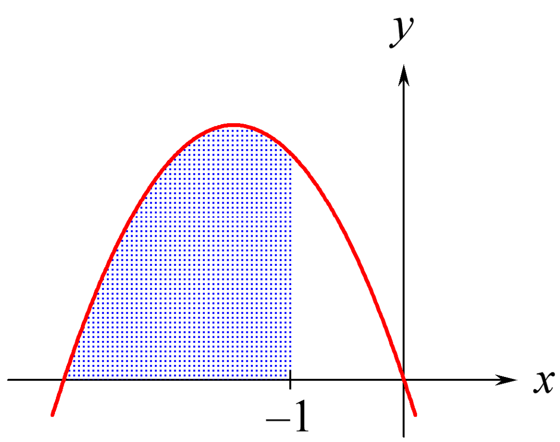
Integralregning
med øvelser

for B-niveau i gymnasiet og hf



2011 Karsten Juul

Dette hæfte gennemgår integralregningen for B-niveau uden at gøre det mere indviklet end krævet. Øvelserne giver eleverne et kendskab til stoffet som de ikke opnår ved at efterligne udregninger i besvarelser af eksamensopgaver.

TEORI

1. Hvad er en stamfunktion 1
2. Hver funktion har mange stamfunktioner 1
3. Stamfunktioner til nogle grundlæggende funktioner 2
4. Stamfunktion til $k \cdot f(x)$, $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$ 3
5. Symbol for stamfunktion 4
6. Sådan finder vi stamfunktioner på TI-Nspire 4
7. Sådan finder vi en bestemt af en funktions stamfunktioner 5
8. Hvad er en arealfunktion? 6
9. Vigtig regel om arealfunktioner 6
10. Bestemt integral 7
11. Sådan udregner vi bestemte integraler 8
12. Opgave hvor vi skal fortolke et integral 8
13. Bestemme integral ud fra arealer 9
14. Bestemme areal mellem graf og *x*-akse 10
15. Areal mellem to grafer 11
16. Bestem *k* så arealet af *M* er lig en given værdi 12

ØVELSER

1. Hvad er en stamfunktion 13
2. Hver funktion har mange stamfunktioner 13
3. Stamfunktioner til nogle grundlæggende funktioner 14
4. Stamfunktion til $k \cdot f(x)$, $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$ 14
5. Symbol for stamfunktion 14
6. Sådan finder vi stamfunktioner på TI-Nspire 14
7. Sådan finder vi en bestemt af en funktions stamfunktioner 15
8. Hvad er en arealfunktion? 19
9. Vigtig regel om arealfunktioner 20
10. Bestemt integral 20
11. Sådan udregner vi bestemte integraler 20
12. Opgave hvor vi skal fortolke et integral 21
13. Bestemme integral ud fra arealer 22
14. Bestemme areal mellem graf og *x*-akse 23
15. Areal mellem to grafer 24
16. Bestem *k* så arealet af *M* er lig en given værdi 26

Integralregning med øvelser for B-niveau i gymnasiet og hf

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

1. Hvad er en stamfunktion?

1.1 Definition

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$g'(x) = f(x)$

1.2 Eksempel

$\frac{1}{3}x^3$ er stamfunktion til x^2

fordi

$$\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$$

2. Hver funktion har mange stamfunktioner

2.1 Eksempel

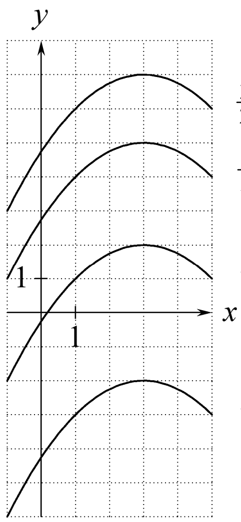
$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + 5\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + 8\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + c$ er stamfunktion til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$
uanset hvilket tal vi skriver i stedet for k .

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$.



$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + 4{,}75$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + 2{,}75$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + (-0{,}25)$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + (-4{,}25)$

2.2 Sætning

I et x-interval hvor funktionerne $h(x)$ og $f(x)$ er defineret, gælder

Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$,
så er funktionerne $h(x)+k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

Dette kan vi også formulere sådan:

Hvis vi kender grafen for en stamfunktion $h(x)$ til $f(x)$,
så kender vi også graferne for de andre stamfunktioner til $f(x)$.
Det er nemlig de grafer vi kan få ved at rykke $h(x)$-grafen op eller ned.

3. Stamfunktioner til nogle grundlæggende funktioner

3.1 Stamfunktion til konstant

Regel: k har stamfunktionen $k \cdot x$ da $(k \cdot x)' = k \cdot 1 = k$

Eksempler:
6 har stamfunktionerne $6x + c$
1 har stamfunktionerne $x + c$
$-\frac{1}{2}$ har stamfunktionerne $-\frac{1}{2}x + c$

3.2 Stamfunktion til potensfunktion

Regel: x^a har stamfunktionen $\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$ da $\left(\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}\right)' = \frac{1}{a+1} \cdot (a+1)x^a = x^a$

Eksempler:
x^3 har stamfunktionerne $\frac{1}{4}x^4 + c$
$x^{-1,5}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{-0,5}x^{-0,5} + c$ dvs. $-2x^{-0,5} + c$
x har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + c$ da $x = x^1$

Advarsel: Regel 3.2 kan IKKE bruges på eksponentialfunktioner:
a^x har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{x+1} \cdot a^{x+1}$
4^x har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

3.3 Stamfunktion til $\frac{1}{x}$

Regel: $\frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$ da $(\ln(x) + c)' = \frac{1}{x}$

x^{-1} har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$ da $x^{-1} = \frac{1}{x}$

Advarsel: $\frac{1}{2-x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\ln(2-x)$

3.4 Stamfunktion til e ^{x}

Regel: e^x har stamfunktionerne $e^x + c$

4. Stamfunktion til $k \cdot f(x)$, $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$

4.1 Stamfunktion til <u>konstant gange udtryk</u>

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
så: $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$

<u>Eksempler:</u>

$12x^3$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c$ dvs. $3x^4 + c$
$12\,\mathrm{e}^x$ har stamfunktionerne $12 \cdot \mathrm{e}^x + c$
$12x$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c$ dvs. $6x^2 + c$

Vi beholder ”konstant gange” og erstatter x-udtrykket med dets stamfunktion

---

4.2 Stamfunktion til <u>udtryk plus udtryk</u> og til <u>udtryk minus udtryk</u>

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
$g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x)+g(x)$ har stamfunktionen $F(x)+G(x)$
$f(x)-g(x)$ har stamfunktionen $F(x)-G(x)$

På begge sider af + og – erstatter vi udtrykket med dets stamfunktion

<u>Eksempler:</u>

$6 - \mathrm{e}^x$ har stamfunktionerne $6x - \mathrm{e}^x + c$
$x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

4.3 Advarsel.

<u>Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket</u>

(bortset fra visse specielle tilfælde som f.eks. regel 4.2)

<u>Eksempler:</u>

$x^3 \cdot \mathrm{e}^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot \mathrm{e}^x$

$\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\dfrac{\frac{1}{4}x^4}{\mathrm{e}^x}$

$5 \cdot \mathrm{e}^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot \mathrm{e}^x$

5. Symbol for stamfunktion

Symbolet $\int f(x)\,dx$

betyder: stamfunktionerne til $f(x)$

og læses: det ubestemte integral af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x)\,dx$ er lig

så siger vi at vi integrerer $f(x)$

$f(x)$ kaldes integranden

Eksempel: $\int (2x+1)dx \;=\; x^2+x+c$

Her har vi integreret $2x+1$

$2x+1$ er integranden

Vi har sat parentes om integranden fordi den består af mere end ét led

6. Sådan finder vi stamfunktioner på TI-Nspire

For at finde stamfunktion på Nspire vælger vi på skabelon-paletten følgende integralskabelon:

$$\int \square \, d\square$$

Nspire skriver kun én af stamfunktionerne: $\int \left(7^x\right) dx = \frac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+c$.

