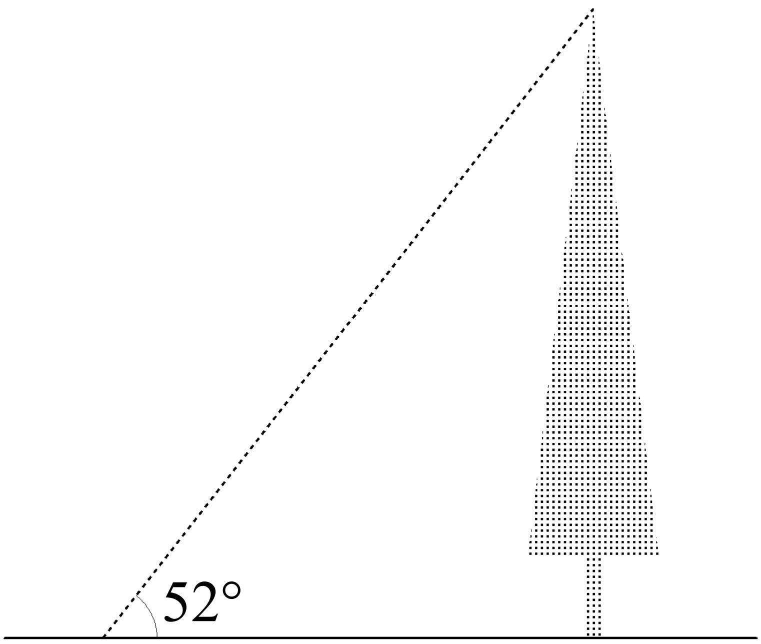
Kortfattet

Trekants-beregning

for gymnasiet og hf



2010 Karsten Juul

Indhold

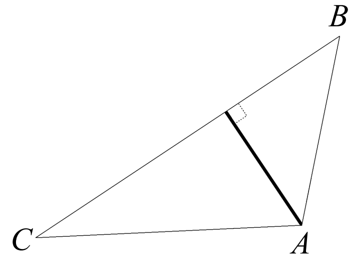
Kortfattet trekantsberegning for gymnasiet og hf

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

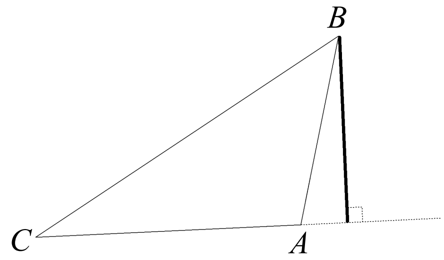
1: Højde og areal

1.1 Definition Højde.

Højden fra A er det linjestykke der går fra A og vinkelret ind på den modstående side.

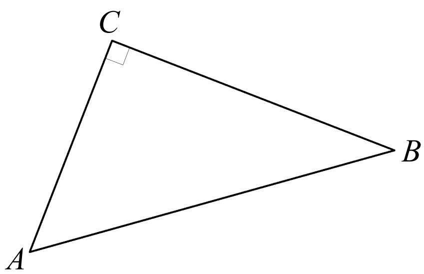


Højden fra B er det linjestykke der går fra B og vinkelret ind på den modstående sides forlængelse.



1.2 Eksempel En side kan være en højde.

Højden fra A er linjestykket AC



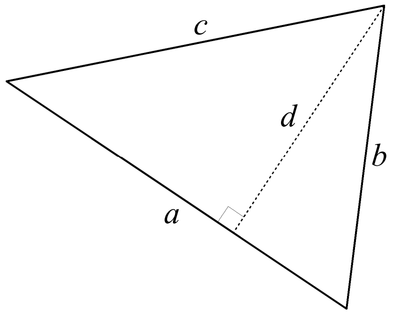
1.3 Sætning Areal af trekant.

