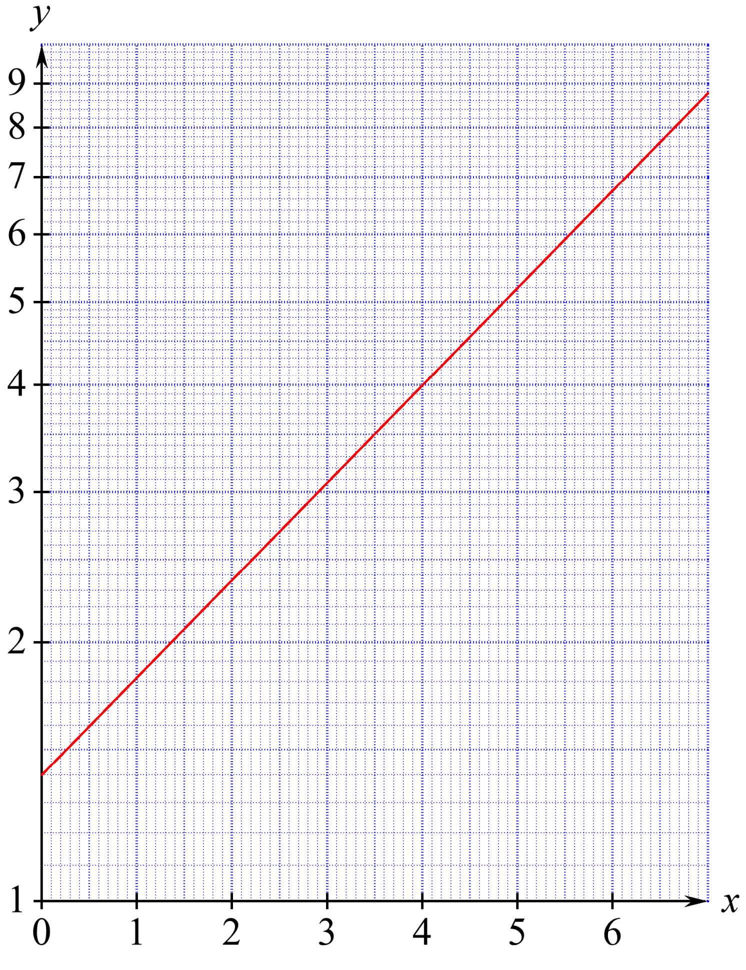
Kort om

Eksponentielle Sammenhænge



2011 Karsten Juul

Dette hæfte indeholder pensum i eksponentielle sammenhænge for gymnasiet og hf.

Indhold

Kort om eksponentielle sammenhænge

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

1. Procenter på en ny måde.

$\underline{T \text{ er } 34\% \textbf{ af } 600}$

$T = 34\% \text{ af } 600$

$= 600 \cdot 0{,}34$ ← da $34\% = \frac{34}{100} = 0{,}34$

$= 204$

Du plejer nok at udregne 34% ved at dividere med 100 og gange med 34.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,34 for at udregne 34%.

$\underline{S \text{ er } 34\% \textbf{ større end } 600}$

$S = 134\% \text{ af } 600$ ← da $100\% + 34\% = 134\%$

$= 600 \cdot 1{,}34$ ← da $134\% = \frac{134}{100} = 1{,}34$

$= 804$

Når du udregner det der er 34% større end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og lægge til tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 1,34 for at udregne det der er 34% større.

$\underline{R \text{ er } 34\% \textbf{ mindre end } 600}$

$R = 66\% \text{ af } 600$ ← da $100\% - 34\% = 66\%$

$= 600 \cdot 0{,}66$ ← da $66\% = \frac{66}{100} = 0{,}66$

$= 396$

Når du udregner det der er 34% mindre end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og trække fra tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,66 for at udregne det der er 34% mindre.

2. Hvad er en <u>eksponentiel sammenhæng</u> ?

Oplæg

Antal ansatte skal stige $10\,\%$ hvert år.