Hvis vi taster $\text{integral}\left(7^x, x, c\right)$ skriver Nspire resultatet $\frac{7^x}{\ln(7)}+c$

For at finde stamfunktion til

$$f(x) = 3x - \frac{2}{x} \;, \quad x > 0$$

skal vi efter integraltegnet angive at $x > 0$:

$$\int \left(3\cdot x - \frac{2}{x}\right) dx | x>0 = \frac{3\cdot x^2}{2} - 2\cdot \ln(x)$$

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

7. Sådan finder vi en bestemt af en funktions stamfunktioner

Opgave 1 (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan:

$F(-1) = -6$.

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3\cdot(-1) + c \;=\; -6$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

så $c = -4$, dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4 \quad , \qquad x \in \mathrm{R}}}$$

Opgave 2 (Vi kender en linje der er tangent til stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

Linjen med ligningen $y = x - 5$ er tangent til grafen for F .

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Først udregner vi et punkt der ligger på grafen for F ,
nemlig det punkt (x_0, y_0) hvori tangenten rører grafen.
Af tangentens ligningen $y = x - 5$ ser vi at tangenthældningen er 1 :

$$F'(x_0) \;=\; 1$$
$$2x_0 + 3 \;=\; 1$$
$$x_0 \;=\; -1$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften for differentialkvotienten og regner ud, så får vi grafpunktets tangenthældning.

Da $x_0 = -1$ og (x_0, y_0) ligger på linjen med ligningen

$$y = x - 5$$

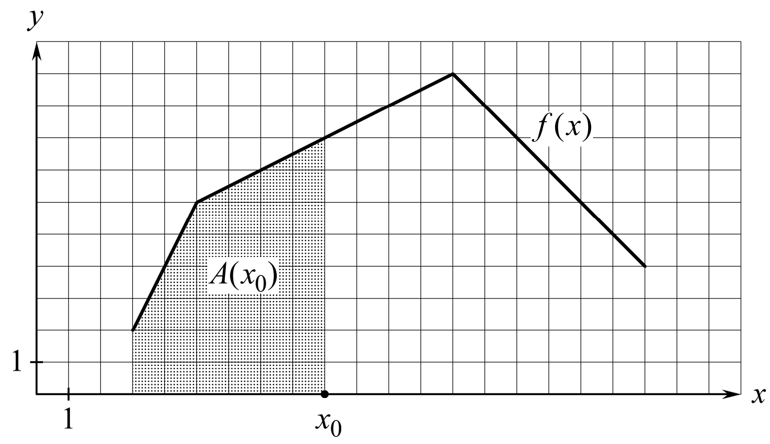
får vi

$$y_0 \;=\; (-1) - 5$$
$$y_0 \;=\; -6$$

At en linjes ligning er $y = ax + b$ betyder at for et punkt på linjen kan vi udregne y-koordinaten ved at gange x-koordinaten med a og lægge b til resultatet.

Nu kender vi et punkt på grafen for F . Så kan vi bruge metoden fra opgave 1.

8. Hvad er en arealfunktion?



8.1 Hvad er en arealfunktion?

Den viste graf er på en skærm.

Når vi trækker x_0 - prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x_0)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes arealfunktionen for f .

8.2 Eksempel

På billedet ser vi at $A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.

9. Vigtig regel om arealfunktioner

9.1 Sætning

Betyder at grafen ligger på eller over *x*-aksen.

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

så gælder at

$A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

dvs.

$A'(x) = f(x)$

10. Bestemt integral

<u>10.1 Definition</u> af bestemt integral

Hvis

$f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ i intervallet $a \le x \le b$

så definerer man at

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Symbolet til venstre for lighedstegnet læser man sådan:

Integralet fra a til b af $f(x)$.

$f(x)$ kaldes <u>integranden</u> .

<u>10.2 Bemærk:</u>

I definitionen af bestemt integral er det IKKE krævet at $f(x) \ge 0$.

<u>Det bestemte integral er et tal</u>.

<u>Det ubestemte integral er funktioner</u>.

<u>10.3 Sætning</u> om bestemt integral og areal

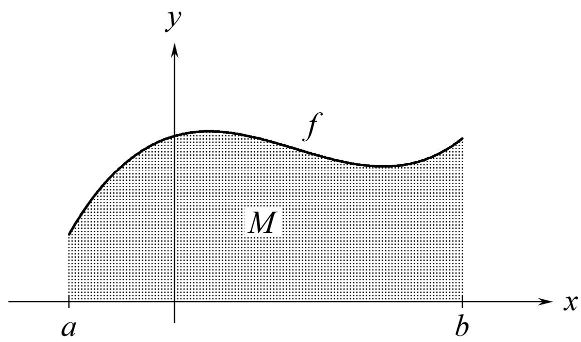
Hvis

$f(x) \ge 0$ for $a \le x \le b$ og

M er området mellem f-grafen og x-aksen
i intervallet $a \le x \le b$

så gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{arealet af } M$$



<u>Bevis</u>

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$.

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$(*) \qquad A(x) = F(x) + c$.

Nu fås

areal af M	$= A(b)$	Ifølge definitionen på arealfunktion.
	$= A(b) - A(a)$	Da $A(a) = 0$.
	$= \big(F(b)+k\big) - \big(F(a)+k\big)$	Ifølge $(*)$.
	$= F(b) - F(a)$	
	$= \int_a^b f(x)\,dx$	Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætning 10.3 bevist.

11. Sådan udregner vi bestemte integraler

11.1 Udregne bestemt integral uden hjælpemidler

Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ som betyder $F(b)-F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x.

Eksempel på brug af denne skrivemåde:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx &= \left[2x^3-5x\right]_{-1}^{4}\\ &= \left(2\cdot 4^3-5\cdot 4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right)\\ &= \underline{\underline{105}}\end{aligned}$$

11.2 Udregne bestemt integral på TI-Nspire

For at udregne et bestemt integral på Nspire vælger vi på skabelon-paletten følgende integralskabelon:

$$\int_{\square}^{\square}(\square)\,d\square$$

Eksempel: $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)dx = e-2$

Hvis vi taster $\text{integral}\left(6\cdot x^2-5,x,-1,4\right)$ skriver Nspire $\displaystyle\int_{-1}^{4}\left(6\cdot x^2-5\right)dx = 105$

12. Opgave hvor vi skal fortolke et integral

I en opgave er $f(x)=-3x-x^2$

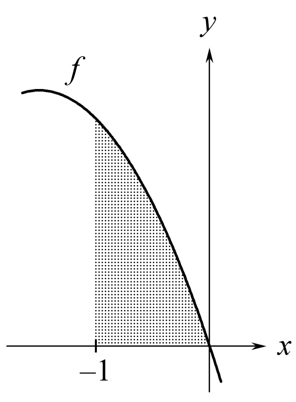
Vi har udregnet at $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{7}{6}$

Vi skal give en **geometrisk fortolkning** af dette tal.

Svar på dette spørgsmål:

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ er areal mellem *f*-graf og *x*-akse i intervallet $-1\le x\le 0$

dvs. $\frac{7}{6}$ er $\underline{\underline{\text{arealet af det grå område}}}$.



13. Bestemme integral ud fra arealer

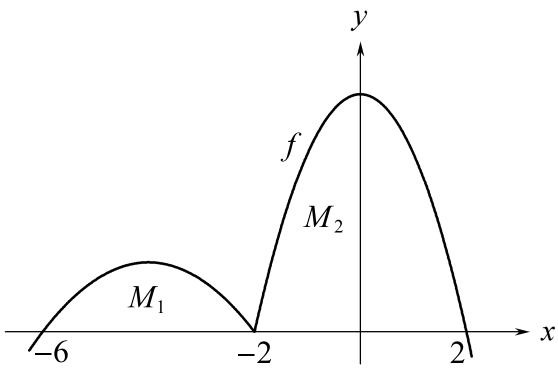
Opgave

På figuren ses grafen for en funktion f der har nulpunkterne -6 , -2 og 2 .

Sammen med x-aksen afgrænser grafen en punktmængde M_1 der har arealet $\frac{7}{2}$.

Sammen med x-aksen og y-aksen afgrænser grafen i 2. kvadrant en punktmængde M_2 som har arealet 6 .

Bestem $\int_{-6}^{0} f(x)\,dx$.