Trekantens areal er

$$Areal = \tfrac{1}{2} \cdot d \cdot a$$

når

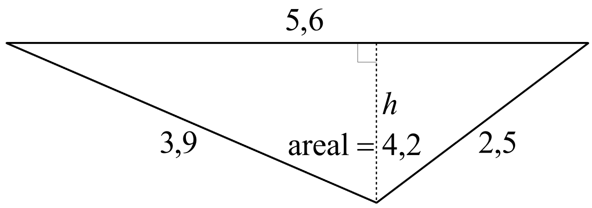
d er en højde i trekanten
a er den side der er vinkelret på d .



1.4 **Eksempel** Areal er kendt.

På billedet ser vi:

Trekantens areal er 4,2
h er en højde
h er vinkelret på siden der er 5,6



Af dette får vi at

$$4{,}2 \ = \ \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot 5{,}6$$

Vi har brugt sætningen om trekants areal (ramme 1.3).

Vi taster denne ligning
og får den løst mht. h for $h > 0$
og får $\underline{\underline{h = 1{,}5}}$.

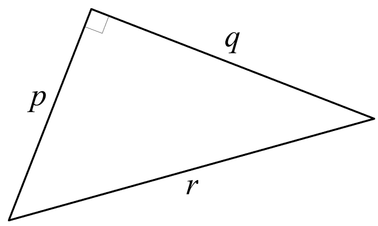
2: Pythagoras' sætning

2.1 **Definition** Katete og hypotenuse.

Siderne p og q er trekantens <u>kateter</u>.
Det kan vi se fordi vinklen imellem p og q er ret.

Siden r er <u>hypotenusen</u>.
Det kan vi se fordi r ikke er en af kateterne.

Hvis en trekant ikke er retvinklet, så har den hverken hypotenuse eller kateter.

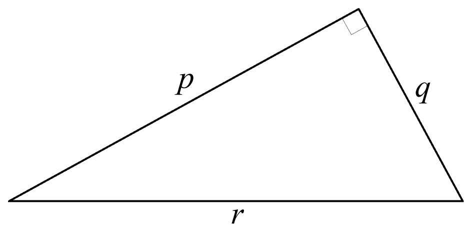


2.2 **Sætning** Pythagoras' sætning.

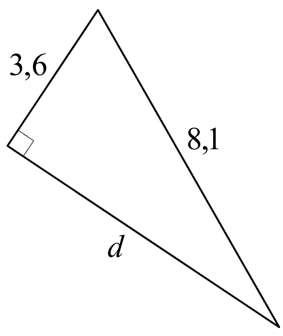
For en <u>retvinklet</u> trekant gælder:

$$p^2 + q^2 \ = \ r^2$$

når p og q er kateter, og
r er hypotenuse



2.3 **Eksempel** Hypotenuse og en katete er kendt.



Vi ser:

kateterne er d og 3,6

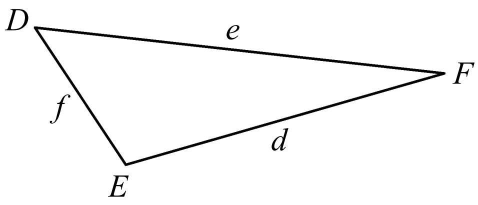
hypotenusen er 8,1

Derfor er

$3{,}6^2 + d^2 = 8{,}1^2$

Vi taster denne ligning
og får den løst mht. d for $d > 0$
og får $\underline{\underline{d = 7{,}3}}$.

2.4 **Bemærkning** En sprogbrug.



Hvis der står

i trekant DEF er $f = 14$

gælder

det er siden over for vinkelspidsen F der er 14.

Sprogbrugen er nemlig sådan at når

<u>et stort bogstav er en vinkelspids i en trekant</u>,

gælder

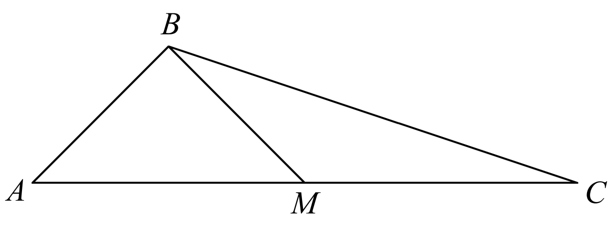
<u>det tilsvarende lille bogstav er siden over for vinkelspidsen</u>,

hvis der ikke fremgår andet.

