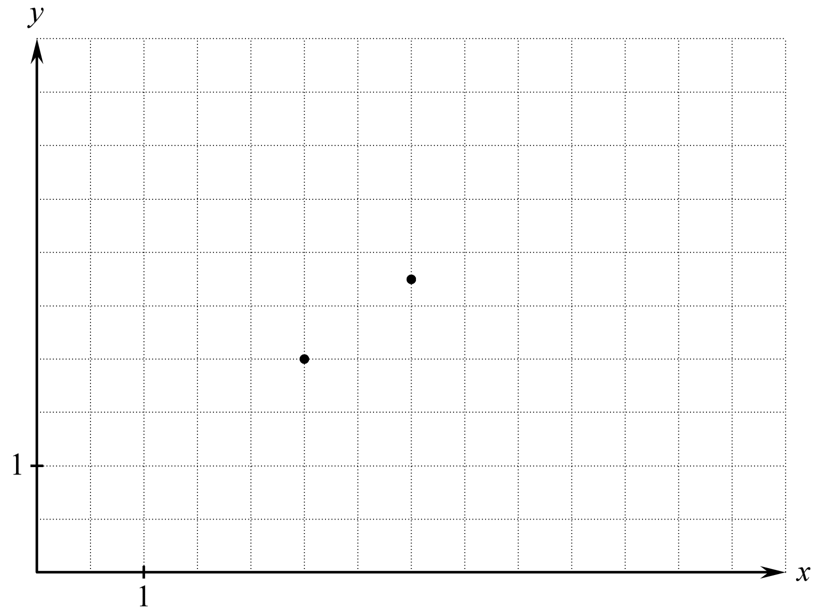
(1) Find ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen nedenfor hvis der er en lineær sammenhæng mellem x og y: $y = ax + b$

(2) Find ud af hvad der skal stå på de tomme pladser i tabellen nedenfor hvis x og y er omvendt proportionale: $y = \frac{k}{x}$

x	$0{,}5$	1	2	4	8
y		4	2		

<u>Opgave 13.9:</u> **Hvordan kan vi tilføje flere grafpunkter?**

På den øverste figur er vist to punkter på grafen for en lineær sammenhæng $y = ax + b$. Afsæt nogle flere grafpunkter.



<u>Svar:</u> <u>Først bruger vi reglen om hvad *a* fortæller (sætning 12.3), til at bestemme *a*:</u>

Det venstre af grafpunkterne ovenfor viser at når $x = 2{,}5$ er $y = 2$.

Det højre af grafpunkterne ovenfor viser at når $x = 3{,}5$ er $y = 2{,}75$.

Heraf ser vi at når vi ændrer *x* fra 2,5 til 3,5, så ændres *y* fra 2 til 2,75.

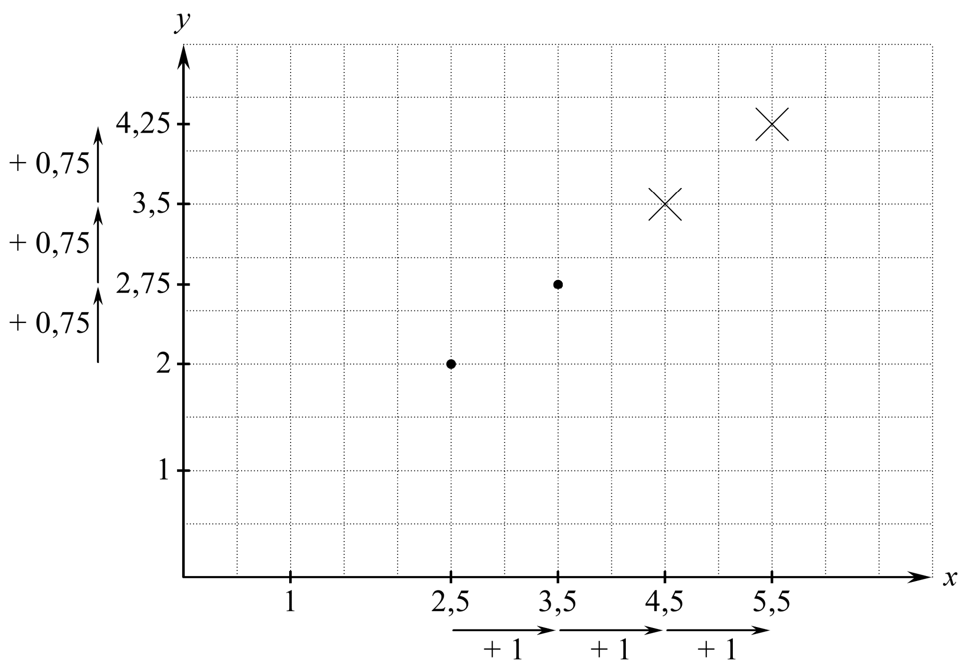
Dvs. når *x* bliver 1 enhed større, vil *y* blive 0,75 enheder større.

