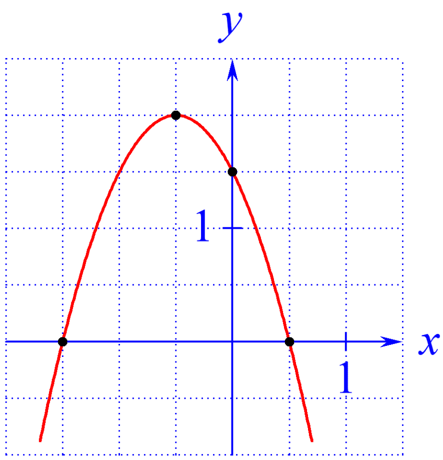
Kort om

Andengrads-polynomier



2011 (2012) Karsten Juul

Dette hæfte indeholder pensum i andengradspolynomier for gymnasiet og hf

Indhold

Kort om andengradspolynomier

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

1. Definition *Andengradspolynomium*

Et andengradspolynomium er er en funktion af typen

(1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hvor $a \neq 0$

Hvis vi skriver 0 på a 's plads, så bliver det ikke et andengrads-polynomium da x^2 forsvinder.

2. Eksempel *Hvilke tal er a, b og c lig?*

Vi sætter $a = 1$ $b = -2$ $c = 0$

i $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

og får $f(x) = 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 0$

så $f(x) = x^2 - 2x$

er et andengradspolynomium.

I dette og andre andengradspolynomier skal vi kunne se hvad a, b og c er for at kunne indsætte i formler med a, b og c .

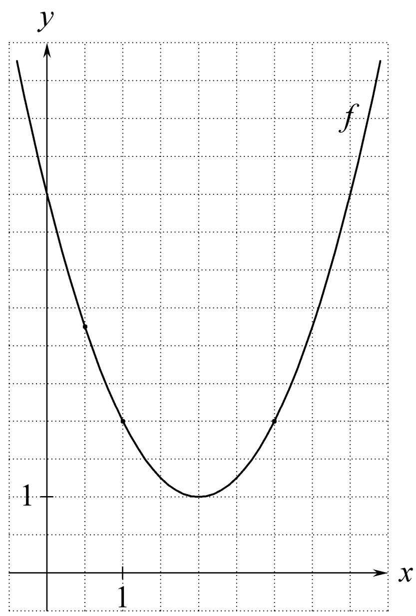
---

3. Eksempel *Hvordan udregner vi koordinater til grafpunkt?*

Grafen for et andengradspolynomium er en parabel.

I koordinatsystemet har vi tegnet grafen for

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$



3.1 Udregn y-koordinat til grafpunkt med kendt x-koordinat

Et punkt på grafen har x koordinaten 0,5 .
Vi vil udregne punktets y-koordinat y_1 .
Da $(1{,}5\ ,\ y_1)$ ligger på grafen, gælder at

når vi i forskriften indsætter 1,5 for x og regner ud, så får vi y_1

dvs.

$$y_1 = 0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5 + 5$$

Vi udregner højresiden og får

$$y_1 = \underline{\underline{3{,}25}}$$

Find punktet i koordinatsystemet.

3.2 Udregn x-koordinat til grafpunkt med kendt y-koordinat

Et punkt på grafen har y-koordinaten 2 .
Vi vil udregne punktets x-koordinat x_1
Da $(x_1\ ,\ 2)$ ligger på grafen, gælder at

når vi i forskriften indsætter x_1 for x og regner ud, så får vi 2

dvs.

$$2 = x_1^2 - 4x_1 + 5$$

Nspire løser denne ligning mht. x_1 og får

$$x_1 = \underline{\underline{1}} \quad \text{eller} \quad x_1 = \underline{\underline{3}}$$

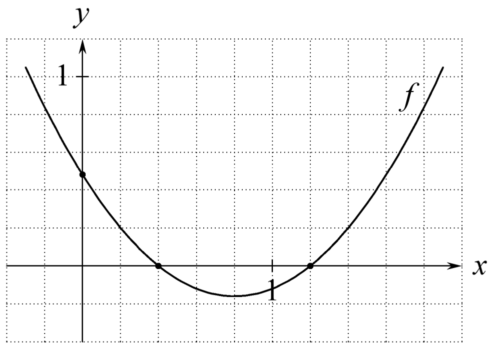
Der er altså to punkter på grafen som har y-koordinaten 2 .