<u>Eksempel på udnyttelse af denne sprogbrug</u>

I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er $a^2 + b^2 = c^2$.

<u>Advarsel</u>



Se figuren til højre.
Her dur det ikke hvis du skriver $m = 2{,}6$.

Læseren kan ikke vide om det er AB
eller BC der er 2,6 .

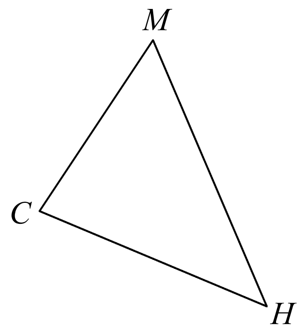
Skriv m på den side du mener.
Du skal altid tegne en figur i en geometriopgave.

3: Ensvinklede trekanter

3.1 Definition En sides modstående vinkel.

Forestil dig at du sidder på linjestykket CM
og holder i de to vinkler ved linjestykkets endepunkter.

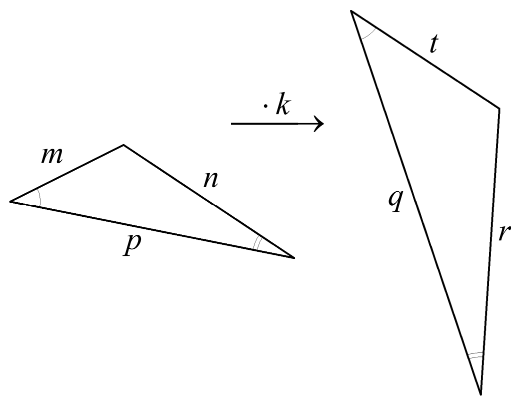
Den vinkel du ikke holder i (altså H) er
den <u>modstående vinkel</u> til siden CM .



3.2 Sætning Ensvinklede trekanter

De to trekanter har samme vinkler.
Derfor er der en skalafaktor.

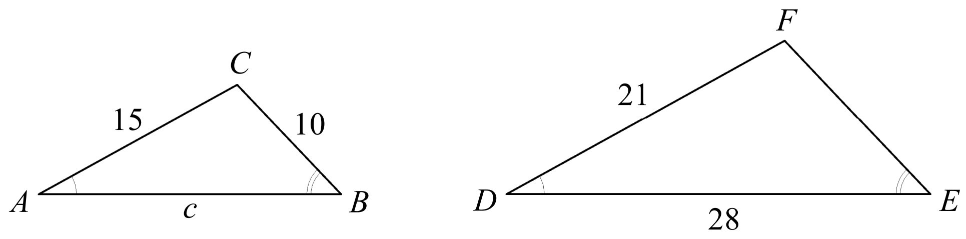
k	er det tal som kaldes <u>skalafaktoren</u>.
$m \cdot k = t$	da m og t har ens modstående vinkler.
$p \cdot k = q$	da p og q har ens modstående vinkler.
$n \cdot k = r$	da n og r har ens modstående vinkler.



Pilen på figuren viser hvilken vej vi ganger.
Hvis vi i stedet valgte at gange siderne i højre trekant,
så ville k stå for et andet tal.

Det er tilladt at bruge et andet bogstav i stedet for k .
(Læseren ved ikke på forhånd at k står for skalafaktoren, så det er nødvendigt at vi skriver det).

3.3 **Eksempel** Udregne og bruge skalafaktor.



<u>Vi begrunder at der er en skalafaktor:</u>

De to trekanter har samme vinkler.
Derfor er der en skalafaktor q .