Besvarelse

$\int_{-6}^{0} f(x)\,dx$ er areal mellem f-graf og x-akse i intervallet $-6 < x < 0$

Dette areal får vi ved at lægge arealerne af M_1 og M_2 sammen:

$$\frac{7}{2} + 6 = \frac{19}{2}$$

Dvs.

$$\int_{-6}^{0} f(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{19}{2}}}$$

14 Bestemme areal mellem graf og x-akse

Opgave

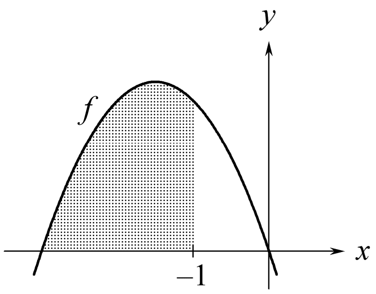
En funktion f har forskriften

$$f(x) = -x^2 - 3x \ .$$

Grafen for f, x-aksen og linjen med ligningen $x = -1$ afgrænser i anden kvadrant en punktmængde M der har et areal.

Bestem arealet af M.

Besvarelse



Først tegner vi en skitse der viser M.
M er det grå område på skitsen.

Ud fra skitsen ser vi at vi har brug for at kende x-koordinaten til det venstre af grafens skæringspunkter med x-aksen.

Da ligningen $-x^2 - 3x = 0$ har løsningerne -3 og 0, er -3 førstekoordinat til det venstre af grafens skæringspunkter med førsteaksen.

Vi skal skrive hvordan vi har fundet løsningerne.

Arealet af M er lig

$$\int_{-3}^{-1} (-x^2 - 3x)\, dx$$

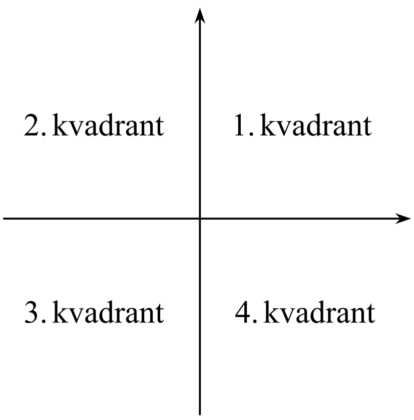
Vi taster dette integral og får det udregnet.

En anden mulighed er at vi udregner integralet på den måde som er vist i 11.1 .

Vi får $\frac{10}{3}$ så

$$\text{arealet af } M \text{ er } \underline{\underline{\frac{10}{3}}} \ .$$

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer, står der ofte ordet **kvadrant**.
Koordinatakserne deler planen op i fire kvadranter.
Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



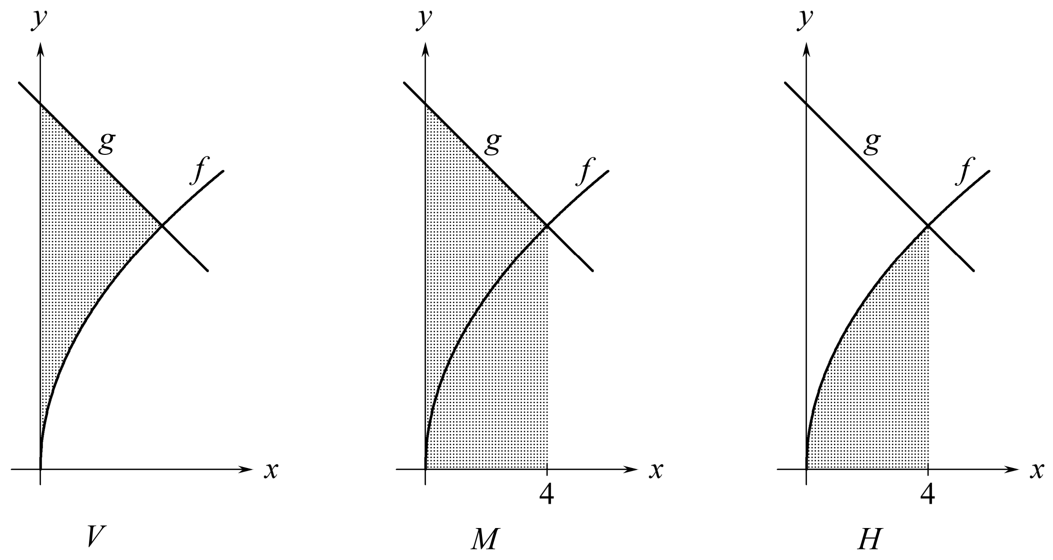
15. Areal mellem to grafer

I nogle opgaver skal et areal udregnes ved at udregne to arealer og trække det ene fra det andet.

I koordinatsystemerne har vi tegnet graferne for funktionerne

$$f(x) = 4\cdot\sqrt{x} \qquad \text{og} \qquad g(x) = 12 - x$$

Vi vil udregne arealet af det grå område V på venstre figur.



Vi løser ligningen $4\cdot\sqrt{x} = 12 - x$ og får $x = 4$,
så grafernes skæringspunkt har x-koordinat 4.

Det grå område M på midterste figur har arealet

$$\int_0^4 (12 - x)\,dx = 40$$

Det grå område H på højre figur har arealet

$$\int_0^4 4\cdot\sqrt{x}\,dx = \tfrac{64}{3}$$

Hvis vi fjerner H fra M, får vi V, så arealet af V er $40 - \tfrac{64}{3} = \underline{\underline{\tfrac{56}{3}}}$

Bemærkning: Vi kunne have udregnet arealet af M uden at bruge integralregning da M er begrænset af rette linjer.

16. Bestem k så arealet af M er lig en given værdi

Figuren viser grafen for $f(x) = x^2 + 1$
og linjen med ligningen $x = k$.

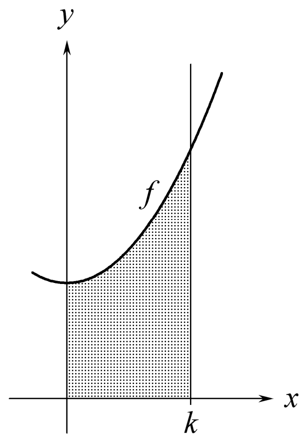
Vi vil bestemme et positivt tal k så det grå areal er $\frac{3}{2}$.

Vi løser ligningen

$$\int_0^k (x^2+1)\,dx = \frac{3}{2}$$

mht. k for $k > 0$ og får

$$k = \underline{\underline{1{,}08004}}$$



Figuren viser grafen for $f(x) = 2 - kx^2$
hvor $0 < k < 2$.

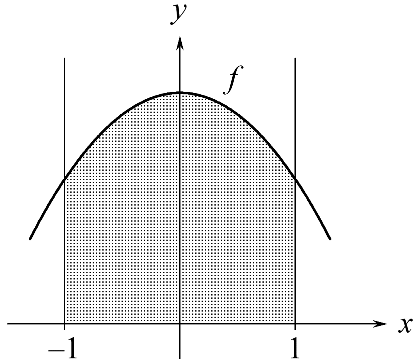
Vi vil bestemme k så det grå areal er $\frac{7}{2}$.

Vi løser ligningen

$$\int_{-1}^1 (2 - kx^2)\,dx = \frac{7}{2}$$

mht. k for $0 < k < 2$ og får

$$k = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$



Figuren viser graferne for

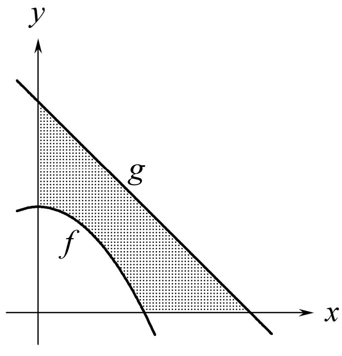
$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = k - x \quad \text{hvor} \quad k > \frac{5}{4} .$$

Vi vil bestemme k så det grå areal er $\frac{4}{3}$.

På figuren ser vi at vi har brug for at kende de to viste skærings-punkter mellem x-aksen og graferne:

Vi løser $1 - x^2 = 0$ og får $x = \pm 1$

Vi løser $k - x = 0$ og får $x = k$



På figuren ser vi at vi får det grå areal når vi trækker arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $0 \le x \le 1$ fra arealet mellem g-graf og x-akse i intervallet $0 \le x \le k$.