Find punkterne i koordinatsystemet.

4. Eksempel *Skæringspunkter med x-akse og y-akse*

I koordinatsystemet har vi tegnet grafen for

$$f(x) = x^2 - 1{,}6x + 0{,}48$$



4.1 Udregn grafens skæringspunkt med y-aksen

Punktets x-koordinat er 0, så om dets y-koordinat y_1 gælder at

$$y_1 \;=\; 0^2 - 1{,}6 \cdot 0 + 0{,}48$$ Se 3.1

Vi udregner højresiden og får

$$y_1 \;=\; 0{,}48$$

Grafens skæringspunkt med y-aksen er $\underline{\underline{(0\ ,\ 0{,}48)}}$

4.2 Udregn grafpunkt der ligger på x-aksen

Punktets x-koordinat kalder vi x_1. Punktets y-koordinat er 0 da det ligger på x-aksen. Da $(x_1\ , 0)$ ligger på grafen, gælder

$$0 \;=\; x_1{}^2 - 1{,}6x_1 + 0{,}48$$ Se 3.2

Vi løser denne ligning mht. x_1 og får

$$x_1 = 0{,}4 \qquad \text{eller} \qquad x_1 = 1{,}2$$

Grafens skæringspunkter med x-aksen er $\underline{\underline{(0{,}4\ ,\ 0) \quad \text{og} \quad (1{,}2\ ,\ 0)}}$

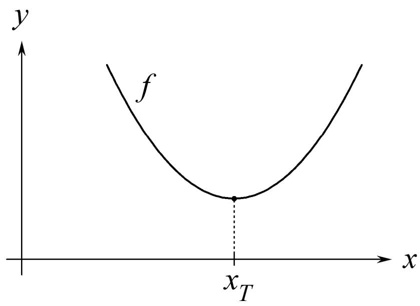
---

5. Sætning *Formel for x-koordinat til toppunkt*

$$f(x) \;=\; ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

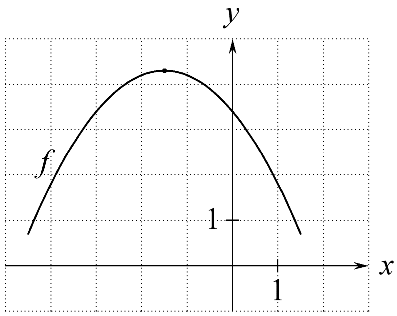
Grafens toppunkt har x-koordinaten

$$x_T \;=\; \frac{-b}{2a}$$



6. Eksempel *Udregn toppunkt*

$$f(x) \;=\; -0{,}4x^2 - 1{,}2x + 3{,}4$$



Vi ser at $\qquad f(x) \;=\; ax^2 + bx + c$ Se 2.

og $\qquad a = -0{,}4 \qquad b = -1{,}2 \qquad c = 3{,}4$

Toppunktets x-koordinat er

$$x_T \;=\; \frac{-b}{2a} \;=\; \frac{-(-1{,}2)}{2 \cdot (-0{,}4)} \;=\; -1{,}5$$ Se 5.

Toppunktet ligger på grafen og har x-koordinaten $-1{,}5$ så om y-koordinaten y_T gælder at

$$y_T \;=\; -0{,}4 \cdot (-1{,}5)^2 - 1{,}2 \cdot (-1{,}5) + 3{,}4$$ Se 3.1

Vi udregner højresiden og får

$$y_T \;=\; 4{,}3$$

Toppunktet er $\qquad T \;=\; \underline{\underline{(-1{,}5\ ,\ 4{,}3)}}$

7. Definition *Formel for diskriminant*

Diskriminanten for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

er tallet

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

8. Eksempel *Udregn diskriminanten*

$$f(x) = 3x^2 - x + 5$$

Vi ser at $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$

og $\quad a = 3 \quad b = -1 \quad c = 5$

Se 2.