$100\,\% + 10\,\% \;=\; 110\,\% \;=\; \frac{110}{100} \;=\; 1{,}10$

I år er antal ansatte	1000
Om 1 år er antal ansatte	$1000 \cdot 1{,}10 \;=\; 1100$
Om 2 år er antal ansatte	$1000 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10 \;=\; 1210$
Om 16 år er antal ansatte	$1000 \cdot 1{,}10^{16} \;=\; 4595$
Om x år er antal ansatte	$\mathbf{1000 \cdot 1{,}10^{x}}$

$1{,}10 \cdot 1{,}10 \;=\; 1{,}10^2$

Definition

En sammenhæng er <u>eksponentiel</u> hvis ligningen er af typen

$$y \;=\; b \cdot a^x$$

I oplægget er $b = 1000$ og $a = 1{,}10$

hvor a og b er positive tal.

3. Der står hvordan antallet ændres. Vi skal skrive en ligning.

Vi får at vide at

$(*)$ Kl. 9 er der 275 celler.
Hver time bliver antal celler $20\,\%$ større.

Vi skriver

x = antal timer efter kl. 9
y = antal celler

Vi skriver $(*)$ ved hjælp af x og y:

Når $x = 0$ er $y = 275$.
Når x bliver 1 større, bliver y ganget med $1{,}20$.

Heraf slutter vi at ligningen (modellen) er

$$\underline{\underline{y = 275 \cdot 1{,}20^x}}$$

4. Der står en ligning. Vi skal skrive hvordan antallet ændres.

Antallet af dyr ændres sådan at

$(*)$ $y = 270 \cdot 0{,}90^x$

x = antal dage efter 1. juni
y = antal dyr

Af $(*)$ ser vi:

Når $x = 0$ er $y = 270$.
Når x bliver 1 større, bliver y ganget med $0{,}90$.

Dvs.

<u>Den 1. juni er antallet af dyr 270</u>

<u>Hver dag bliver antallet af dyr $10\,\%$ mindre</u>

5. Hvor mange procent ændres y?

En dag gælder at

$$y = 970 \cdot 0{,}885^x$$

hvor y er trykket målt i hektopascal, og x er højden over jordoverfladen målt i kilometer.

Vi vil regne ud hvor mange procent trykket ændres når højden bliver 3 kilometer større.

<u>Metode 1</u>

Vi starter i en tilfældig højde, f.eks. 2 km:

Når $x = 2$, er $y = 970 \cdot 0{,}885^2 = 759{,}728$

Derefter finder vi trykket når højden er 3 km større. $2 + 3 = 5$

Når $x = 5$, er $y = 970 \cdot 0{,}885^5 = 526{,}609$

<u>Ændringen</u> i trykket er

$$526{,}609 - 759{,}728 = -233{,}119$$

ændring = ny værdi – gammel værdi

I <u>procent</u> er dette

$$\frac{-233{,}119}{759{,}728} = -0{,}306845 = -30{,}6845\%$$

Vi skal dividere ændringen med den gamle værdi.

Vi har nu udregnet at

trykket <u>ændres</u> $-30{,}7\%$ når højden bliver 3 kilometer større

dvs.

trykket bliver $30{,}7\%$ <u>mindre</u> når højden bliver 3 kilometer større.

<u>Metode 2</u>

Højden bliver 3 kilometer større.

Fordi y bliver ganget med $0{,}885$ hver gang x bliver 1 enhed større.

Så bliver trykket ganget med $0{,}885^3 = 0{,}693154$

Dvs. trykket ændres med $69{,}3\% - 100\% = -30{,}7\%$

Fordi trykket ændres fra 100% af gammel værdi til $69{,}3\%$ af gammel værdi.

<u>Bemærkning</u>

Hvis $y = 6{,}4 \cdot 1{,}12^x$, ser regningerne i metode 1 sådan ud:

Når $x = 2$, er $y = 6{,}4 \cdot 1{,}12^2 = 8{,}02816$

Når $x = 5$, er $y = 6{,}4 \cdot 1{,}12^5 = 11{,}279$

$$11{,}279 - 8{,}02816 = 3{,}25084$$

$$\frac{3{,}25084}{8{,}02816} = 0{,}40493 = 40{,}493\%$$

dvs. y bliver 40% større når x bliver 3 enheder større.

