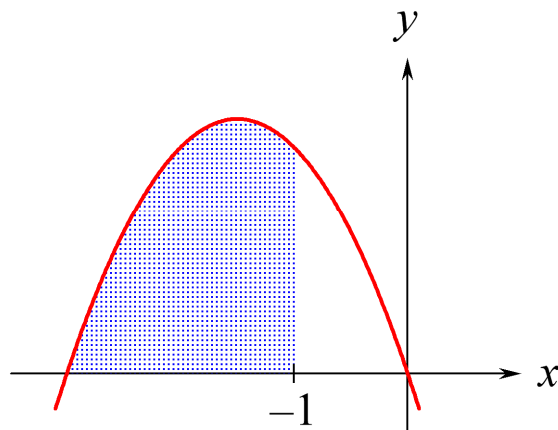


Integralregning

for B-niveau i stx



2013 Karsten Juul

Stikordsregister

A

areal	5, 7, 9
areal mellem to grafer	8, 9
arealfunktion	4, 6

B

bestemt integral	5
bestemt integral med Nspire	5
bestemt integral uden hjælpemidler	5

F

fortolk integral.....	6
-----------------------	---

I

integrere	2
-----------------	---

K

kvadrant	7
----------------	---

S

stamfunktion	1, 2
stamfunktion med Nspire.....	2
stamfunktion uden hjælpemidler	3
stamfunktion, grafpunkt givet.....	4

U

ubestemt integral.....	2, 3, 5
------------------------	---------

Indholdsfortegnelse

1. Hvad er en stamfunktion	1
2. Undersøg om $g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$	1
3. Gør rede for at $g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$	1
4. En funktion har mange stamfunktioner	2
5. Symbol for stamfunktion	2
6. Bestem stamfunktion med Nspire	2
7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler	3
8. Bestem $\int f(x) dx$	3
9. Find en bestemt af stamfunktionerne	4
10. Hvad er en arealfunktion?	4
11. Vigtig regel om arealfunktioner	4
12. Hvad er det bestemte integral	5
13. Udregn $\int_a^b f(x) dx$ med Nspire	5
14. Udregn $\int_a^b f(x) dx$ uden hjælpemidler	5
15. Regel om bestemt integral og areal	5
16. Bevis for regel om bestemt integral og areal	6
17. Fortolk integral	6
18. Kvadrant	6
19. Areal mellem graf og x -akse, 1. eksempel	7
20. Areal mellem graf og x -akse, 2. eksempel	8
21. Areal mellem to grafer, 1. eksempel	8
22. Areal mellem to grafer, 2. eksempel	9
23. Areal mellem to grafer, 3. eksempel	9
24. Bestem k så arealet af M er lig et tal der er oplyst	10

1. Hvad er en stamfunktion?

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$$g'(x) = f(x)$$

2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

Opgave

Undersøg om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

Besvarelse

For at undersøge om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (4x)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 4 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 4 = x^2 + 4 \neq f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret ikke giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er ikke en stamfunktion til $f(x)$

3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

Opgave

Gør rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

Besvarelse

For at gøre rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 4\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 4' = \frac{1}{3}(x^3)' + 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

4. En funktion har mange stamfunktioner.

En funktion har mange stamfunktioner, da en konstant differentieret giver nul:

$$\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right)' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + 5\right)' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

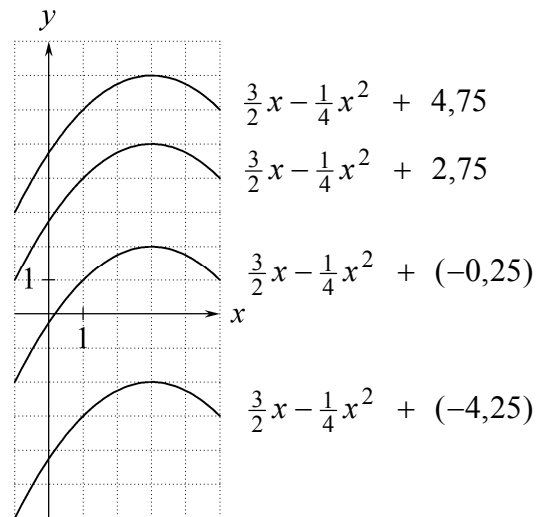
$$\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + 8\right)' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + c$ er stamfunktion til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$

uanset hvilket tal vi skriver i stedet for c .