Diskriminanten er

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{-59}}$$

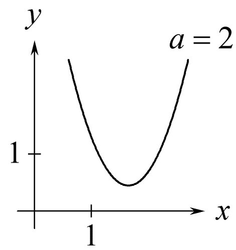
---

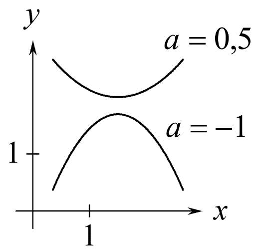
9. Sætning *Betydning af a, b, c og d for grafen*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

d er diskriminanten

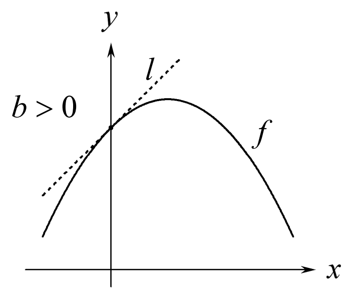
a : *a* positiv: grene vender op
a negativ: grene vender ned
parablen er bredere når *a* er tættere på nul





b : *b* er hældningskoefficient for tangent til graf i skæringspunkt med *y*-akse

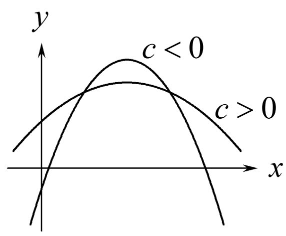
b positiv: graf går op mod højre i skæring med *y*-akse
b nul: grafs toppunkt er på *y*-akse
b negativ: graf går ned mod højre i skæring med *y*-akse



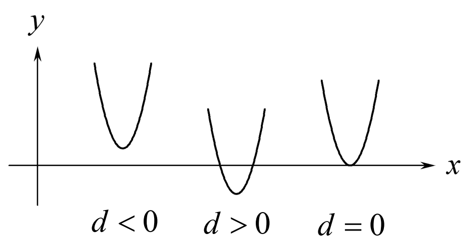
l er tangent til *f*-grafen i dennes skæringspunkt med *y*-aksen.
b er lig *l* 's hældningskoefficient.

c : Graf skærer *y*-akse i punktet $(0\,,\,c)$

c positiv: graf skærer *y*-akse over *x*-akse
c nul: graf går gennem punktet $(0\,,\,0)$
c negativ: graf skærer *y*-akse under *x*-akse



d : *d* positiv: graf har to punkter på *x*-akse
d nul: graf har ét punkt på *x*-akse
d negativ: graf har ingen punkter på *x*-akse



10. Definition *Nulpunkt*

Ordet nul<u>punkt</u> er <u>misvisende</u>.
Et nul<u>punkt</u> er <u>IKKE</u> et <u>punkt</u>.
Et nul<u>punkt</u> er et <u>tal</u>.

At

et tal er <u>nulpunkt</u> for en funktion

betyder at

når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud,
så får vi nul.

11. Eksempel *Nulpunkt*

At

1,5 er nulpunkt for $f(x) = 2x^2 - 3x$

betyder at

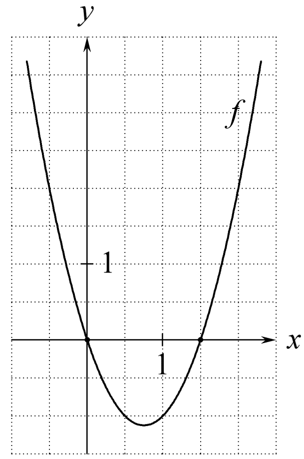
$2 \cdot 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 \;=\; 0$

Dette er det samme som at

1,5 er løsning til ligningen $2x^2 - 3x \;=\; 0$

og det samme som at

grafpunktet med x-koordinat 1,5 ligger på x-aksen. Se 4.2



0 og 1,5 er nulpunkter for f

12. Sætning *Antal nulpunkter eller løsninger*

$f(x) \;=\; ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$

d er diskriminanten Se 7. og 8.

Der gælder at

antallet af <u>nulpunkter</u> for andengrads<u>polynomiet</u> $ax^2 + bx + c$

dvs.

antallet af <u>løsninger</u> til andengrads<u>ligningen</u> $ax^2 + bx + c \;=\; 0$

er

2 hvis $d > 0$

1 hvis $d = 0$ Se 9. d

0 hvis $d < 0$

13. Eksempel *Antal nulpunkter eller løsninger*

Vi vil bestemme tallet k så andengradsligningen

$kx^2 - 2x + 3 \;=\; 0$

har netop én løsning.