Så må *a* være 0,75 , ifølge reglen om hvad *a* fortæller (sætning 12.3).

<u>Så bruger vi reglen om hvad *a* fortæller (sætning 12.3), til at bestemme flere grafpunkter:</u>

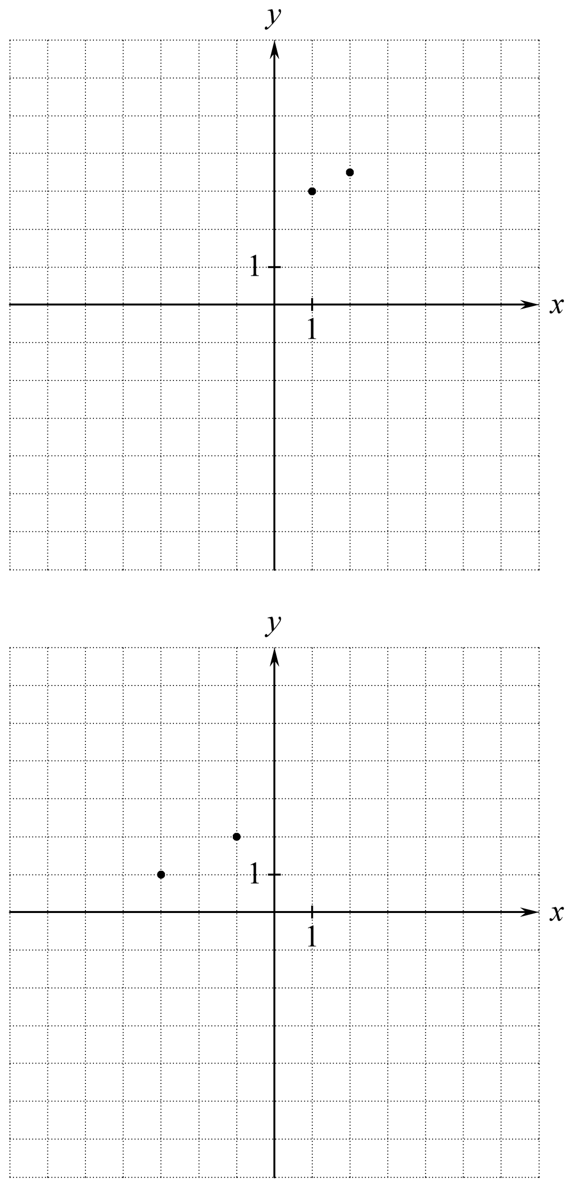
Ifølge denne regel skal vi lægge 0,75 til *y* hver gang vi lægger 1 til *x*.

Nedenfor er vist hvordan vi udnytter dette til at afsætte flere grafpunkter.