Når vi ændrer på c , forskyder vi grafen op eller ned.

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$.



4.1 Sætning Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$, så er funktionerne $h(x) + k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

4.2 Sætning Hvis $h(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så vil stamfunktionerne til $f(x)$ være de funktioner hvis graf vi kan få ved at rykke $h(x)$ -grafene op eller ned.

5. Symbol for stamfunktion.

Symbolet $\int f(x) dx$

betyder: stamfunktionerne til $f(x)$

og læses: det ubestemte integral af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x) dx$ er lig, så siger vi at vi integrerer $f(x)$

Eksempel: $\int (2x+1) dx = x^2 + x + c$

6. Bestem stamfunktion med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int \square d\square$

Nspire skriver kun én af stamfunktionerne: $\int (7^x) dx = \frac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+ c$.

For at finde stamfunktion til $f(x) = 3x - \frac{2}{x}$, $x > 0$

skal vi angive at $x > 0$:

$$\int \left(3x - \frac{2}{x}\right) dx \Big|_{x>0} = \frac{3 \cdot x^2}{2} - 2 \cdot \ln(x)$$

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.

k	har stamfunktionen	$k \cdot x$	når k er en konstant	f.eks.	6	har stamfunktionerne	$6x + c$
x	har stamfunktionerne	$\frac{1}{2}x^2 + c$					
x^a	har stamfunktionen	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$		f.eks.	x^3	har stamfunktionerne	$\frac{1}{4}x^4 + c$
				MEN	4^x	har IKKE stamfunktionen	$\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

x^{-1}	har stamfunktionerne	$\ln(x) + c$	i intervallet	$x > 0$			
$\frac{1}{x}$	har stamfunktionerne	$\ln(x) + c$	i intervallet	$x > 0$	MEN	$\frac{1}{2-x}$	har IKKE stamfunktionen $\ln(2-x)$
e^x	har stamfunktionerne	$e^x + c$					

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
 så: $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$

f.eks. $12x^3$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c$ dvs. $3x^4 + c$

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
 $g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x) + g(x)$ har stamfunktionen $F(x) + G(x)$
 $f(x) - g(x)$ har stamfunktionen $F(x) - G(x)$

f.eks. $6 - e^x$ har stamfunktionerne $6x - e^x + c$

f.eks. $x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

Advarsel: Man kan **IKKE** integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde), f.eks.

$x^3 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot e^x$

$\frac{x^3}{e^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{\frac{1}{4}x^4}{e^x}$

$5 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot e^x$

8. Bestem $\int f(x) dx$.

Opgave

Bestem $\int 6x^2 dx$.

Besvarelse

$$\int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + c = 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 + c = \underline{\underline{2x^3 + c}}$$

9. Find en bestemt af stamfunktionerne.

Opgave (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan:

$$F(-1) = -6.$$

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3(-1) + c = -6$$

så $c = -4$, dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Når vi indsætter et grafpunkts x -koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y -koordinat.

10. Hvad er en arealfunktion?

Den viste graf er på en skærm.

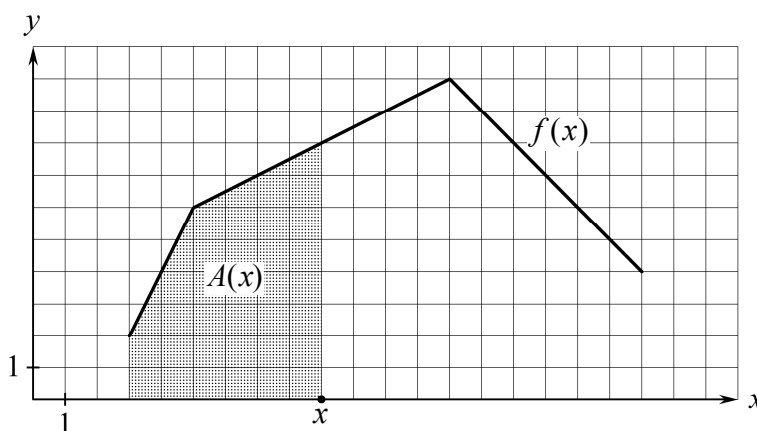
Når vi trækker x -prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes arealfunktionen for f .