<u>Vi udregner skalafaktoren:</u>

Siderne med længder 15 og 21 har ens modstående vinkler. Derfor er

$$15 \cdot q \ = \ 21$$

Vi taster denne ligning
og får den løst mht. q for $q > 0$
og får

$$\underline{q = 1{,}4} \ .$$

<u>Vi bruger skalafaktoren:</u>

Siderne med længder c og 28 har modstående vinkler der er lige store.
Derfor er

$$c \cdot 1{,}4 \ = \ 28$$

Vi taster denne ligning
og får den løst mht. c for $c > 0$
og får

$$\underline{\underline{c = 20}} \ .$$

4: Cosinus og sinus i retvinklet trekant

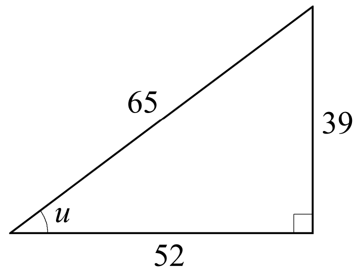
4.1 **Definition** Vinkels hosliggende katete og modstående katete.

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u
og holder i de to vinkelben.
De to sider du holder i, kaldes <u>vinklens hosliggende sider</u>.

At en vinkel er <u>spids</u>, betyder at vinklen er mindre end 90°.

En af de sider du holder i, er en katete.
Denne side kaldes <u>vinklens hosliggende katete</u>.

Der er én side tilbage som du ikke holder i.
Denne side kaldes <u>vinklens modstående katete</u>.



I den viste trekant gælder altså:
Vinkel u's hosliggende katete er 52.
Vinkel u's modstående katete er 39.

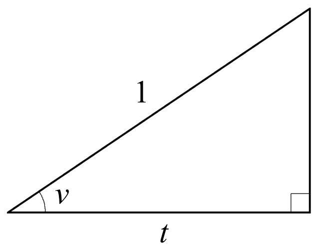
4.2 **Definition** Cosinus og sinus

Når v er en spids vinkel (f.eks. $17°$ eller $62°$), er

cosinus til vinklen v =
v's hosliggende katete i en trekant med hypotenuse 1.

Vi skriver

$\cos(v) = t$.

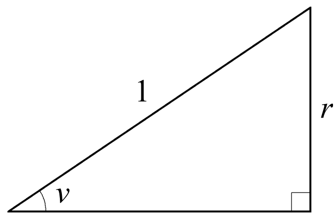


Når v er en spids vinkel (f.eks. $17°$ eller $62°$), er

sinus til vinklen v =
v's modstående katete i en trekant med hypotenuse 1.

Vi skriver

$\sin(v) = r$.



Lommeregneren (eller matematikprogrammet) <u>**skal**</u> være indstillet til at regne med enheden grader.

4.3 **Eksempel** Udregning af side med cosinus eller sinus.

På lommeregner eller computer får vi udregnet at

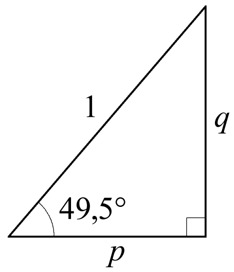
$\cos(49{,}5°) \;=\; 0{,}649448$

$\sin(49{,}5°) \;=\; 0{,}760406$

Så har vi fundet ud af at

$\underline{\underline{p = 0{,}649}}$

$\underline{\underline{q = 0{,}760}}$



4.4 **Eksempel** Udregning af vinkel med cosinus eller sinus.

På billedet ser vi at

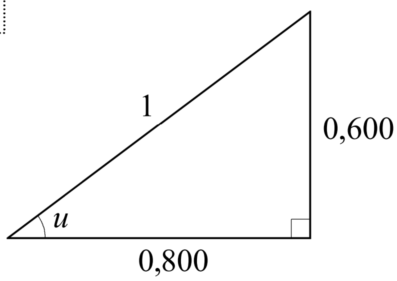
$\cos(u) \;=\; 0{,}800$

Vi taster denne ligning
og får den løst mht. u for $0° < u < 90°$
og får $u = 36{,}8699°$

Her står at vinkel u er mellem $0°$ og $90°$.