Ligningen er på formen $ax^2 + bx + c \;=\; 0$ med $a = k$, $b = -2$, $c = 3$,

så diskriminanten er $d \;=\; b^2 - 4ac \;=\; (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 3 \;=\; \underline{4 - 12k}$

Vi vil finde ud af hvornår der er én løsning, dvs. vi vil finde ud af hvornår d er 0:

$4 - 12k \;=\; 0$ er ensbetydende med at $k = \frac{1}{3}$

Ligningen $kx^2 - 2x + 3 \;=\; 0$ har netop én løsning når $k = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

14. Sætning *Løs andengradsligning*

En andengradsligning

$$ax^2 + bx + c \;=\; 0 \quad , \qquad a \neq 0$$

kan vi løse sådan:

Først udregner vi diskriminanten:

$$d \;=\; b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Så bruger vi følgende regel:

Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger.

Hvis $d = 0$ har ligningen løsningen $\dfrac{-b}{2a}$

Hvis $d > 0$ har ligningen løsningerne $\dfrac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ og $\dfrac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Bemærkning

Både når $d = 0$ og $d > 0$ er løsningerne

$$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Formlen for at løse andengradsligninger.

15. Eksempel *Løs andengradsligning*

Ligningen

$$3x^2 - 2x - 1 \;=\; 0$$

er af typen

$$ax^2 + bx + c \;=\; 0$$

med

$a = 3$, $b = -2$ og $c = -1$

Diskriminanten er

$$d \;=\; b^2 - 4 \cdot a \cdot c \;=\; (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) \;=\; 16$$

Se 14

Da $d > 0$ har ligningen løsningerne

$$\frac{-b-\sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2 \cdot 3} \;=\; \frac{2-4}{6} \;=\; -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2 \cdot 3} \;=\; \frac{2+4}{6} \;=\; 1$$

Konklusion:

Ligningen $3x^2 - 2x - 1 \;=\; 0$ har løsningerne $\underline{\underline{-\frac{1}{3} \text{ og } 1}}$

16. Sætning *Faktoriser andengradspolynomium*

Hvis andengradspolynomiet

$$f(x) \;=\; ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

har nulpunkterne x_1 og x_2 , er

$$f(x) \;=\; a(x - x_1)(x - x_2)$$ ← formlen for at faktorisere et andengradspolynomium

Når vi skriver andengradspolynomiet sådan, så har vi faktoriseret andengradspolynomiet.

Tal der ganges, kaldes faktorer. Her er der tre faktorer, nemlig a , $x-x_1$ og $x-x_2$.

17. Eksempel *Faktoriser andengradspolynomium*

Vi vil faktorisere andengradspolynomiet

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

Vi bruger formlen for at løse andengradsligninger og får at

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ har løsningerne $\frac{1}{2}$ og -3 Se 14. og 15.

Vi bruger formlen for at faktorisere et andengradspolynomium og får at

$$f(x) = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - (-3)\right)$$ Se 16.

Vi reducerer dette og får

$$f(x) = \underline{\underline{(2x-1)(x+3)}}$$

18. Eksempel *Find forskrift for andengradspolynomium*

Vi har fået at vide at

$f(x) \;=\; ax^2 + bx + c$

$f(x)$ har nulpunkterne 2 og 5

punktet $(3, 8)$ ligger på grafen for $f(x)$

Vi vil finde a , b og c .

Vi indsætter i formlen for at faktorisere et andengradspolynomium:

$$f(x) = a(x-2)(x-5)$$ Se 16.

Når vi indsætter et grafpunkts *x*-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets *y*-koordinat. Da $(3, 8)$ ligger på grafen, er Se 3.1

$$a(3-2)(3-5) = 8$$

dvs. $a \cdot 1 \cdot (-2) = 8$, så $a = -4$.

$$f(x) \;=\; -4(x-2)(x-5) \;=\; -4x^2 + 28x - 40$$

så

$$a \;=\; \underline{\underline{-4}} \;,\qquad b \;=\; \underline{\underline{28}} \qquad \text{og} \qquad c \;=\; \underline{\underline{-40}}$$

19. Oplæg *Nulregel* **Kun for A-niveau**

Vi ganger to tal:

$$3\cdot 2 = 6$$
$$0\cdot 2 = 0$$
$$3\cdot 0 = 0$$

Hvis resultatet skal være 0,
så må en af faktorerne være 0.