Derfor løser vi ligningen

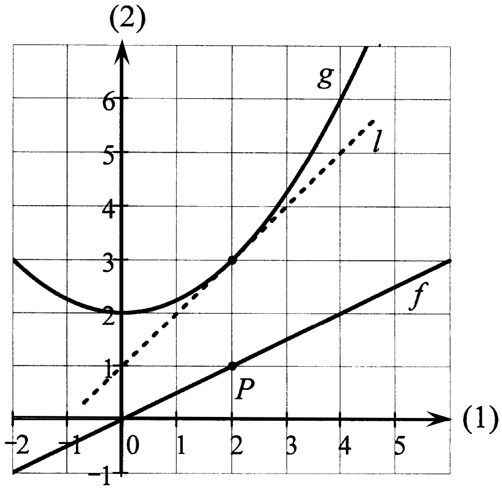
$$\int_0^k (k - x)\,dx - \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$$

mht. k for $k > \frac{5}{4}$ og får

$$k = \underline{\underline{2}}$$

For at finde grænser for integralerne løste vi ligningerne $f(x) = 0$ og $g(x) = 0$. I mange opgaver skal du ikke løse disse ligninger. I stedet skal du måske løse $f(x) = g(x)$. Eller måske fremgår integralets grænser af tekst og figur.

Øvelse 1.1 Uden regneteknisk hjælpemiddel



(a) $g'(4) =$ ____ og $f(4) =$ ____ .

(b) $g'(0) =$ ____ og $f(0) =$ ____ .

(c) Da l's hældningskoefficient er ____ , er

$g'($____$) =$ ____ .

(d) Da P's y-koordinat er ____ , er

$f($____$) =$ ____ .

(e) Når $x = 2$ gælder altså

$g'(x) = f(x)$.

For hvilke af tallene mellem -2 og $4{,}5$ ser det ud til at denne ligning gælder?
Svar: ______________________________ .

Øvelse 1.2 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) Skriv to funktioner hvis differentialkvotient er $2x$. Svar: __________ og __________ .

(b) Skriv to funktioner hvis differentialkvotient er $2x+1$. Svar: __________ og __________ .

Øvelse 1.3 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) At

$F(x)$ er **stamfunktion** til $f(x)$

betyder at

_______ $= f(x)$.

(b) x^3 er stamfunktion til _______ fordi $(\qquad)' =$

(c) x^3+5 er stamfunktion til _______ fordi $(\qquad)' =$

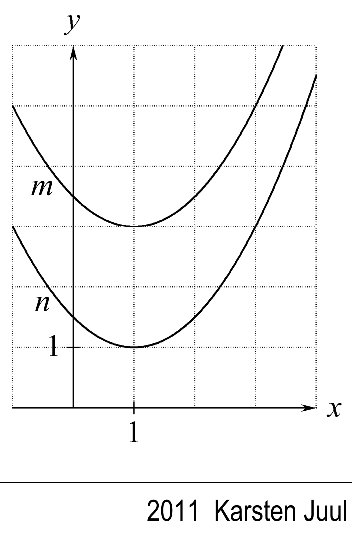
Øvelse 1.4 Uden regneteknisk hjælpemiddel

Gæt en stamfunktion til hver af følgende funktioner, og kontrollér dit gæt ved at differentiere:

$f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ og $h(x) = x^n$.

Du skal IKKE differentiere x^3. Læs spørgsmålet grundigt.

Øvelse 2.1 Uden regneteknisk hjælpemiddel



På figuren har vi tegnet to af stamfunktionerne til en funktion f .

(a) Bestem følgende fire tal:

(1) $m(1) =$

(2) $m(1) - n(1) =$

(3) $m(3) - n(3) =$

(4) $m(5) - n(5) =$

(b) Tegn graferne for to andre stamfunktioner til f .

Øvelse 3.1 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) Stamfunktionerne til ______ er $x^2 + c$.

(b) Stamfunktionerne til -3 er ____________ .

(c) Stamfunktionerne til x^2 er ____________ .

(d) Stamfunktionerne til x^5 er ____________ .

(e) Stamfunktionerne til $x^{1,5}$ er ____________ .

(f) Stamfunktionerne til x^{-2} er ____________ .

(g) Stamfunktionerne til e^x er ____________ .

(h) I intervallet $x > 0$ har $\frac{1}{x}$ stamfunktionerne ____________ .

Øvelse 4.1 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) I intervallet $x > 0$ har ________ stamfunktionerne $5 \cdot \ln(x) + c$.

(b) Stamfunktionerne til $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ er ____________ .

(c) Stamfunktionerne til $9x^2$ er $9 \cdot$ ____________ = ____________ .

(d) Stamfunktionerne til $3x^3$ er $3 \cdot$ ____________ = ____________ .

(e) Stamfunktionerne til $6x^5$ er ____________ = ____________ .

Øvelse 4.2 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) Stamfunktionerne til $\mathrm{e}^x + 1$ er _______________ .

(b) Stamfunktionerne til $x^2 + x$ er _______________ .

(c) Stamfunktionerne til $5 - x^3$ er _______________ .

Øvelse 4.3 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) Stamfunktionerne til $6x^2 - 5\mathrm{e}^x$ er

(b) Stamfunktionerne til $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ er

Øvelse 5.1 Uden regneteknisk hjælpemiddel

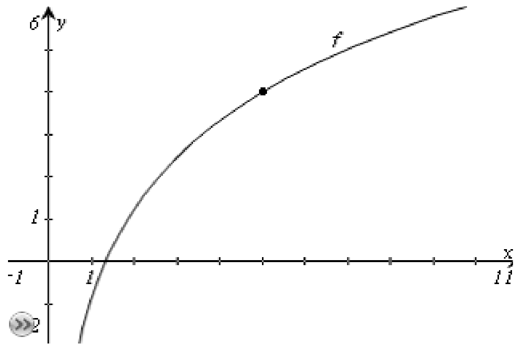
(a) $\int \quad dx = x^3 + c$ (b) $\int (x^2 - 3x + 2)dx =$

Øvelse 6.1

Brug dit regnetekniske hjælpemiddel:

(a) $\int (3x-5)^3 \, dx =$ (b) $x > -\frac{3}{2}$: $\int \frac{5}{2x+3} dx =$

Øvelse 7.1



Figuren viser lommeregnerens skærm. Skærmen viser grafen for funktionen

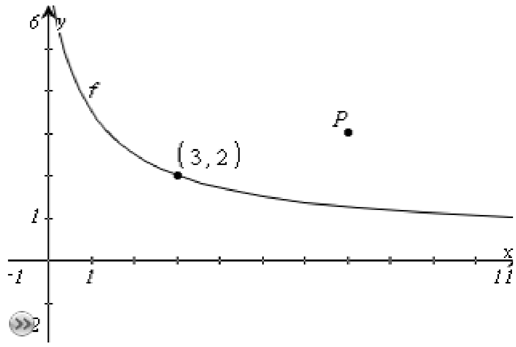
$$f(x) = 3\cdot\ln(x)+c$$

hvor c har fået tildelt en bestemt talværdi.

(a) $3\cdot\ln(5)+c =$ (Aflæs svar på figur)

(b) $c =$

Øvelse 7.2



Figuren viser lommeregnerens skærm.

(a) $f(x) = \dfrac{6}{x+1} + \boxed{}$

(b) Grafen for

$$g(x) = \frac{6}{x+1} + \boxed{}$$

går gennem punktet P .

Øvelse 7.3

(a) På lommeregneren (eller computeren) skal du frembringe et koordinatsysten hvor x-aksen går fra -1 til 11, og y-aksen går fra -2 til 6 .

(b) Få tegnet grafen for funktionen $h(x) = \dfrac{6}{x+1} + c$ når $c=1$.

(c) Afsæt punktet $(4,1)$ i koordinatsystemet.

(d) Prøv dig frem med forskellige værdier af c indtil du kan se på skærmen at grafen går gennem punktet $(4,1)$. $c =$

(e) En sædvanlig opgave går aldrig ud på at du skal prøve dig frem. Det er underforstået at den går ud på at du skal vise hvordan du regner dig frem til resultatet. Tallet c fra spørgsmål (d) kan vi regne os frem til ved at

løse ligningen ____________________ mht. ______ . Løsning: $c =$

(f) Grafen for funktionen $q(x) = \dfrac{6}{x+1} + k$ skærer x-aksen i punktet $(4,0)$. Brug metoden fra (e), til at bestemme k . Du skal selvfølgelig ikke bruge præcis samme ligning som i (e).