På billedet ser vi at

$$A(9) = 36 \quad \text{og} \quad A(11) = 53.$$



11. Vigtig regel om arealfunktioner.

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$

så gælder at

$A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

dvs.

$$A'(x) = f(x)$$

Betyder at grafen ligger på eller over x -aksen.

12. Hvad er det bestemte integral.

Det bestemte integral fra a til b af $f(x)$ er tallet

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Det bestemte integral er et tal.

Det ubestemte integral er funktioner.

13. Udregn $\int_a^b f(x) dx$ med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int (\square) d\square$.

Eksempel

$$\int_{-1}^4 (6x^2 - 5) dx = 105 \quad \text{udregnet med Nspire}$$

Husk at skrive dette!

14. Udregn $\int_a^b f(x) dx$ uden hjælpemidler.

Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $[F(x)]_a^b$ som betyder $F(b) - F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (6x^2 - 5) dx &= [2x^3 - 5x]_{-1}^4 \\ &= (2 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4) - (2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)) \\ &= 105 \end{aligned}$$

15. Regel om bestemt integral og areal.

Sætning om bestemt integral og areal

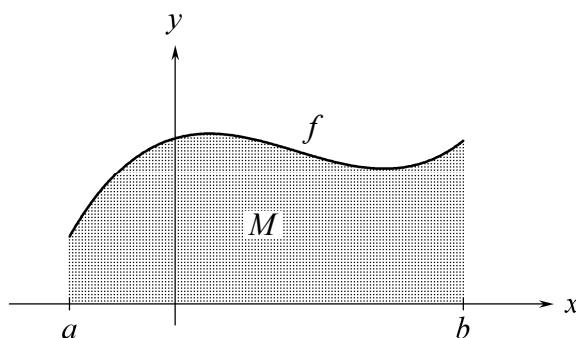
Hvis

$f(x) \geq 0$ for $a \leq x \leq b$ og

M er området mellem f -grafens og x -aksens
i intervallet $a \leq x \leq b$

så gælder

$$\int_a^b f(x) dx = \text{arealet af } M$$



16. Bevis for regel om bestemt integral og areal.

Bevis

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$.

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$$(*) \quad A(x) = F(x) + c.$$

Nu fås

$$\text{areal af } M = A(b)$$

$$= A(b) - A(a)$$

$$= (F(b) + k) - (F(a) + k)$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

Ifølge definitionen på arealfunktion.

Da $A(a) = 0$.

Ifølge (*).

Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed har vi bevist reglen i ramme 15.

17. Fortolk integral.

I en opgave er $f(x) = -3x - x^2$

Vi har udregnet at $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{7}{6}$

Vi skal give en **fortolkning** af dette tal.

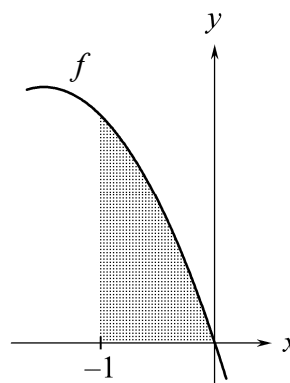
Svar på dette spørgsmål:

Da $f(x) \geq 0$ for $-1 \leq x \leq 0$, gælder:

$\int_{-1}^0 f(x) dx$ er arealet mellem f -graf og x -aksen i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

så $\frac{7}{6}$ er arealet mellem f -graf og x -akse i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

dvs. $\frac{7}{6}$ er arealet af det grå område .

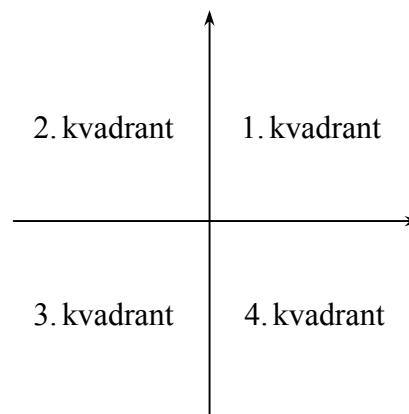


18. Kvadrant.

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer, kan der stå ordet **kvadrant**.

Koordinatakserne deler planen op i fire kvadranter.

Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



19. Areal mellem graf og x-akse, 1. eksempel.

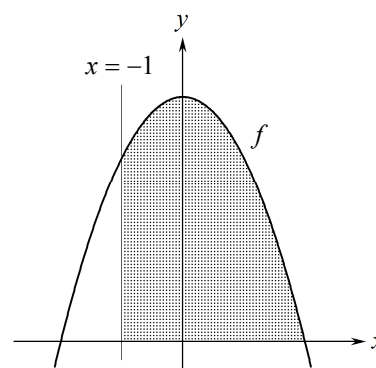
Opgave

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - x^2$$

og linjen med ligningen $x = -1$. Grafen for f skærer x -aksen i punkterne $(-2, 0)$ og $(2, 0)$.

Bestem arealet af det grå område.



Besvarelse

Det grå område er

området mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $-1 \leq x \leq 2$.

Da $f(x) \geq 0$ i dette interval, er arealet

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2 \\ &= \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(4 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right) \\ &= 8 - \frac{8}{3} - \left(-4 + \frac{1}{3} \right) \\ &= 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Arealet af det grå område er 9.

20. Areal mellem graf og x -akse, 2. eksempel.

Opgave

En funktion f har forskriften $f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$.

Bestem arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinataksene.

Besvarelse

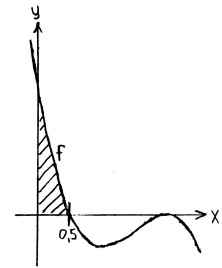
Det søgte areal er skraveret på skitsen (fra Nspire). På skitsen ser vi at vi skal bruge x -koordinaten til det venstre af de to fællespunkter mellem grafen og x -aksen, så vi får Nspire til at løse ligningen

$$-x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2 = 0 \quad \text{mht. } x \text{ og får } x = 0,5 \text{ eller } x = 2.$$

Det søgte areal er altså arealet mellem f -graf og x -akse i intervallet $0 \leq x \leq 0,5$, dvs.

$$\int_0^{0,5} (-x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2) dx = 0,421875 \quad \text{udregnet med Nspire}$$

Arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinataksene, er 0,422.

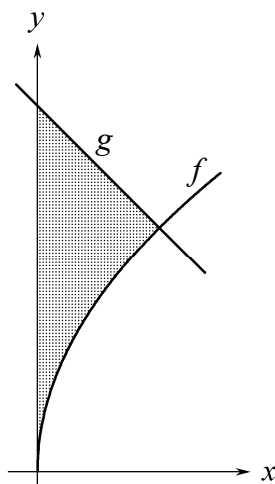


21. Areal mellem to grafer, 1. eksempel.

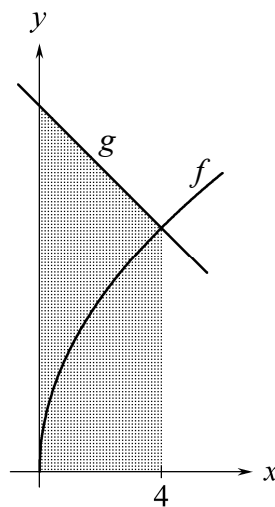
I nogle opgaver skal et areal udregnes ved at udregne to arealer og trække det ene fra det andet.

Vi har tegnet graferne for funktionerne $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x}$ og $g(x) = 12 - x$

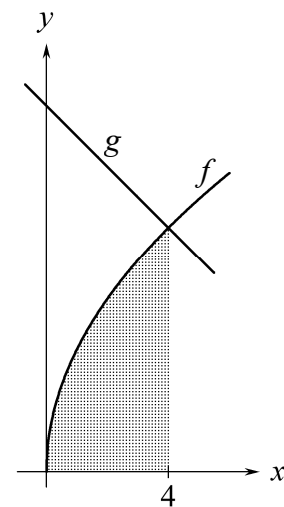
Vi vil udregne arealet af det grå område V på venstre figur.



V



M



H

Vi løser ligningen $4 \cdot \sqrt{x} = 12 - x$ og får $x = 4$, så grafernes skæringspunkt har x -koordinat 4.

Det grå område M på midterste figur har arealet $\int_0^4 (12 - x) dx = 40$ udregnet med Nspire

Det grå område H på højre figur har arealet $\int_0^4 4 \cdot \sqrt{x} dx = \frac{64}{3}$ udregnet med Nspire

Hvis vi fjerner H fra M , får vi V , så arealet af V er $40 - \frac{64}{3} = \frac{56}{3}$

22. Areal mellem to grafer, 2. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0,1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g .