Hvis $x=3$ er

$$(x+2)\cdot 4 =$$
$$5 \cdot 4 =$$
$$20$$

Hvis $x=-2$ er

$$(x+2)\cdot 4 =$$
$$0 \cdot 4 =$$
$$0$$

Hvis $\quad (x+2)\cdot 4 = 0$

må $\quad x+2 = 0 \quad$ eller $\quad 4 = 0$

dvs. $\quad x+2 = 0$

så $\quad x=-2$

20. Sætning *Nulregel* **Kun for A-niveau**

At *et produkt er 0*
er det samme som at *en af faktorerne er 0*

Se 19.

Dvs. $\quad udtryk1 \cdot udtryk2 = 0$
er det samme som $\quad udtryk1 = 0 \quad$ eller $\quad udtryk2 = 0$

21. Eksempel *Nulregel* **Kun for A-niveau**

Vi vil løse ligningen

$$(x+2)\cdot(2x-6) = 0$$

Vi bruger nulreglen og får

$$x+2 = 0 \quad \text{eller} \quad 2x-6 = 0$$

dvs.

$$\underline{\underline{x=-2 \quad \text{eller} \quad x=3}}$$

22. Oplæg *Ligninger af typen* $x^2 = r$

Når $x = 3$ er $x^2 = x \cdot x = 3 \cdot 3 = 9$

Når $x = -3$ er $x^2 = x \cdot x = (-3)\cdot(-3) = 9$

$x^2 = 9$ netop når $x = -3$ eller $x = 3$

23. Sætning *Ligninger af typen* $x^2 = r$

Når n er negativ: $x^2 = n$ er falsk uanset hvilket tal der indsættes for x

$x^2 = 0$ netop når $x = 0$

Når p er positv: $x^2 = p$ netop når $x = -\sqrt{p}$ eller $x = \sqrt{p}$ Se 22.

24. Eksempel *Ligninger af typen* $(\ udtryk\ )^2 = r$

Vi vil løse ligningen

$$(x+2)^2 = 9$$

Af sætning 23 får vi

$$x+2 = -\sqrt{9} \quad \text{eller} \quad x+2 = \sqrt{9}$$

dvs.

$$\underline{\underline{x = -5 \quad \text{eller} \quad x = 1}}$$

25. Eksempel *Andengradsligning med to led*

Når en andengradsligning har to led, kan vi løse den ved omskrivning.
Der er to typer af disse ligninger.

Andengradsligning uden førstegradsled:

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$\underline{\underline{x = -\sqrt{3} \quad \text{eller} \quad x = \sqrt{3}}}$$

Se 23.

Andengradsligning uden konstantled: **Kun for A-niveau. B-niveau bruger sætning 14 med $c = 0$.**

$$2x^2 - 5x = 0$$

$$x \cdot (2x - 5) = 0$$

Se 20. og 21.

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad 2x - 5 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \tfrac{5}{2}}}$$

26. Bevis *for formlen for løsning af andengradsligninger*

Se 14.

Ved udregning får vi

(1) $(2ax+b)^2 \;=\; 4a^2x^2+4abx+b^2$

Vi starter med at omskrive andengradsligningen:

I ligningen

$ax^2+bx+c \;=\; 0 \quad , \qquad a \neq 0$

ganger vi begge sider med $4a$:

$4a \cdot \left(ax^2+bx+c\right) \;=\; 4a \cdot 0$

Vi ganger ind i parentesen:

$4a^2x^2+4abx+4ac \;=\; 0$

Vi lægger diskriminanten $d = b^2-4ac$ til begge sider:

$4a^2x^2+4abx+4ac \;+\; b^2-4ac \;=\; 0 \;+\; b^2-4ac$

Vi reducerer:

$4a^2x^2+4abx+b^2 \;=\; d$

Af (1) får vi

$(2ax+b)^2 \;=\; d$

Vi bruger nu de tre dele af sætning 23:

Hvis $d<0$:

$(2ax+b)^2 \;=\; d$

har ingen løsninger

Hvis $d=0$:

$(2ax+b)^2 \;=\; 0$

$2ax+b \;=\; 0$

$x \;=\; \dfrac{-b}{2a}$

Hvis $d>0$:

$(2ax+b)^2 \;=\; d$

$2ax+b \;=\; \pm\sqrt{d}$

$2ax \;=\; -b\pm\sqrt{d}$

$x \;=\; \dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$

Nu har vi bevist alle tre dele af sætning 14.

27. Definition *Rødder*

En rod i et polynomium er det samme som et nulpunkt for et polynomium .

En rod i en ligning er det samme som en løsning til en ligning .