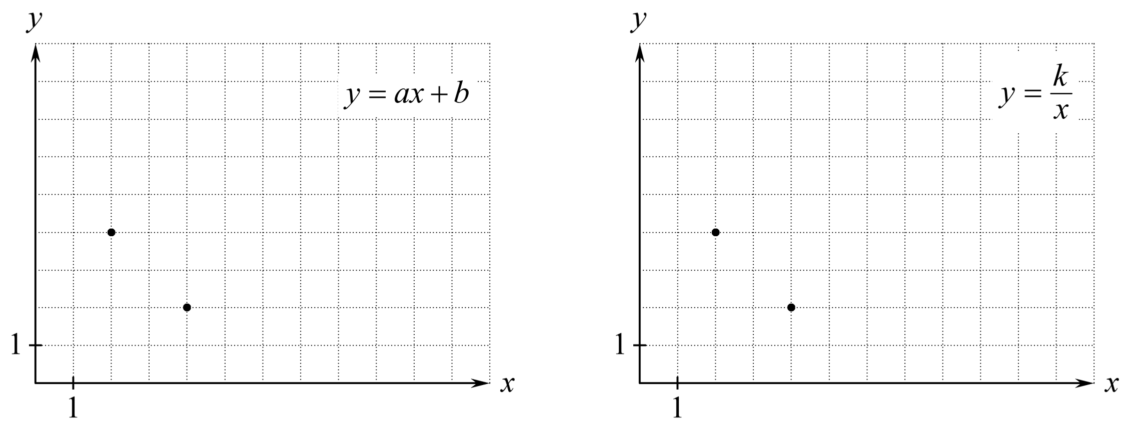
Øvelse 13.10

I hvert koordinatsystem er vist to punkter på grafen for en lineær sammenhæng $y = ax + b$. Brug metoden fra 13.9 til at afsætte nogle flere grafpunkter på hver af de fire grafer.



Øvelse 13.11

I det venstre koordinatsystem er afsat to punkter på grafen for en lineær sammenhæng, og i det højre er afsat to punkter på grafen for sammenhængen mellem to omvendt proportionale variable. Afsæt nogle flere punkter på de to grafer.



Opgave 13.12: Hvordan kan vi opskrive en ligning?

Om en plante oplyses:

(1) Højden vokser med 1,5 cm pr. uge

(2) Højden var 27,0 cm da planten blev købt.

Opskriv en ligning for sammenhængen mellem plantens højde og tidspunktet.

Svar: Vi vælger følgende betegnelser:

x = antal uger efter at planten blev købt

y = højden (i cm)

Oplysningen (1) kan nu formuleres sådan:

Hver gang x bliver 1 enhed større, så vil y blive 1,5 enheder større.

Af reglen om hvad a fortæller (sætning 12.3), følger at $a = 1{,}5$.

Oplysningen (2) kan formuleres sådan:

Når x er 0, så er y lig 27,0.

Af reglen om hvad b fortæller (sætning 12.10), følger at $b = 27{,}0$.

Sammenhængen mellem plantens højde og tidspunktet beskrives altså med ligningen

$$\underline{\underline{y = 1{,}5x + 27{,}0 \quad \text{hvor } y \text{ er højde i cm og } x \text{ er antal uger efter køb}}}$$

Bemærkning

Det er vigtigt at vi skriver hvad vi har valgt at lade x og y stå for ("antal uger efter køb" og "højde i cm") da ligningen er ubrugelig hvis læseren ikke ved hvad der skal indsættes for x, og ikke ved hvad det er man beregner ved at udregne ligningens højre side.

Øvelse 13.13

Trykket (i atmosfære) er 1 ved overfladen, og stiger med 0,1 hver gang man kommer 1 meter længere ned. Vi indfører følgende betegnelser:

x = antal meter under overfladen $\qquad$ y = trykket (i atmosfære)

(1) Hvor mange enheder bliver y større hver gang x bliver 1 enhed større?

(2) Hvad er y når x er 0?

(3) Brug svarene på (1) og (2) til at opskrive en ligning $y = ax + b$ for sammenhængen mellem tryk og antal meter under overfladen (se 13.12).

Øvelse 13.14

Ved månedens start er formuen på 61 000 kr. Hver dag bliver formuen 2000 kr. mindre. Vi indfører følgende betegnelser:

x = antal dage efter månedens start $\qquad$ y = formuens størrelse (i kr.)

(1) Hvor mange enheder bliver y større hver gang x bliver 1 enhed større? (At blive –5 enheder større er det samme som at blive 5 enheder mindre).

(2) Hvad er y når x er 0?

(3) Brug svarene på (1) og (2) til at opskrive en ligning $y = ax + b$ for sammenhængen mellem formue og antal dage efter månedens start (se 13.12).

Opgave 13.15: Hvad gør vi når tidspunkter er årstal?

Følgende er oplyst:

I 2004 er afgiften 900 kr.

Hvert år stiger afgiften med 200 kr.

Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem tidspunkt og afgift.

Svar: Vi sætter

x = antal år efter 2004

y = afgiften (i kr.)

> BEMÆRK: Vi sætter ikke x lig årstallet. Vi sætter x lig antal år efter et eller andet årstal, fx 2004 eller 2000.

Når x er 0, dvs. i 2004, er y lig 900.
Så er $b = 900$ ifølge reglen om hvad b fortæller (sætning 12.10).