Øvelse 7.4 Uden regneteknisk hjælpemiddel

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 + 1 \ .$$

Bestem den stamfunktion F til f som opfylder $F(1) = 0$.

Øvelse 7.5 Uden regneteknisk hjælpemiddel

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 \ .$$

Bestem den stamfunktion F til f hvis graf går gennem punktet $(2,9)$.

Øvelse 7.6

Opgave

F er en stamfunktion til $f(x) = 4x - 3$.

Grafen for F går gennem punktet $(4\,,10)$.

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) =$ ___________ , findes en konstant c så

$F(x) =$ ______________ $+c$

Da grafen for F går gennem punktet $(4\,,10)$, må

______________ $+c$ = ______

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

Vi løser denne ligning mht. c og får $c =$ ______ , så

$F(x) =$ ______________ , $x \in \mathbb{R}$

Øvelse 7.7

Opgave

F er en stamfunktion til $f(x) = x^2 + x$.

Grafen for F går gennem punktet $(-2,\frac{1}{12})$.

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) =$ ___________ , findes en konstant c så

$F(x) =$ ______________ $+c$

Da grafen for F går gennem punktet $(-2,\frac{1}{12})$, må

______________ $+c$ = ______

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

Vi løser denne ligning mht. c og får $c =$ ______ , så

$F(x) =$ ______________ , $x \in \mathbb{R}$

Øvelse 7.8

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3}{x} - 2x \ , \quad x > 0 .$$

Bestem den stamfunktion F til f som opfylder $F(1) = 0$.

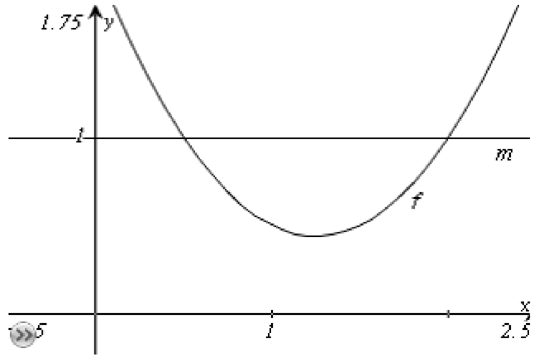
Øvelse 7.9

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 - x$$

Bestem den stamfunktion til f hvis graf går gennem punktet $P(2\,,0)$.

Øvelse 7.10



Figuren viser lommeregnerens skærm.
Skærmen viser linjen

$$m: \quad y = 1$$

og grafen for funktionen

$$f(x) \; = \; x^2 - 2{,}5x + 2$$

(a) Få tegnet det viste udsnit af koordinatsystemet og de to grafer på din grafskærm.

(b) Hvis det sidste 2-tal i forskriften for f erstattes af et større tal, vil grafen så rykkes til venstre, rykkes til højre, rykkes op eller rykkes ned? Svar: ________________________________

(c) Prøv at flytte grafen for f ved at erstatte 2 med forskellige tal indtil du opnår at linjen m er tangent til f-grafen. Du kan selvfølgelig ikke være sikker på at dit svar er helt nøjagtigt.

(d) En "sædvanlig" opgave går aldrig ud på at du skal prøve dig frem. Det er underforstået at den går ud på at du skal vise hvordan du regner dig frem til resultatet. De følgende spørgsmål går ud på at du skal regne dig frem til hvad c er for et tal hvis m er tangent til grafen for funktionen $f(x) \; = \; x^2 - 2{,}5x + c$.

(d1) $f'(x) \; =$ ______________

(d2) Når $c = 1{,}5$ er antallet af fællespunkter for m og f-graf lig ______ .

(d3) Når m er tangent til f-graf, er antal fællespunkter mellem m og f-graf lig ______ .

(d4) Vis på figuren hvordan f-grafen ligger når m er tangent, og markér røringspunktet.

(d5) Hældningskoefficienten for m er ________ .

(d6) På forhånd ved vi at hvis vi indsætter røringspunktets x-koordinat for x i $2x - 2{,}5$ og udregner udtrykket, så får vi ______ .

(d7) For at finde røringspunktets x-koordinat løser vi ligningen ____________________ mht. ______ og får ________ .

(d8) Da røringspunktet ligger på linjen med ligningen ___________ , er dets y-koordinat ______ .

(d9) Vi bruger røringspunktets koordinater og f-forskriften til at skrive ligningen
__________ $-$ __________ $+ \; c \; =$ ______ .

(d10) Vi løser denne ligning og får $c \; =$ ______________ .

Øvelse 7.11

En funktion f er bestemt ved $f(x) \; = \; 2x - 1$.

Stamfunktionerne til f er funktionerne $F(x) \; =$ ___________ $+ \; c$.

Bestem den stamfunktion til f hvis graf har førsteaksen som tangent.

Øvelse 7.12

En funktion f er bestemt ved $f(x) = 4x - 8$.

Bestem den stamfunktion F til f hvis graf har linjen med ligningen $y = 3$ som tangent.

Øvelse 7.13

(a) På din grafskærm skal du (i et passende udsnit af koordinatsystemet) få tegnet linjen

$$m\colon \quad y = 2x - 3$$

og grafen for funktionen

$$g(x) = -x^2 + 6x + c$$

når $c = -6$ og når $c = -9$.
Skitsér resultatet til højre.

(b) Prøv dig frem med forskellige værdier af c indtil du opnår at linjen m er tangent til g-grafen.
m er tangent når c = ________ .

(c) En "sædvanlig" opgave går aldrig ud på at du skal prøve dig frem. Det er underforstået at den går ud på at du skal vise hvordan du regner dig frem til resultatet. De følgende spørgsmål går ud på at du skal regne dig frem til hvad c er for et tal hvis m er tangent til grafen for funktionen $g(x) = -x^2 + 6x + c$.

(c1) $g'(x)$ = ______________

(c2) Når $c = -6$ er antallet af fællespunkter for m og g-graf lig ______ .

(c3) Når m er tangent til g-graf, er antal fællespunkter mellem m og g-graf lig ______ .

(c4) Vis på figuren hvordan g-grafen ligger når m er tangent, og markér røringspunktet.

(c5) Hældningskoefficienten for m er ________ .

(c6) På forhånd ved vi at hvis vi indsætter røringspunktets x-koordinat for x i $-2x+6$ og udregner udtrykket, så får vi ______ .

(c7) For at finde røringspunktets x-koordinat løser vi ligningen ____________________
mht. ______ og får ________ .

(d8) Da vi nu kender røringspunktets x-koordinat og ved at det ligger på linjen med ligningen ___________ , kan vi udregne at dets y-koordinat er ______ .

(d9) Vi bruger røringspunktets koordinater og g-forskriften til at skrive ligningen
__________ + __________ + c = ______ .

(c10) Vi løser denne ligning og får c = ______________ .

Øvelse 7.14

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -2x \ .$$

Bestem den stamfunktion F til f hvis graf har linjen med ligningen $y = 4x$ som tangent.

Øvelse 7.15

En funktion f er bestemt ved $f(x) = 2x - 6$.

(a) Bestem den stamfunktion F til f hvis graf har linjen med ligningen $y = 2$ som tangent.

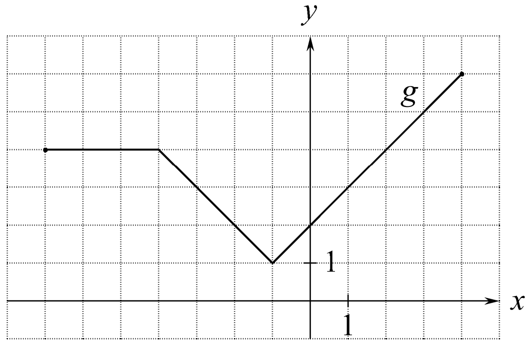
(b) Bestem den stamfunktion G til f hvis graf har linjen med ligningen $y = 2x$ som tangent.

Øvelse 8.1

A er arealfunktionen for funktionen g .