Så har vi fundet ud af at

$\underline{\underline{u = 36{,}9°}}$

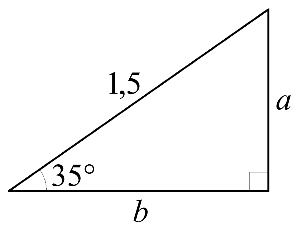


Dette resultat kunne vi også have fundet ved at løse ligningen

$\sin(u) \;=\; 0{,}600$

4.5 Eksempel Retvinklet trekant hvor hypotenusen ikke er 1.

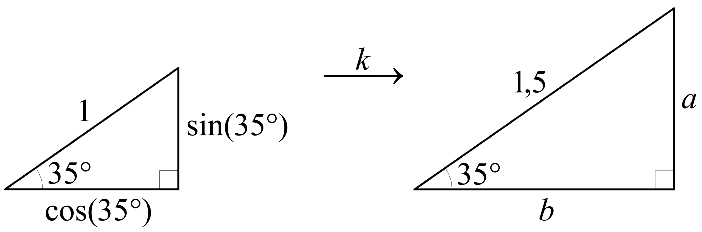
I trekanten til højre er hypotenusen $1{,}5$.



Vi vil bruge cos og sin. Derfor tegner vi en ny trekant hvor vinklerne er de samme, men hvor hypotenusen er 1.

Kateterne i den nye trekant er tallene $\cos(35°)$ og $\sin(35°)$.
(Se rammerne 4.2 og 4.3)

<u>Da de to trekanter har samme vinkler, er der en skalafaktor k:</u>



<u>Vi finder skalafaktoren:</u>

Siderne med længder 1 og $1{,}5$ ligger over for ens vinkler (begge er 90°)
så

$$1 \cdot k = 1{,}5$$

dvs.

$$k = 1{,}5 \,.$$

<u>Vi bruger skalafaktoren:</u>

$$1{,}5 \cdot \sin(35°) = a \qquad 1{,}5 \cdot \cos(35°) = b$$

<u>Resultat:</u>

$$\underline{\underline{a = 0{,}860365}} \qquad \underline{\underline{b = 1{,}22873}}$$

Vi ser at for alle retvinklede trekanter kan vi skrive formler der svarer til

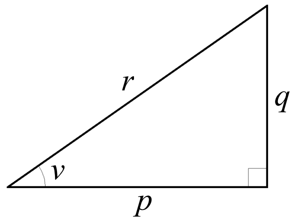
$$1{,}5 \cdot \cos(35°) = b \quad \text{og} \quad 1{,}5 \cdot \sin(35°) = a$$

Dette er indholdet af sætningen i ramme 4.6.

4.6 **Sætning** Cosinus og sinus i retvinklet trekant.

Når

v er en spids vinkel i en retvinklet trekant
r er hypotenusen
p er v's hosliggende katete
q er v's modstående katete



så gælder:

$r \cdot \cos(v) = p$
$r \cdot \sin(v) = q$

I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end ovenfor.
Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglen i ord, f.eks. sådan:

<u>Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:</u>

– Når vi ganger *cosinus til vinklen*
med *hypotenusen*
så får vi *vinklens hosliggende katete*

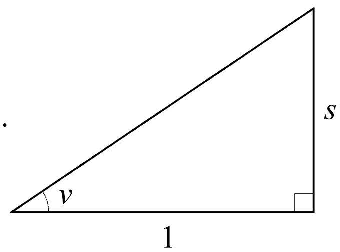
– Når vi ganger *sinus til vinklen*
med *hypotenusen*
så får vi *vinklens modstående katete*

5: Tangens i retvinklet trekant

5.1 **Definition** Tangens

Når v er en spids vinkel (f.eks. $17°$ eller $62°$), er

tangens til v =
v's modstående katete i en trekant hvor v's hosliggende katete er 1.



Vi skriver

$\tan(v) = s$.

Lommeregneren (eller matematikprogrammet) <u>**skal**</u> være indstillet til at regne med enheden grader.