Når x bliver 1 større, dvs. når der går et år, vil y blive 200 større.
Så er $a = 200$ ifølge reglen om hvad a fortæller (sætning 12.3).

Den søgte ligning er altså $\underline{\underline{y = 200x + 900}}$.

Øvelse 13.16

I 2008 er antallet af elever 1500, og i de kommende år skal antallet stige med 93 om året.
Brug metoderne fra 13.15 til at opskrive en ligning der viser sammenhængen mellem antal elever og tidspunktet.

Øvelse 13.17

I 1995 var der 840 pladser, og hvert af de følgende år blev antallet nedsat med 28. Brug metoderne fra 13.15 til at opskrive en ligning der viser sammenhængen mellem antal pladser og tidspunktet.

Øvelse 13.18

Fra 1990 til 2008 blev et træ 0,8 meter højere hvert år. I 1992 var højden 3,9 meter. Vi sætter

y = højden (i meter) $\qquad$ x = tidspunktet (i år)

I hvert af følgende tilfælde skal du opskrive en ligning der viser sammenhængen mellem y og x.

(1) x måles i år efter 1992 (x kan være negativ)

(2) x måles i år efter 1990

(3) x måles i år efter 2000 (x kan være negativ)

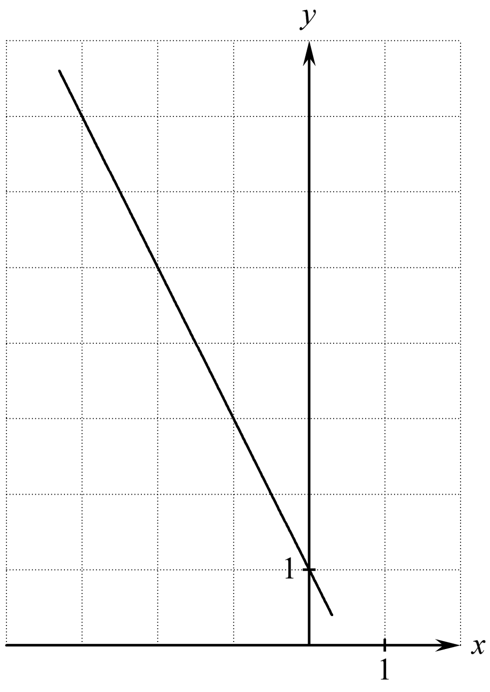
Øvelse 13.19

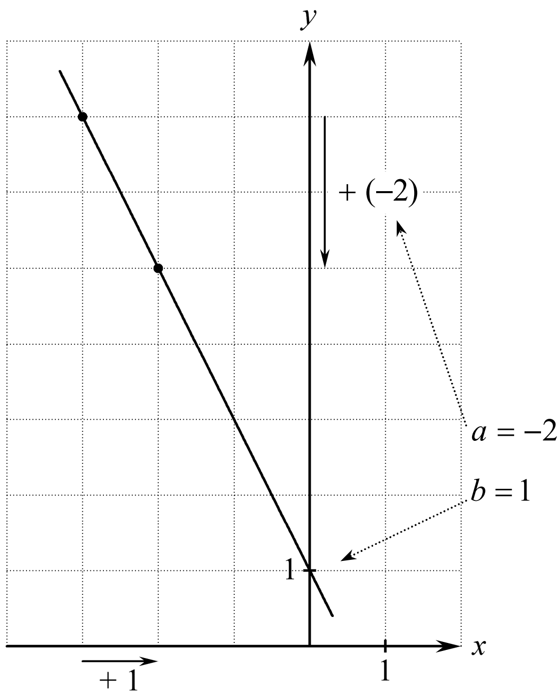
Mængden af salt i en sø stiger med 800 kg pr. år. I 2007 var der 7200 kg salt i søen. Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem tidspunkt og mængde af salt.

Opgave 13.20: Hvordan kan vi opskrive ligningen $y = ax + b$ ud fra grafen?

Figuren nedenfor til venstre viser grafen for en lineær sammenhæng $y = ax + b$. Opskriv ligningen for denne sammenhæng.