6. Eksponentiel ligning.

En ligning af typen

(6.1) $\quad b \cdot a^x = c$

kaldes <u>eksponentiel</u> fordi x er i eksponenten.

Formel til udregning af ligningens løsning:

(6.2) $$x = \frac{\log(\frac{c}{b})}{\log(a)}$$

Med et elektronisk hjælpemiddel kan vi udregne noget der hedder <u>logaritmen</u>.

logaritmen til 100 er 2

Dette skriver man sådan:

log(100) = 2

Når man læser symbolet log(100) siger man "log hundrede".

Vi vil løse ligningen

$$2{,}5 \cdot 1{,}3^x = 9{,}7$$

Metode 1: <u>Vi bruger elektronisk ligningsløser</u>

$$2{,}5 \cdot 1{,}3^x = 9{,}7$$

Vi taster denne ligning.
Vi får den løst mht. x.
Vi får $x = 5{,}16776$

Løsningen er $x = \underline{\underline{5{,}2}}$

Metode 2: <u>Vi bruger formel (6.2)</u>

$$2{,}5 \cdot 1{,}3^x = 9{,}7$$

$$x = \frac{\log(\frac{9{,}7}{2{,}5})}{\log(1{,}3)}$$

$$x = 5{,}16776$$

Løsningen er $x = \underline{\underline{5{,}2}}$

Metode 3: <u>Vi omskriver ligningen</u>

$$2{,}5 \cdot 1{,}3^x = 9{,}7$$

$$1{,}3^x = \frac{9{,}7}{2{,}5}$$

$$\log(1{,}3^x) = \log(\frac{9{,}7}{2{,}5})$$

$$x \cdot \log(1{,}3) = \log(\frac{9{,}7}{2{,}5})$$

$$x = \frac{\log(\frac{9{,}7}{2{,}5})}{\log(1{,}3)}$$

$$x = 5{,}16776$$

Løsningen er $x = \underline{\underline{5{,}2}}$

Der gælder følgende regel om <u>logaritme til potens</u>:

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$$

7. Voksende og aftagende. Graf.

7.1 Eksempel

I koordinatsystemet har vi tegnet grafen for den eksponentielle sammenhæng med ligningen

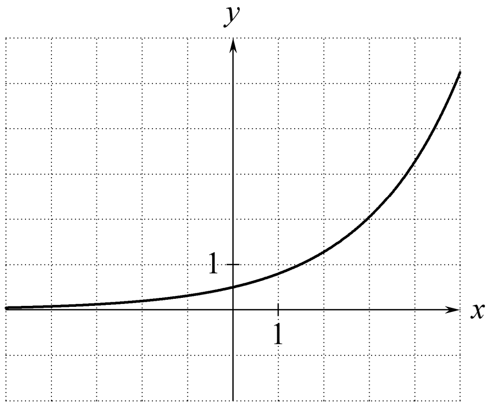
$$y = 0{,}5 \cdot 1{,}6^x$$

Fremskrivningsfaktoren a er 1,6

Sammenhængen er voksende da $1{,}6 > 1$

(for y bliver ganget med 1,6 når x bliver 1 større)

Grafen ligger over x-aksen, men kommer tæt på x-aksen.