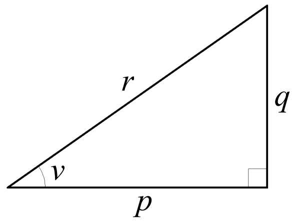
5.2 **Sætning** Tangens i retvinklet trekant.

Når

v er en spids vinkel i en retvinklet trekant
p er v's hosliggende katetet
q er v's modstående katete

så gælder:

$$p \cdot \tan(v) = q$$



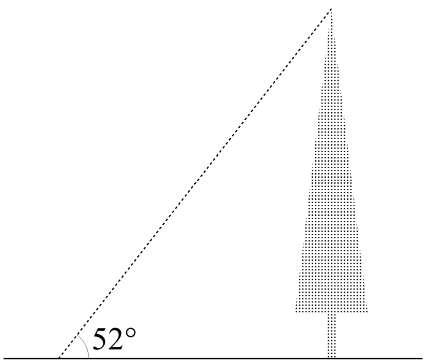
I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end ovenfor.
Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglen i ord, f.eks. sådan:

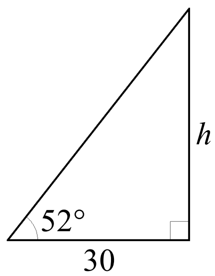
<u>Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:</u>

– Når vi ganger *tangens til vinklen*
med *vinklens hosliggende katete*
så får vi *vinklens modstående katetet*

5.3 **Eksempel** Tangens i retvinklet trekant.

30 meter fra et træ sigter vi op mod toppen. Vinklen mellem sigtelinje og vandret er $52°$.
Trekanten til højre er en model af denne situation.





Enhed: meter

Vi får

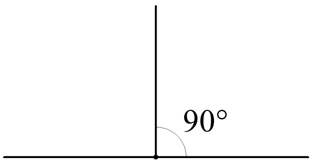
$$h = 30 \cdot \tan(52°) = 38{,}3982$$

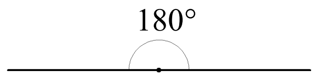
dvs.

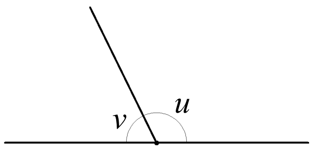
Træets højde er $\underline{\underline{38 \text{ m}}}$

6: Vinkler

6.1 Regler

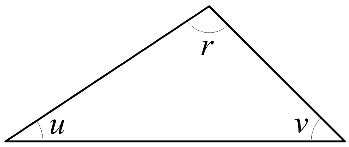






$u+v=180°$

$v=180°-u$



Når vi lægger vinklerne i en trekant sammen, så får vi altid 180° :

$u+v+r=180°$

$r=180°-u-v$

<u>En vinkel i en trekant er</u>

spids hvis den er under 90°

ret hvis den er 90°

stump hvis den er over 90° .

6.2 Definition Cosinus til en stump vinkel og til 90°.

<u>Hvis v er 90°</u>

så er $\cos(v)=0$

dvs. $\cos(90°)=0$

<u>Hvis v er mellem 90° og 180°:</u>

Vi trækker v fra 180°.

Så får vi en vinkel u som er under 90°.

Da u er under 90°, ved vi fra ramme 4.2 hvad der forstås ved $\cos(u)$.

Vi definerer at

$$\cos(v) \;=\; -\cos(u) \quad \text{hvor} \quad u \;=\; 180°-v\,.$$

6.3 Definition Sinus til en stump vinkel og til 90°.

Hvis v er 90°

så er $\sin(v) = 1$

dvs. $\sin(90°) = 1$

Hvis v er mellem 90° og 180°:

Vi trækker v fra 180°.

Så får vi en vinkel u som er under 90°.

Da u er under 90°, ved vi fra ramme 4.2 hvad der forstås ved $\sin(u)$.