Svar: På figuren til højre er vist at når x bliver 1 større så lægges -2 til y, så af reglen om hvad a fortæller (sætning 12.3), følger at $a = -2$. På figuren ses også at når $x = 0$, er $y = 1$, så af reglen om hvad b fortæller (sætning 12.10), følger at $b = 1$. Ligningen for sammenhængen er altså $\underline{\underline{y = -2x + 1}}$.

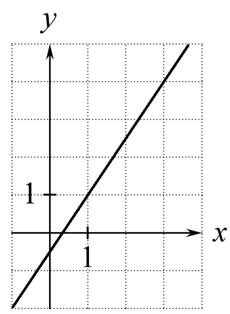




Øvelse 13.21

I koordinatsystemet er tegnet grafen for en lineær sammenhæng $y = ax + b$.
Forestil dig et punkt P som kan trækkes frem og tilbage langs grafen.

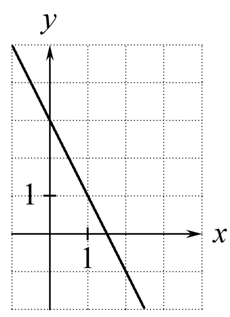
(1) Anbring P så dets x-koordinat er 2. Hvad er så y-koordinaten for P?
(2) Træk derefter P langs grafen så dets x-koordinat bliver 1 enhed større. Hvor meget større blev dets y-koordinat?
(3) Træk P hen til det grafpunkt som har x-koordinaten 0. Hvad er nu y-koordinaten for P?
(4) Hvilket tal står a for? (Brug svaret på (2)).
(5) Hvilket tal står b for? (Brug svaret på (3)).



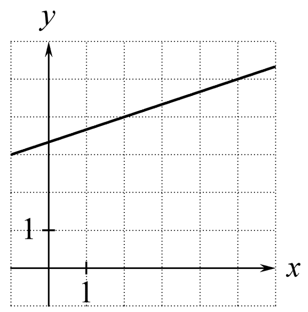
Øvelse 13.22

I koordinatsystemet er tegnet grafen for en lineær sammenhæng.

(1) Når et punkt trækkes langs grafen så dets x-koordinat bliver 1 større, hvad sker der så med dets y-koordinat?
(2) Hvad er y-koordinaten til det grafpunkt der har x-koordinat 0?
(3) Brug svarene på de to foregående spørgsmål til at opskrive en ligning for den lineære sammenhæng.



Øvelse 13.23



I koordinatsystemet er tegnet grafen for en lineær sammenhæng $y = ax + b$.

Forestil dig et punkt P som kan trækkes frem og tilbage langs grafen.

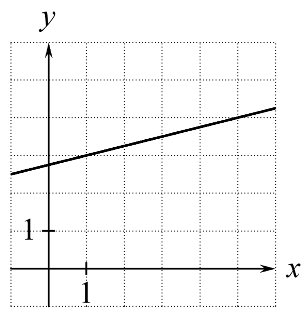
(1) Anbring P så dets x-koordinat er 2. Træk derefter P langs grafen så dets x-koordinat bliver 3 enheder større. Hvor meget større blev dets y-koordinat?

(2) Anbring P så dets x-koordinat er 2. Træk derefter P langs grafen så dets x-koordinat bliver 1 enhed større. Hvor meget større blev dets y-koordinat?

(3) Hvad er y-koordinaten til det grafpunkt der har x-koordinat 0?

(4) Brug svarene på de to foregående spørgsmål til at opskrive en ligning for den lineære sammenhæng.

Øvelse 13.24



I koordinatsystemet er tegnet grafen for en lineær sammenhæng.

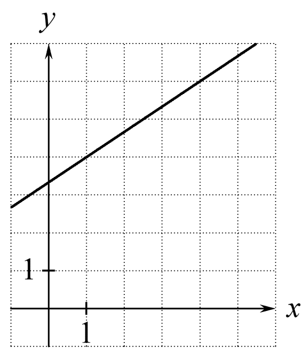
(1) Når et punkt trækkes langs grafen så dets x-koordinat bliver 4 større, hvad sker der så med dets y-koordinat?

(2) Når et punkt trækkes langs grafen så dets x-koordinat bliver 1 større, hvad sker der så med dets y-koordinat?

(3) Hvad er y-koordinaten til det grafpunkt der har x-koordinat 0?

(4) Brug svarene på de to foregående spørgsmål til at opskrive en ligning for den lineære sammenhæng.

Øvelse 13.25



I koordinatsystemet er tegnet grafen for en lineær sammenhæng.