$A(-4)$ = ________ $A(2)$ = ________

$A(-7)$ = ________



Øvelse 8.2

A er arealfunktionen for funktionen h .

x	0	1	2	3	4	5
$A(x)$						

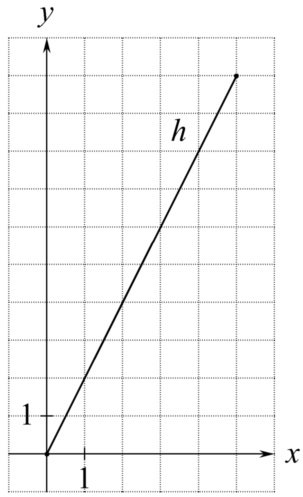
← Aflæs på figur.

$A(x)$ = ____________ ← Gæt x-udtryk ud fra tabel. $A'(x)$ = ____________

x	0	1	2	3	4	5
$A'(x)$						
$h(x)$						

← Aflæs på figur.

$h(x)$ = ____________ som er lig forskriften for _________ .



Øvelse 8.3

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen f .

(a) Linjen l bevæger sig mod højre. t sekunder efter start vil l være t enheder fra y-aksen.
På tidspunktet $t = 5$ skærer l f-grafen i punktet $($, $)$.

(b) Se på arealet mellem f-graf og x-akse.
$A(t)$ er den del af dette areal som ligger mellem y-akse og l . $A(5)$ = ________

(c) I tidsrummet fra $t = 7$ til $t = 7{,}1$ bliver arealet ________ enheder større.

(d) I dette tidsrum er væksthastighed for arealet $A(t)$ altså ________ enheder pr. sekund.
$A'(7)$ = ________

(e) I tidsrummet fra $t = 1$ til $t = 1{,}01$ bliver arealet ________ enheder større.
I dette tidsrum er væksthastighed for arealet $A(t)$ altså ________ enheder pr. sekund.
$A'(1)$ = ________

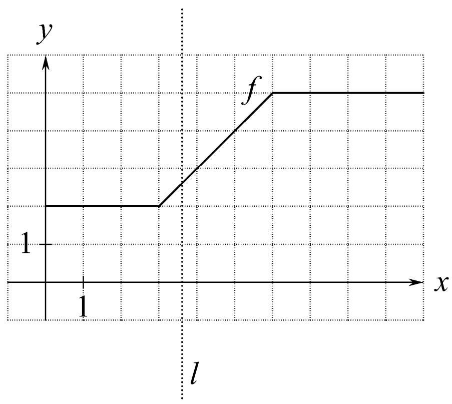
(f) $A'(4)$ = ________

(g) $f(7)$ = ________
Er $A'(7) = f(7)$? Svar: _________

(h) Er $A'(1) = f(1)$? Svar: _________

(i) Er $A'(4) = f(4)$? Svar: _________

(j) For hvilke tal t mellem 0 og 10 er $A'(t) = f(t)$?
Svar: _____________



Øvelse 9.1

$$f(x) = x^2 + 4x \ , \quad 2 \le x \le 5 \, .$$

$A(x)$ er arealfunktionen for f .

$$A'(x) = \underline{\qquad + \qquad}$$

Øvelse 9.2

$$g(x) = 8 + \tfrac{1}{x} \ , \quad 1 \le x \, .$$

Én af følgende funktioner er arealfunktionen for f . Hvilken?

$$p(x) = 8x + \ln(x) - 8 \qquad q(x) = 1 - \tfrac{1}{x^2} \qquad r(x) = \ln(x)$$

Øvelse 9.3

Hvis A er arealfunktion for $f(x) = (2x-4)^3$, $0 \le x$, vil $A'(x) = \underline{\qquad\qquad}$.

Øvelse 10.1

x	–4	–2	0	2	4
$F(x)$	0	1	3	7	10

F er en stamfunktion til f .

(a) $\int_0^4 f(x)\,dx = F(\quad) - F(\quad) = \qquad\qquad =$

(b) $\int_{-2}^2 f(x)\,dx =$

Øvelse 11.1

x	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$F(x)$	6,2	7,8	9,0	9,9	10,3

(a) $\left[F(x)\right]_{2,0}^{3,5} = F(\qquad) - F(\qquad) = \qquad\qquad =$

(b) $\left[F(x)\right]_{2,5}^{3,5} =$

(c) $\left[4x^2\right]_{-1}^{2} =$

(d) $\left[x^2 - x\right]_2^3 =$

Øvelse 11.2

Her skal stå en stamfunktion til $4x^3$.

(a) $\int_1^2 (4x^3)\,dx = [\qquad\quad]_1^2 =$

(b) $\int_1^2 (\tfrac{1}{x} + 3)\,dx = [\qquad\qquad\qquad]_1^2 =$

(c) $\int_0^1 (3x^2 + e^x)\,dx =$

Øvelse 11.3 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) $\int_1^2 (2x - \frac{1}{x})\, dx =$

(b) $\int_0^1 6e^x\, dx =$

(c) $\int_0^1 (x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4})\, dx =$

Øvelse 11.4 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) $\int_0^2 (3 - e^x)\, dx =$

(b) $\int_1^2 x^{-2}\, dx =$

(c) $\int_0^1 (6x^2 + 4x - 1)\, dx =$

Øvelse 11.5 Uden regneteknisk hjælpemiddel

(a) $\int_{-1}^0 e^x\, dx =$

(b) $\int_0^1 (2x^3 + x)\, dx =$

Øvelse 11.6

Brug dit regnetekniske hjælpemiddel til at udregne følgende to tal:

(1) $\int_0^{0{,}92} 8{,}5 \cdot 1{,}24^x\, dx =$

(2) $\int_4^{12} \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\, dx =$

Øvelse 11.7

(1) $\int_1^{\sqrt{e}} x \cdot \ln(x)\, dx =$

Øvelse 12.1 Uden regneteknisk hjælpemiddel

Bestem integralet $\int_{-2}^2 x^2\, dx$, og giv en geometrisk fortolkning af resultatet.

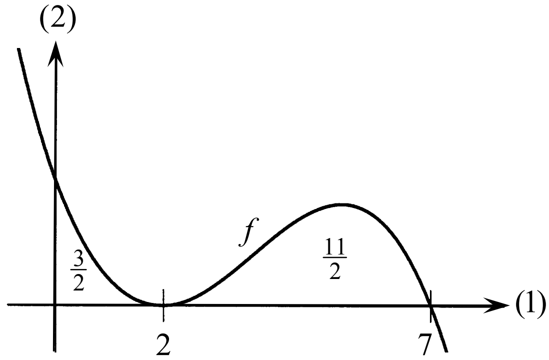
Øvelse 12.2 Uden regneteknisk hjælpemiddel

Bestem integralet $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$, og giv en geometrisk fortolkning af resultatet.

Øvelse 12.3 Uden regneteknisk hjælpemiddel

Bestem integralet $\int_{-1}^0 (x^2 - 2x)\, dx$ og giv en geometrisk tolkning af resultatet.

Øvelse 13.1

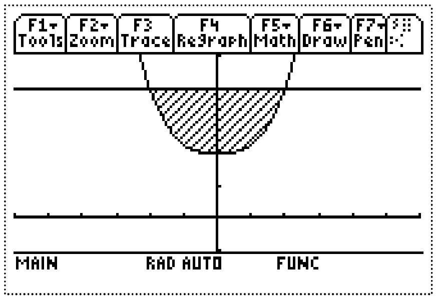


Figuren viser grafen for en funktion f der har nulpunkterne 2 og 7. Sammen med akserne afgrænser grafen to områder hvis arealer er hhv. $\frac{3}{2}$ og $\frac{11}{2}$.

$\int_2^7 f(x)dx =$

$\int_0^7 f(x)dx =$

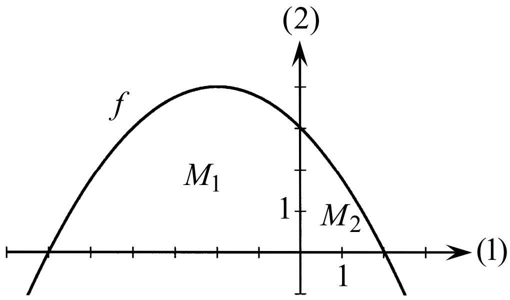
Øvelse 13.2



Grafregnervinduet til højre viser grafen for en funktion f og en linje l der skærer grafen i punkterne $(-2, 4)$ og $(2, 4)$ Grafen for f afgrænser sammen med linjen l den skraverede punktmængde der har arealet 6.