7.2 Eksempel

I koordinatsystemet har vi tegnet grafen for den eksponentielle sammenhæng med ligningen

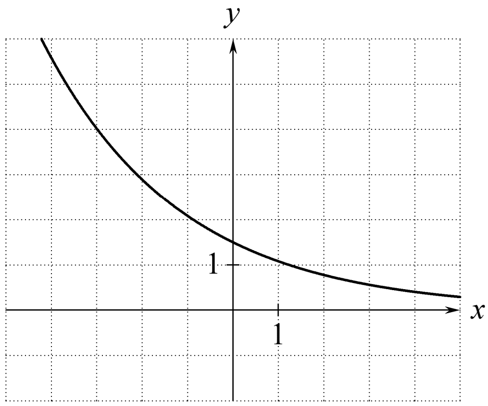
$$y = 1{,}5 \cdot 0{,}72^x$$

Fremskrivningsfaktoren a er 0,72

Sammenhængen er aftagende da $0{,}72 < 1$

(for y bliver ganget med 0,72 når x bliver 1 større)

Grafen ligger over x-aksen, men kommer tæt på x-aksen.



7.3 Sætning

Sammenhængen

$$y = b \cdot a^x$$

er voksende når $b > 0$ og $a > 1$

og aftagende når $b > 0$ og $0 < a < 1$

Her står at b er større end 0, og at a er større end 1.

Her står at b er større end 0, og at a ligger mellem 0 og 1.

8. Udregn a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra to punkter på grafen.

<u>Opgave:</u> Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = b \cdot a^x$. Udregn tallene a og b .

<u>**Metode 1.** Vi sætter ind i formler for a og b</u>

Af $(x_1, y_1) = (4, 3)$ og $(x_2, y_2) = (7, 24)$ får vi

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[7-4]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{3}{2^4} = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

<u>**Metode 2.** Vi løser ligningssystem med elektronisk hjælpemiddel</u>

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så

$3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Vi taster dette ligningssystem og får det løst mht. a og b . Vi får

$a = \underline{\underline{2}}$ og $b = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$

<u>**Metode 3.** Vi løser ligningssystem uden hjælpemidler</u>

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så

$3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Vi dividerer højre ligning med venstre:

$$\frac{24}{3} = \frac{b \cdot a^7}{b \cdot a^4} \qquad \frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} \quad \text{da} \quad \frac{a^7}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}$$

Når vi forkorter de to brøker, får vi

$8 = a^3$

så $a = \sqrt[3]{8}$

dvs. $a = \underline{\underline{2}}$

Vi indsætter denne værdi af a i ligningen $3 = b \cdot a^4$ og får $3 = b \cdot 2^4$

Ved at dividere begge sider med 2^4 får vi $\frac{3}{2^4} = b$

så $b = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$

<u>**Metode 4.** Vi bruger eksponentiel regression</u>

Vi taster punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ og får udført eksponentiel regression på dem. Vi får

$a = \underline{\underline{2}}$ og $b = \underline{\underline{0{,}1875}}$

9. Hvad er fordoblingskonstant og halveringskonstant?

9.1 Eksempel

Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

Antal uger efter køb:	0	1	2	3	4	5	6
Højde i cm:	12	15	19	24	30	38	48

I tabellen ser vi:

1 uge efter købet er højden 15 cm.
3 uger senere er højden 30 cm, som er det dobbelte af 15 cm.

2 uger efter købet er højden 19 cm.
3 uger senere er højden 38 cm, som er det dobbelte af 19 cm.

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet.

Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

9.2 Definition

En eksponentielt voksende sammenhæng har en fordoblingskonstant.
Fordoblingskonstanten er et tal der skrives T_2 .

Når x-værdien bliver T_2 enheder større, så bliver y-værdien fordoblet.

En eksponentielt aftagende sammenhæng har en halveringskonstant.
Halveringskonstanten er et tal der skrives $T_{\frac{1}{2}}$.

Når x-værdien bliver $T_{\frac{1}{2}}$ enheder større, så bliver y-værdien halveret.

9.3 Eksempel

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = længden (i cm)
y = omkredsen (i cm)

Vi har fået at vide at

fordoblingskonstanten er 7 .

Dette fortæller:

Når **x-værdien** bliver 7 enheder større, så bliver **y-værdien** fordoblet.

Dvs:

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** fordoblet.

Vi har fået at vide at

når længden er 5 cm, er omkredsen 20 cm .

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** fordoblet, så

når længden er 12 cm, er omkredsen 40 cm
når længden er 19 cm, er omkredsen 80 cm
osv.