Vi definerer at

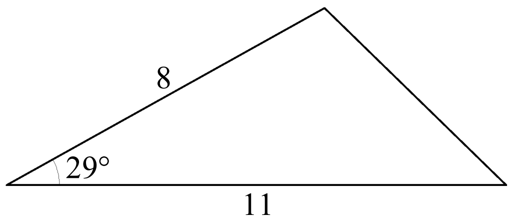
$$\sin(v) \;=\; \sin(u) \qquad \text{hvor} \qquad u \;=\; 180° - v\,.$$

7: Udregne areal ved hjælp af sinus

7.1 Eksempel Udregne trekants areal ved hjælp af sinus.

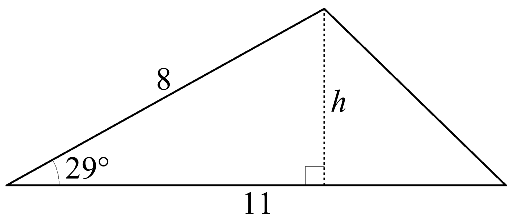
I den viste trekant kender vi to sider og vinklen imellem dem.

Vi vil udregne trekantens areal.



Vi tegner en højde h .
Så har vi to retvinklede trekanter.
I den venstre er (se ramme 4.6)

$$8 \cdot \sin(29°) \;=\; h$$



Arealet af hele trekanten er (se ramme 1.3)

$$areal \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot 11 \cdot h$$

$$areal \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin(29°)$$

$$areal \;=\; 21{,}3316$$

$$areal \;=\; \underline{\underline{21{,}3}}$$

Vi ser at hvis vi har en trekant hvor vi kender to sider og vinklen mellem dem, så kan vi altid finde trekantens areal ved at skrive en ligning der svarer til $areal \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin(29°)$. Her står at

areal =
en halv gange den ene side
gange den anden side
gange sinus til vinklen imellem de to sider.

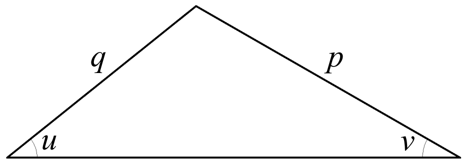
8: Sinusrelationen

8.1 Sætning Sinusrelationen.

Hvis der i en trekant gælder

siden p er modstående til vinklen u
siden q er modstående til vinklen v

så er

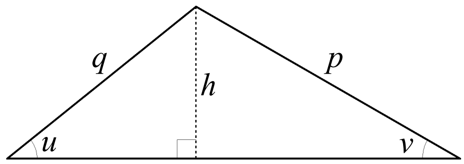


$$\frac{p}{\sin(u)} = \frac{q}{\sin(v)}$$

Denne regel hedder sinusrelationen .

Bevis for sinusrelationen

På figuren har vi tilføjet en højde h .
Højden deler trekanten i to trekanter.
Da disse to trekanter er retvinklede, er



$$q\cdot\sin(u) = h \quad \text{og} \quad p\cdot\sin(v) = h$$

Heraf får vi

$$q\cdot\sin(u) = p\cdot\sin(v)$$

Vi dividerer begge ligningens sider med $\sin(u)\cdot\sin(v)$ og får

$$\frac{q\cdot\sin(u)}{\sin(u)\cdot\sin(v)} = \frac{p\cdot\sin(v)}{\sin(u)\cdot\sin(v)}$$

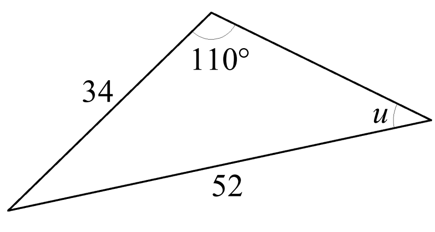
Vi forkorter de to brøker:

$$\frac{q}{\sin(v)} = \frac{p}{\sin(u)}$$

Nu har vi bevist at sinusrelationen gælder.