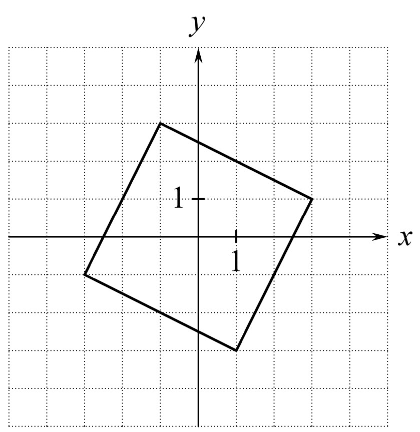
(1) Når et punkt trækkes langs grafen så dets x-koordinat bliver 3 større, hvad sker der så med dets y-koordinat?

(2) Når et punkt trækkes langs grafen så dets x-koordinat bliver 1 større, hvad sker der så med dets y-koordinat?

(3) Hvad er y-koordinaten til det grafpunkt der har x-koordinat 0?

(4) Brug svarene på de to foregående spørgsmål til at opskrive en ligning for den lineære sammenhæng.

Øvelse 13.26



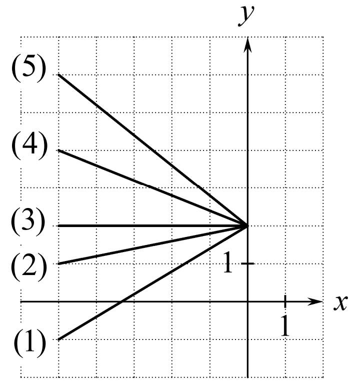
I koordinatsystemet er tegnet graferne for fire lineære sammenhænge.

Brug metoden fra 13.20 til at opskrive en ligning for hver af de fire sammenhænge.

Øvelse 13.27

I koordinatsystemet er tegnet grafenerne for fem lineære sammenhænge.

Brug metoden fra 13.20 til at opskrive en ligning for hver af de fem sammenhænge.



Øvelse 13.28

Grafen for en lineær sammenhæng går gennem punkterne $P(2,1)$ og $Q(6,4)$.
Et punkt trækkes langs grafen fra P til Q.

(1) Hvor meget større bliver punktets x-koordinat?

(2) Hvor meget større bliver punktets y-koordinat?

(3) Hvor meget større blev punktets y-koordinat hver gang dets x-koordinat blev 1 enhed større?

Grafen for en lineær sammenhæng går gennem punkterne $R(x_1, y_2)$ og $T(x_2, y_2)$.
Et punkt trækkes langs grafen fra R til T.

(4) Hvor meget større bliver punktets x-koordinat?

(5) Hvor meget større bliver punktets y-koordinat?

(6) Hvor meget større blev punktets y-koordinat hver gang dets x-koordinat blev 1 enhed større?

13.29 Formler til at beregne *a* og *b* i *y* = *ax*+*b*

Vi lader a og b stå for to tal som endnu ikke er kendt. Ligningen

(1) $y = ax + b$

viser sammenhængen mellem to variable x og y.

Vi lader nu x_1, x_2, y_1 og y_2 stå for fire tal som endnu ikke er oplyst. (Tallene 1 og 2 betyder **ikke** at de fire tal er 1 og 2).

Hvis

(2) tallene x_1 og x_2 er forskellige

(3) y_1 er den y-værdi vi får når vi sætter x_1 ind i (1)

(4) y_2 er den y-værdi vi får når vi sætter x_2 ind i (1)

så gælder:

(5) $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(6) $b = y_1 - a \cdot x_1$

Vi vil regne os frem til at (5) og (6) gælder:

Forudsætningerne (3) og (4) ovenfor kan vi skrive sådan:

(7) $y_2 = a \cdot x_2 + b$

(8) $y_1 = a \cdot x_1 + b$

Følgende ligning må være gyldig da vi får den ved at trække samme tal fra begge sider i (7):

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - y_1$$

Ifølge (8) er y_1 samme tal som $a \cdot x_1 + b$ så der må også gælde

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)$$

Ved at hæve parentesen får vi at

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b$$

og dermed at

(9) $y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$

Af reglen om at sætte fælles faktor uden for parentes får vi at højresiden i (9) er samme tal som højresiden i følgende ligning:

(10) $y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$

Da x_1 og x_2 er forskellige tal, er tallet $x_2 - x_1$ ikke 0. Vi får derfor en ny gyldig ligning når begge sider i (10) divideres med $x_2 - x_1$:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ved at forkorte højre side får vi:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Hermed har vi regnet os frem til at (5) gælder.