Hvis det er halveringskonstanten der er 7, så skal vi i ovenstående halvere i stedet for at fordoble.

10. Fordoblings/halveringskonstant for sammenhængen $y = b \cdot a^x$.

10.1 Sætning

Vi ser på en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$.
Hvis sammenhængen er voksende (dvs. $a > 1$) gælder at

fordoblingskonstanten er $\dfrac{\log(2)}{\log(a)}$.

Hvis sammenhængen er aftagende (dvs. $0 < a < 1$) gælder at

halveringskonstanten er $\dfrac{\log(0{,}5)}{\log(a)}$.

10.2 Eksempel

Vi vil udregne halveringskonstanten for sammenhængen $y = 240 \cdot 0{,}94^x$.

Vi indsætter $a = 0{,}94$ i formlen

$$\text{halveringskonstant} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(a)}$$

og får

$$\frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}94)} = 11{,}2023$$

dvs. halveringskonstanten er $\underline{\underline{11{,}2}}$.

11. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

y-aksen er inddelt på en speciel måde.
Man siger at y-aksen er en logaritmisk skala.

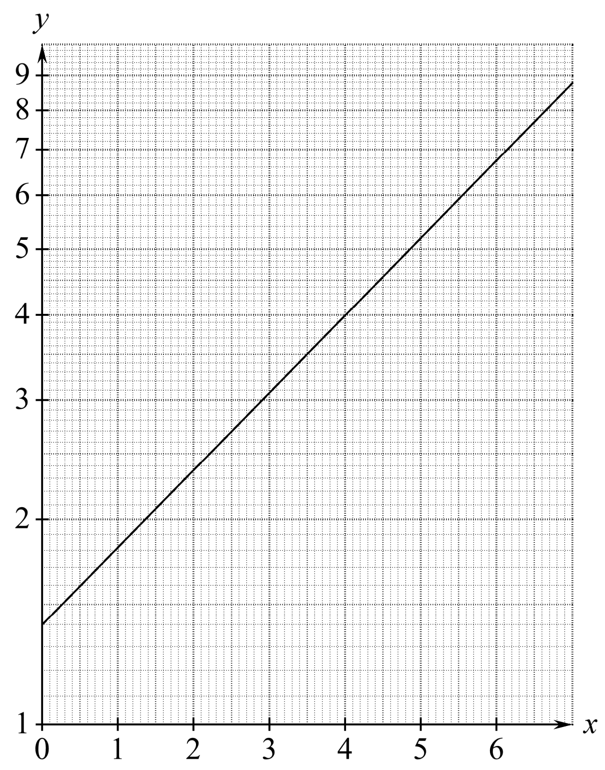
Hvis y-aksen blev fortsat nedad, så ville vi se at alle tallene er positive. Der er hverken 0 eller negative tal.

Advarsel: Antallet af delestreger mellem to hele tal er ikke det samme alle steder på aksen.

Koordinatsystemet er enkeltlogaritmisk fordi
y-aksen er logaritmisk og
x-aksen er sædvanlig.

Den skrå linje er graf for $y = 1{,}4 \cdot 1{,}3^x$.
I et sædvanligt koordinatsystem er denne graf en krum kurve.

Grafen for en eksponentiel sammenhæng er en ret linje når vi tegner den i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. For ingen andre sammenhænge er grafen en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.



12. Eksponentiel regression.

Opgave

Tabellen viser antallet af indbyggere i et område i perioden 2000-2005.

År	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Antal (i tusinder)	8,5	8,8	9,1	9,4	9,8	10,2

Udviklingen kan med god tilnærmelse beskrives med ligningen

$$y = b \cdot a^x$$

hvor y er antallet af indbyggere (målt i tusinder), og x er antal år efter 2000.

Hvad skal a og b være for at ligningen $y = b \cdot a^x$ passer bedst med tabellen?

