Integration uden hjælpemidler

på stx-matB

I denne oversigt er det underforstået at der integreres mht. $\boldsymbol{x}$,
men i en opgave kan der være brugt et andet bogstav end x .

Reglerne gælder når definitionsmængden er et interval, f.eks. $x < 2$ eller $x \in R$.

Regel 0: Det ubestemte integral til en funktion er lig alle funktionens stamfunktioner.

Hvis:	$f(x)$	har stamfunktionen	$F(x)$
så:	$\int f(x)\,dx \;=\; F(x)+k$.		

Eksempel på brug af regel 0:

$$\int (24x^3 - 2x + 1)\,dx \;=\; 6x^4 - x^2 + x \;+\; k$$

Regel 1: Stamfunktion til konstant.

c	har stamfunktionen	$c \cdot x$.

Eksempler på brug af regel 1:

6 har stamfunktionerne $6x \;+\; k$.

$-\frac{1}{2}$ har stamfunktionerne $-\frac{1}{2}x \;+\; k$.

1 har stamfunktionerne $x \;+\; k$.

Regel 2: Stamfunktion til potensfunktion.

x^a	har stamfunktionen	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$.

Eksempler på brug af regel 2:

x^3 har stamfunktionerne $\frac{1}{4}x^4 \;+\; k$.

$x^{-1,5}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{-0,5}x^{-0,5} \;+\; k$ dvs. $-2x^{-0,5} \;+\; k$.

x har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 \;+\; k$ (da $x = x^1$).

Advarsel: Regel 2 kan ikke bruges på eksponentialfunktioner:

a^x har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{x+1} \cdot a^{x+1}$, og 4^x har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$.

Regel 3:

$\frac{1}{x}$	har stamfunktionerne	$\ln(x) \;+\; k$	når	$x > 0$.
x^{-1}	har stamfunktionerne	$\ln(x) \;+\; k$	når	$x > 0$.

Advarsel: $\frac{1}{2-x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\ln(2-x)$, $x < 2$.

VEND!

Regel 4:

$e^{c\cdot x}$ har stamfunktionen $\frac{1}{c}\cdot e^{c\cdot x}$.

Eksempler på brug af regel 4:

e^{3x} har stamfunktionerne $\frac{1}{3}e^{3x} + k$. e^{x} har stamfunktionerne $e^{x} + k$.

Regel 5: Stamfunktion til konstant gange x-udtryk .

Hvis:	$f(x)$	har stamfunktionen	$F(x)$	Behold konstanten og integrer x-udtrykket.
så:	$c\cdot f(x)$	har stamfunktionen	$c\cdot F(x)$.	

Eksempler på brug af regel 5:

$12x^3$ har stamfunktionerne $12\cdot\frac{1}{4}x^4 + k$ dvs. $3x^4 + k$.

$12e^{3x}$ har stamfunktionerne $12\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + k$ dvs. $4e^{3x} + k$.

$12e^{x}$ har stamfunktionerne $12\cdot e^{x} + k$ dvs. $12e^{x} + k$.

$12x$ har stamfunktionerne $12\cdot\frac{1}{2}x^2 + k$ dvs. $6x^2 + k$.

Regel 6: Stamfunktion til udtryk plus udtryk og til udtryk minus udtryk .

Hvis:	$f(x)$	har stamfunktionen	$F(x)$ og	
	$g(x)$	har stamfunktionen	$G(x)$	
så:	$f(x)+g(x)$	har stamfunktionen	$F(x)+G(x)$.	Integrer på begge sider af $+$ og $-$.
	$f(x)-g(x)$	har stamfunktionen	$F(x)-G(x)$.	

Eksempler på brug af regel 6:

$x^3 + e^{3x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}e^{3x} + k$.

$6 - e^{x}$ har stamfunktionerne $6x - e^{x} + k$.

$x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + k$ når $x > 0$.

Regel 7: Advarsel.

Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde som f.eks. regel 6).

$x^3 \cdot e^{3x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{3}e^{3x}$.

$\dfrac{x^3}{e^{3x}}$ har **IKKE** stamfunktionen $\dfrac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}e^{3x}}$.

$5\cdot e^{x}$ har **IKKE** stamfunktionen $5x\cdot e^{x}$.

$\dfrac{5}{e^{x}}$ har **IKKE** stamfunktionen $\dfrac{5x}{e^{x}}$.