$\int_{-2}^2 f(x)dx =$

Øvelse 13.3

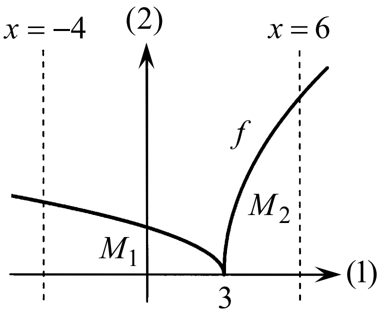


Figur til højre viser grafen for en funktion f hvis nulpunkter er -6 og 2. Grafen afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde der har arealet $\frac{64}{3}$. Andenaksen deler denne punktmængde i to punktmængder M_1 og M_2.

Der gælder at $\int_0^2 f(x)dx = \frac{10}{3}$.

$\int_{-6}^0 f(x)dx =$

Øvelse 13.4



Figuren til højre viser grafen for en funktion f der har nulpunktet 3. Desuden ses to punktmængder M_1 og M_2 , hvor M_1 har arealet $\frac{40}{3}$ og afgrænses af grafen, førsteaksen og linjen med ligningen $x=-4$, og M_2 har arealet 14 og afgrænses af grafen, førsteaksen og linjen med ligningen $x=6$.

$\int_3^6 f(x)\,dx =$

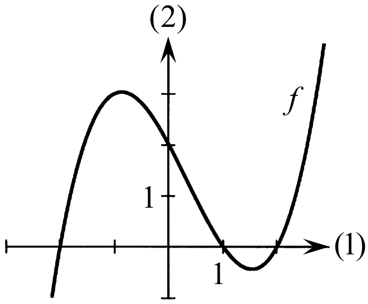
$\int_{-4}^6 f(x)\,dx =$

Øvelse 14.1

Figuren til højre viser grafen for funktionen

$$f(x)=\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x^2-2x+2\,.$$

Grafen skærer førsteaksen i punkterne $P(-2,0)$, $Q(1,0)$ og $R(2,0)$. I første og anden kvadrant afgrænser grafen for funktionen sammen med førsteaksen en punktmængde M som har et areal.



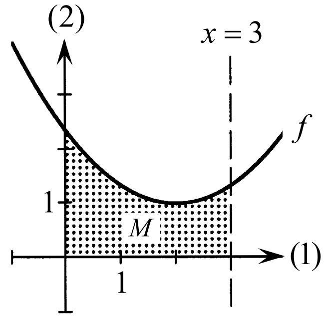
Bestem arealet af M.

Øvelse 14.2

En funktion er givet ved

$$f(x)=\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{7}{3}\;.$$

En punktmængde M begrænses af grafen, førsteaksen, andenaksen og linjen med ligningen $x=3$ (se figuren til højre).



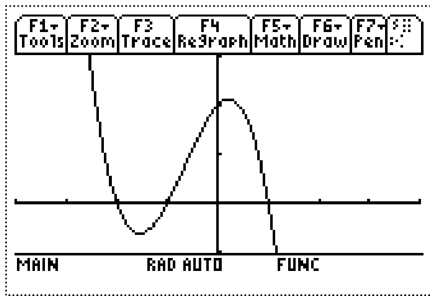
Bestem arealet af M.

Øvelse 14.3

Funktionen $f(x)$ er bestemt ved

$$f(x)=-x^3-2x^2+x+2\;.$$

På figuren til højre ser vi grafen for $f(x)$. Grafen skærer førsteaksen i punkterne $P(-2,0)$, $Q(-1,0)$ og $R(1,0)$. Sammen med førsteaksen afgrænser grafen i første og anden kvadrant en punktmængde M som har et areal.



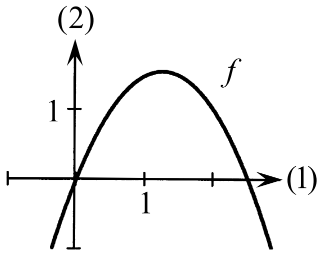
Bestem arealet af denne punktmængde.

Øvelse 14.4

Figuren til højre viser grafen for funktionen

$$f(x)=\tfrac{5}{2}x-x^2\;.$$

Grafen og førsteaksen afgrænser en punktmængde M som har et areal.



Bestem arealet af M.

Øvelse 14.5

Grafen for funktionen $f(x)=4x-x^3$ afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant en punktmængde M som har et areal.

På din grafskærm skal du (i et passende udsnit af koordinatsystemet) få tegnet grafen for f.

(a) Skitsér grafen til højre og skravér M.

(b) Bestem arealet af M.

Øvelse 14.6

Grafen for $f(x)=\frac{1}{2}x^3+4$ afgrænser sammen med førsteaksen og andenaksen i anden kvadrant en punktmængde M der har et areal.

(a) Skitsér grafen til højre, og skravér M .

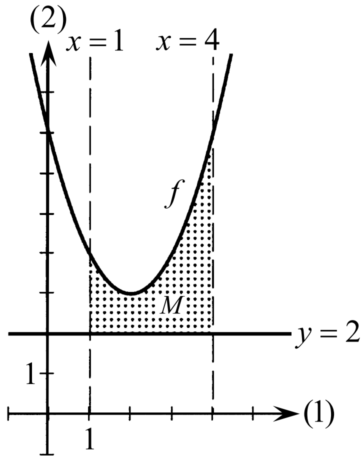
(b) Bestem arealet af M .

Øvelse 14.7

Grafen for funktionen $f(x)=\frac{4}{9}-x^2$ afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M der har et areal.

Bestem arealet af M .

Øvelse 15.1



Grafen for funktion

$$f(x)=x^2-4x+7$$

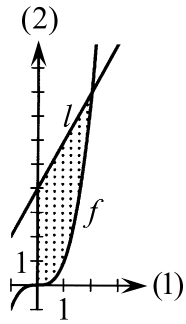
afgrænser sammen med linjerne med ligningerne

$$x=1\ ,\quad x=4\quad \text{og}\quad y=2$$

en punktmængde M som har et areal (se figur til højre).

Bestem arealet af M .

Øvelse 15.2



Figuren til højre viser grafen for funktionen $f(x)=x^3$ og linjen l med ligningen $y=2x+4$. Grafen og linjen skærer hinanden i punktet $(2\,,8)$. Grafen og linjen afgrænser sammen med andenaksen en punktmængde der har et areal.

Bestem arealet af denne punktmængde.

Øvelse 15.3

Grafen for $f(x)=-x^2+2x+4$ afgrænser sammen med linjen m med ligningen $y=2+x$ en punktmængde M som har et areal.

På din grafskærm skal du (i et passende udsnit af koordinatsystemet) få tegnet grafen for f og linjen m .

(a) Skitsér grafen og linjen til højre, og skravér M .

(b) Bestem arealet af M .

Øvelse 15.4

Grafen for $f(x) = 3 - x^2$ afgrænser sammen med linjen med ligningen $y = -x + 3$ en punktmængde M som har et areal.

(a) Skitsér grafen og linjen til højre, og skravér M .

(b) Bestem arealet af M .

Øvelse 15.5

En funktion $f(x)$ er bestemt ved $f(x) = x^2$.

En ret linje l skærer grafen for $f(x)$ i punkterne $S_1(-3, 9)$ og $S_2(2, 4)$. Grafen for $f(x)$ afgrænser sammen med linjen l en punktmængde M som har et areal.

(a) Skitsér grafen og linjen til højre, og skravér M .

(b) Bestem arealet af M .

Øvelse 15.6

Grafen for funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 3$ afgrænser sammen med linjen med ligningen $y = 3$ et område der har et areal.

Bestem arealet.

Øvelse 15.7

Grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = \mathrm{e}^x$ afgrænser sammen med linjerne med ligninger

$y = x$, $x = 0$ og $x = 1$ et område der har et areal.

Bestem dette areal.

Øvelse 15.8

Grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = \frac{1}{x}$ afgrænser sammen med linjerne med ligninger

$y = 2x$ og $x = 2$ et område der har et areal.

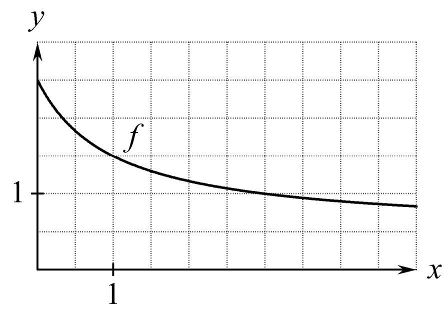
Bestem arealet.