Besvarelse

For at finde x -koordinater til skæringspunkter mellem grafer lader vi Nspire løse ligningen $-\frac{1}{4}x^2 + 2x = -0,1x + 2$ og får $x = 1,09517$ eller $x = 7,30483$.

Se figur nedenfor til venstre.

areal mellem f -graf og g -graf =

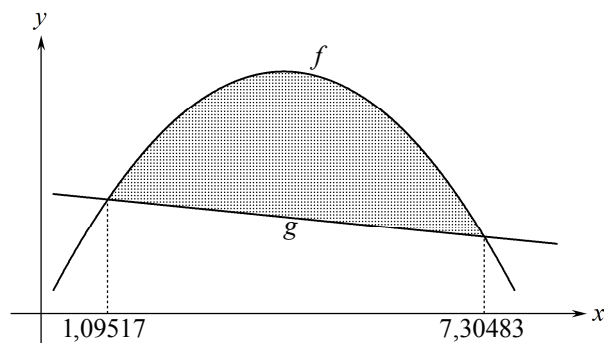
(areal mellem f -graf og x -akse) – (areal mellem g -graf og x -akse) =

$$\int_{1,09517}^{7,30483} \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x\right) dx - \int_{1,09517}^{7,30483} (-0,1x + 2) dx =$$

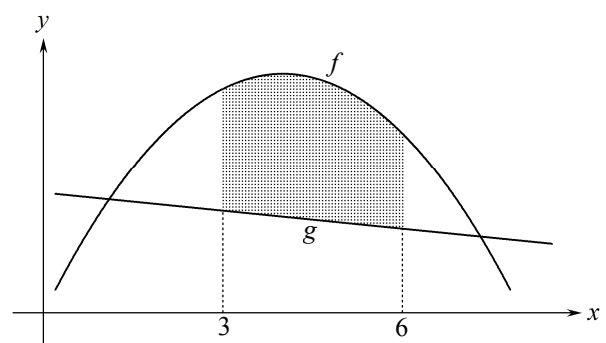
9,97687 *udregnet med Nspire*

Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er 9,98.



Figur til ramme 22



Figur til ramme 23

23. Areal mellem to grafer, 3. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0,1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g i intervallet $[3 ; 6]$.

Besvarelse

Se figur ovenfor til højre.

areal mellem f -graf og g -graf i $[3 ; 6]$ =

(areal ml. f -graf og x -akse i $[3 ; 6]$) – (areal ml. g -graf og x -akse i $[3 ; 6]$) =

$$\int_3^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x\right) dx - \int_3^6 (-0,1x + 2) dx =$$

6,60000 *udregnet med Nspire*

Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er 6,60.

24. Bestem k så arealet af M er lig et tal der er oplyst.

Opgave

Figuren viser grafen for $f(x) = x^2 + 1$ og linjen med ligningen $x = k$.

Bestem et positivt tal k så det grå areal er $\frac{3}{2}$.

Besvarelse

Vi skal bestemme k så

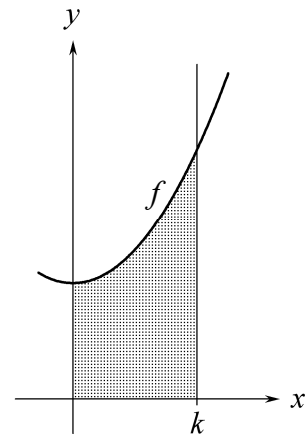
$$\text{det grå areal} = \frac{3}{2}$$

dvs. så

$$\int_0^k (x^2 + 1) dx = \frac{3}{2}$$

Nspire løser denne ligning mht. k for $k > 0$ og får

$$k = \underline{\underline{1,080}}$$



Opgave

Figuren viser grafen for $f(x) = 2 - kx^2$, $0 < k < 2$.

Bestem k så det grå areal er $\frac{7}{2}$.

Besvarelse

Vi skal bestemme k så

$$\text{det grå areal} = \frac{7}{2}$$

dvs. så

$$\int_{-1}^1 (2 - kx^2) dx = \frac{7}{2}$$

Husk at taste gangetegn mellem k og x .

Nspire løser denne ligning mht. k for $0 < k < 2$ og får

$$k = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