Besvarelse

Ud fra den givne tabel laver vi den nye tabel nedenfor hvor årstallet er erstattet af værdien af x.

x	0	1	2	3	4	5
y	8,5	8,8	9,1	9,4	9,8	10,2

Denne tabel taster vi. Vi får udført eksponentiel regression på hele tabellen og får

$$y = 8{,}47906 \cdot 1{,}03686^x$$

Dvs. ligningen $y = b \cdot a^x$ passer bedst når

$$a = \underline{\underline{1{,}037}} \quad \text{og} \quad b = \underline{\underline{8{,}48}}$$

Bemærk

Hvis vi ikke bruger hele tabellen, så duer besvarelsen ikke.

Grafen for $y = 8{,}47906 \cdot 1{,}03686^x$ går ikke gennem tabel-punkterne,
men det er den eksponentielle graf der afviger mindst fra punkterne.

Hvordan taster vi på Nspire?

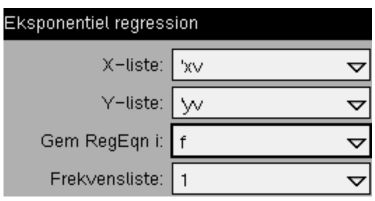
Vi taster tabellen som vist til højre.

A xv	B yv
0	8.5
1	8.8
2	9.1
3	9.4
4	9.8
5	10.2

I menuen vælger vi

Statistik/Stat-beregning.../Eksponentiel regression...

Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nederst til højre.



Når vi i et matematikfelt i et notevindue

taster $f(x)$ og trykker på enter

får vi

$$f(x) = 8.47906 \cdot (1.03686)^x$$

13. Sådan vokser eksponentielle sammenhænge.

Sætning

Når en sammenhæng er eksponentiel: $y = b \cdot a^x$, og h er et tal, så gælder:

Hver gang vi lægger $\boldsymbol{h}$ til $\boldsymbol{x}$, så bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{a^h}$.

Bevis

Vi starter med en tilfældig x-værdi: x_1

Vi lægger h til x_1 og får en en ny x-værdi: $x_2 = x_1 + h$

y-værdierne som hører til x_1 og x_2 kalder vi y_1 og y_2

y_2	$=$	$b \cdot a^{x_2}$	da y_2 er y-værdien hørende til x-værdien x_2 for $y = b \cdot a^x$
	$=$	$b \cdot a^{x_1 + h}$	da $x_2 = x_1 + h$
	$=$	$b \cdot a^{x_1} \cdot a^h$	ifølge potensreglen $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$
	$=$	$y_1 \cdot a^h$	for $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ da y_1 er y-værdien hørende til x_1

Der gælder altså at vi får y_2 når vi ganger y_1 med a^h .

Det var dette vi skulle bevise.

Eksempel

$y = 12 \cdot 1{,}15^x$

Hver gang vi til værdien af x lægger 4,

vil y blive ganget med $1{,}15^4 = 1{,}74901 \approx 1{,}749$

Dvs. hver gang x bliver 4 enheder større,
så vil y blive 74,9 % større.

Hver gang vi til x lægger 1,

vil y blive ganget med $1{,}15^1 = 1{,}15$

Dvs. hver gang x bliver 1 enhed større,
så vil y blive 15 % større.

Sluttal = 1,15 · Starttal
Sluttal = 115 % af Starttal
Starttal = 100 % af Starttal
115 % – 100 % = 15 %

Eksempel

$y = 26 \cdot 0{,}86^x$

Hver gang vi til værdien af x lægger 3,

vil y blive ganget med $0{,}86^3 = 0{,}636056 \approx 0{,}636$

Dvs. hver gang x bliver 3 enheder større,
vil y blive 36,4 % mindre.

Hver gang vi til x lægger 1,

vil y blive ganget med $0{,}86^1 = 0{,}86$

Dvs. hver gang x bliver 1 enhed større,
så vil y blive 14 % mindre.

Sluttal = 0,86 · Starttal
Sluttal = 86 % af Starttal
Starttal = 100 % af Starttal
86 % – 100 % = –14 %