Øvelse 16.1

De to figurer viser begge grafen for funktionen

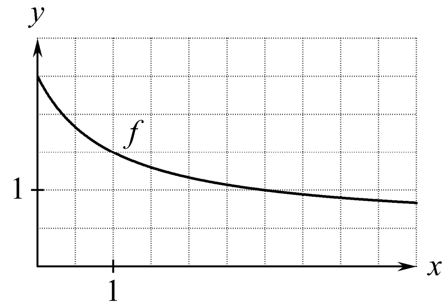
$$f(x) = \frac{5+x}{2x+2}$$

I første kvadrant ligger en punktmængde M som har et areal. M afgrænses af grafen for f, koordinatsystemets akser og linjen med ligningen $x = k$, hvor $k > 0$.



(a) I det øverste af de to koordinatsystemer skal du tegne linjen med ligningen $x = k$ når $k = 2$.

(b) I det øverste af de to koordinatsystemer skal du skravere punktmængde M når $k = 2$.



(c) I det nederste af de to koordinatsystemer skal du skravere punktmængde M når $k = 3{,}5$.

(d) Bestem arealet af M når $k = 1{,}56$.

(e) Bestem k så arealet af M er 4,07.

(f) Vi kan bestemme k så arealet af M er 3 ved at løse følgende ligning:

$$=$$

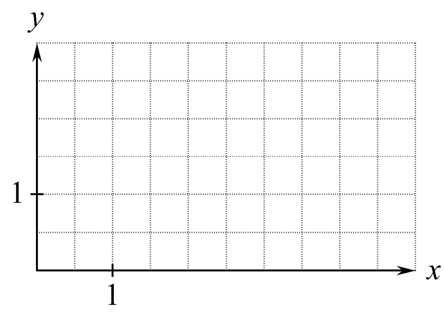
(f) Bestem k så arealet af M er 3.

Øvelse 16.2

En funktion er givet ved

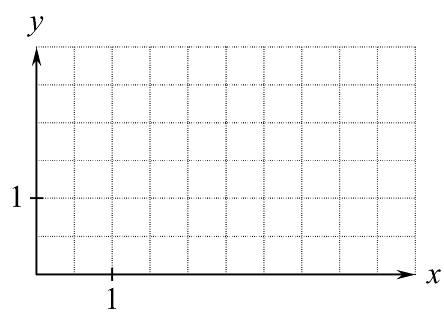
$$f(x) = \sqrt{x+k}$$

hvor $k > 0$.



Vi ser på området mellem f-grafen og x-aksen. M er den del af dette område som ligger mellem linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = 3$.

(a) I det øverste af de to koordinatsystemer skal du skravere området M når $k = 5$. (Tegn først graf og linjer).



(b) I det nederste af de to koordinatsystemer skal du skravere punktmængden M når $k = 0{,}1$.

(c) Bestem arealet af M når $k = 0{,}1$.

(d) Vi kan bestemme k så arealet af M er 4,22 ved at løse følgende ligning

$$=$$

(e) Bestem k så arealet af M er 4,22.

Øvelse 16.3

En funktion f er givet ved

$$f(x) = k^2 - x^2$$

hvor $k > 0$. I første og anden kvadrant afgrænser grafen for f og x-aksen en punktmængde M der har et areal.

(a) Ligningen $k^2 - x^2 = 0$ har løsningerne
$x =$ ______ og $x =$ ______ .

(b) Grafen for f skærer x-aksen i to punkter.
Disses x-koordinater er ______ og ______ .

(c) I det øverste af de to koordinatsystemer skal du skravere M når $k = 2$.

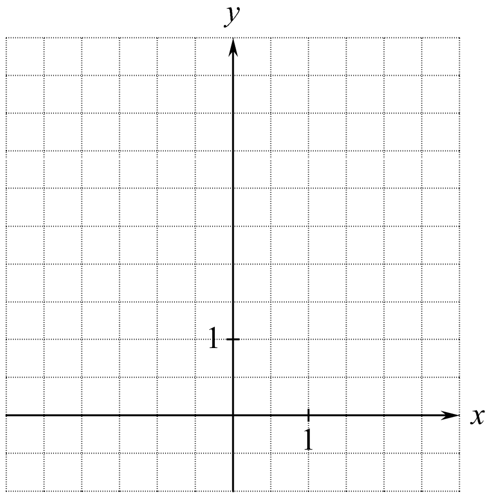
(d) Bestem arealet af M når $k = 2$.

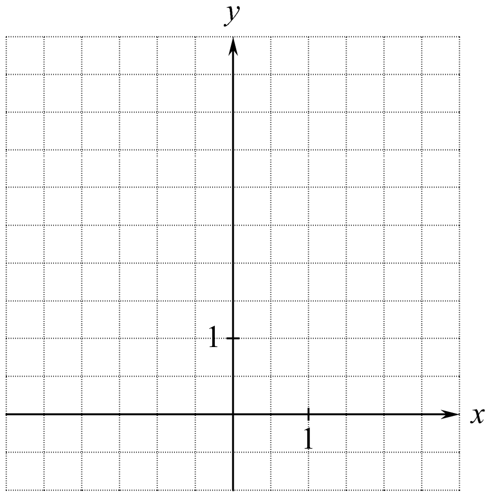
(e) I det nederste af de to koordinatsystemer skal du skravere M når $k = 1$.

(f) Vi kan bestemme k så arealet af M er 5 ved at løse ligningen

$$=$$

(g) Bestem k så arealet af M er 5.





Øvelse 16.4

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \left(\tfrac{3}{5}\right)^x \quad \text{og} \quad g(x) = kx + 1 \text{ , hvor } k > 0 .$$

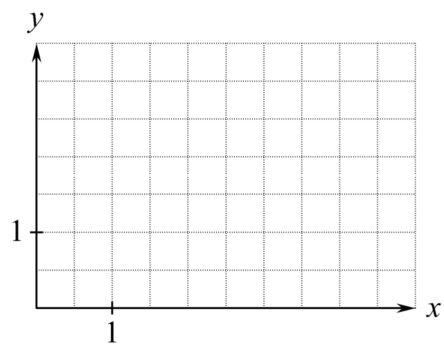
Linjen l har ligningen $x = 4$.
Graferne for f og g afgrænser sammen l en punktmængde M der har et areal.

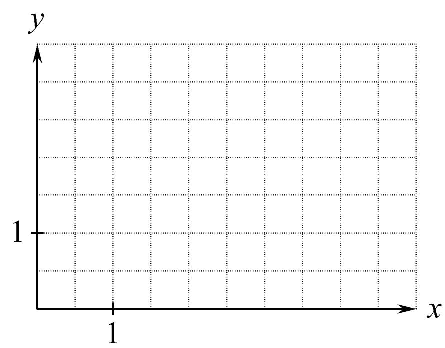
(a) I det øverste af de to koordinatsystemer skal du tegne graferne for f og g når $k = 0{,}5$.
Desuden skal du tegne linjen l og skravere M.

(b) I det nederste af de to koordinatsystemer skal du tegne og skravere M når $k = 0{,}25$.

(c) Bestem arealet af M når $k = 0{,}5$.

(d) Bestem k så arealet af M er 3,5.





Stikordsregister

A

areal mellem graf og x-akse 10
areal mellem to grafer 11
arealfunktion 6, 7

B

bestemt integral 7
bestemt integral på Nspire 8
bestemt integral uden hjælpemidler 8

I

integral 4, 7
integral og areal 7
integral på Nspire 4, 8
integral, arealer givet 9
integral, fortolke 8
integrand 4, 7
integrere 4

K

kvadrant 10

S

stamfunktion 1, 7
stamfunktion på Nspire 4
stamfunktion til $f(x)+g(x)$ 3
stamfunktion til $f(x)-g(x)$ 3
stamfunktion til $k \cdot f(x)$ 3
stamfunktion til én delt med x 2
stamfunktion til e^x 2
stamfunktion til konstant 2
stamfunktion til potensfunktion 2
stamfunktion, grafpunkt givet 5
stamfunktion, symbol for 4
stamfunktion, tangent givet 5

U

ubestemt integral 4, 7
ubestemt integral på Nspire 4