Hvis vi trækker $a \cdot x_1$ fra begge sider i ligningen (8), så får vi

$$y_1 - a \cdot x_1 = b$$

Hermed har vi regnet os frem til at (6) gælder.

Bemærkninger: Forudsætningerne (2) og (3) kan også udtrykkes ved at sige at punkterne (x_1 , y_1) og (x_2 , y_2) ligger på grafen. Denne formulering er brugt i rammen nedenfor.

Det der står ovenfor på denne side er et BEVIS for sætning 13.30. Et bevis for en påstand er nogle logiske slutninger der gør det fuldstændig sikkert at påstanden gælder.

SÆTNING 13.30 Formler for *a* og *b* i *y* = *ax*+*b*

Hvis (x_1 , y_1) og (x_2 , y_2) er to forskellige punkter på grafen for en lineær sammenhæng

$$y = ax + b$$

så gælder:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = y_1 - a \cdot x_1$$

Opgave 13.31: Bestemme $y = ax+b$ ud fra to punkter

Følgende er oplyst:

Der er en lineær sammenhæng mellem temperatur og overskud.

Når temperaturen er -3 °C, er overskuddet 12 mio. kr.

Når temperaturen er 5 °C, er overskuddet 28 mio. kr.

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem temperatur og overskud.

Svar: Vi sætter

x = temperatur (målt i °C)
y = overskud (målt i mio. kr.)

Der er oplyst to x-værdier og tilhørende y-værdier:

Til $x_1 = -3$ svarer $y_1 = 12$.

Til $x_2 = 5$ svarer $y_2 = 28$.

Da sammenhængen er lineær er den søgte ligning på formen $y = ax + b$, og

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{28 - 12}{5 - (-3)} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 12 - 2 \cdot (-3) = 18$$

Ligningen $\underline{\underline{y = 2x + 18}}$ viser sammenhængen mellem

temperaturen x i °C og overskuddet y i mio. kr.

Øvelse 13.32

Brug 13.30 til at opskrive en ligning for den lineære sammenhæng hvis graf går gennem punkterne $(5, 9)$ og $(7, 15)$.

Øvelse 13.33

Brug 13.30 til at opskrive en ligning for den lineære sammenhæng hvis graf går gennem punkterne $(-6, 8)$ og $(-1, -2)$.

Øvelse 13.34

(1) Brug 13.30 til at opskrive en ligning for den lineære sammenhæng hvis graf går gennem punkterne $(1, -12)$ og $(4, -3)$.

(2) Brug svaret på (1) til at beregne y-koordinaten til det grafpunkt der har x-koordinat 7.

(3) Brug svaret på (1) til at beregne x-koordinaten til det grafpunkt der har y-koordinat -14.

Øvelse 13.35

Om en vare er oplyst:

Der er en lineær sammenhæng mellem vægt og pris.

Når vægten er 200 gram, er prisen 51 kr.

Når vægten er 500 gram, er prisen 126 kr.

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem vægten x i gram og prisen y i kr.

Øvelse 13.36

Der er en lineær sammenhæng mellem de variable

x = antal dage efter at planten blev købt (kan være negativ)

y = plantens højde i cm

Seks dage før købet var højden 108 cm, og fjorten dage efter købet var højden 113 cm.

(1) Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem plantens højde og antal dage efter køb.

(2) Hvornår er plantens højde 150 cm?

Øvelse 13.37

Et bestemt dyr vokser sådan at der er en lineær sammenhæng mellem omkreds og længde. Når omkredsen er 1 mm, er længden 8 mm, og når omkredsen er 3 mm, er længden 23 mm.

Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem omkreds og længde.

Øvelse 13.38

Der er en lineær sammenhæng mellem temperaturerne i A og B. Når temperaturen i A er –10 °C, så vil temperaturen i B være 14 °C, og når temperaturen i A er 2 °C, vil temperaturen i B være –34 °C.

(1) Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem temperaturerne i A og B.

(2) Hvad er temperaturen i B når temperaturen i A er 0 °C?

(3) Hvad er temperaturen i A når temperaturen i B er 0 °C?