8.2 Eksempel Sinusrelationen.

Vi bruger sinusrelationen:



$$\frac{34}{\sin(u)} = \frac{52}{\sin(110°)}$$

Vi taster denne ligning og
får den løst mht. u for u mellem 0° og 90° og
får $u = 37{,}9094°$

dvs. $u = \underline{\underline{37{,}9°}}$

9: Cosinusrelationen

9.1 Sætning Cosinusrelationen.

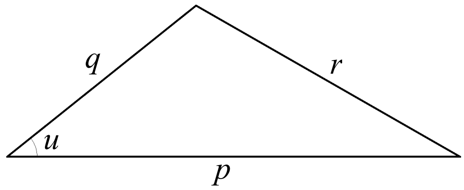
Hvis der i en trekant gælder

Siderne er p , q og r

Siden r er modstående til vinklen u

så er

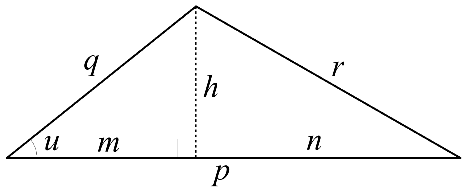
$$r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$



Denne regel hedder <u>cosinusrelationen</u> .

<u>Bevis for cosinusrelationen</u>

På figuren har vi tilføjet en højde.



På figuren ser vi at

$$n = p - m$$

så

$$n^2 = (p-m)^2$$

Vi omskriver højresiden:

(1) $\quad n^2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$

Højden deler trekanten i to deltrekanter. Af den venstre får vi

(2) $\quad q \cdot \cos(u) = m$

da trekanten er retvinklet.

Da de to deltrekanter er retvinklede, får vi

$$h^2 = q^2 - m^2 \quad \text{og} \quad h^2 = r^2 - n^2$$

Heraf får vi

$$r^2 - n^2 = q^2 - m^2$$

Vi lægger n^2 til begge ligningens sider og får

$$r^2 = q^2 - m^2 + n^2$$

Heri erstatter vi n^2 med højresiden fra (1):

$$r^2 = q^2 - m^2 + p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

hvoraf

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

Heri erstatter vi m med venstresiden i (2):

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

Nu har vi bevist at cosinusrelationen gælder.

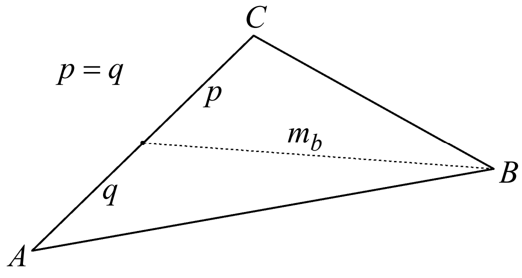
10: Tilføjelser

10.1 Median

En <u>median</u> i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side.

I enhver trekant er der tre medianer.

På figuren er vist medianen m_b fra B på siden b

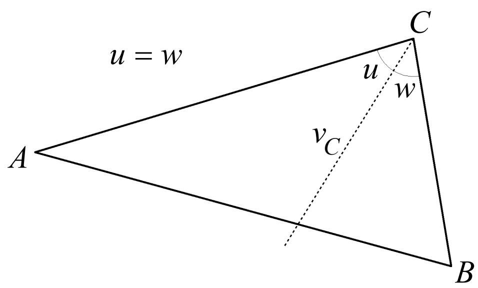


10.2 Vinkelhalveringslinje

En <u>vinkelhalveringslinje</u> i en trekant er en linje der går gennem en af vinkelspidserne og halverer vinklen.

I enhver trekant er der tre vinkelhalveringslinjer.

På figuren er vist vinkelhalveringslinjen v_C for vinkel C.



10.3 Nogle betegnelser

$\angle ABC$ er vinkel B i trekant ABC.
Eksempel: På figuren er $\angle RSQ = v$.

AB er linjestykket med endepunkter A og B.
$|AB|$ er længden af linjestykket AB.

Eksempel: På figuren er PQ og PS ikke samme linjestykke, men $|PQ| = |PS|$.

I en trekant ABC betegner A, B og C både punkter og vinkler.
Eksempel: Man kan skrive $P = 90°$ eller $\angle P = 90°$.