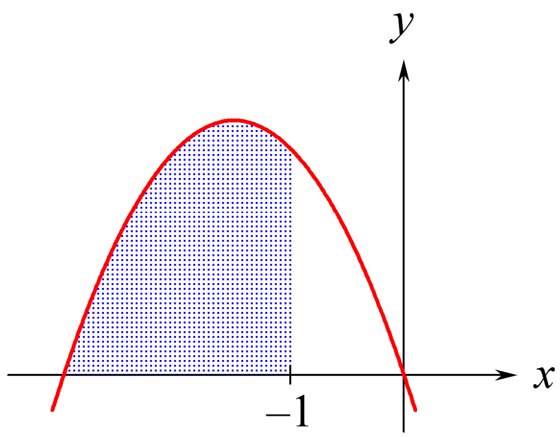
Integralregning

for B-niveau i stx



2015 Karsten Juul

Stikordsregister

Indholdsfortegnelse

Stamfunktion (ubestemt integral)

Bestemt integral

Areal og bestemt interal

En tidligere udgave af dette hæfte har skiftet adresse til
http://mat1.dk/integralregning_for_b_niveau_i_stx_2013.pdf

Integralregning for B-niveau i stx

15/5-2016

Download nyeste version af dette hæfte fra http://mat1.dk/noter.htm

Stamfunktion (ubestemt integral)

1. Hvad er en stamfunktion?

$g(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$g'(x) = f(x)$

2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Undersøg om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at undersøge om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er stamfunktion til $f(x) = x^2$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) \;=\; \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4x\right)' \;=\; \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + \left(4x\right)' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 4 \;=\; \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 + 4 \;=\; x^2 + 4 \;\neq\; f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret ikke giver $f(x)$, gælder:

$\underline{\underline{g(x) \text{ er ikke en stamfunktion til } f(x)}}$

3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Gør rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at gøre rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er stamfunktion til $f(x) = x^2$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) \;=\; \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + 4' \;=\; \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 0 \;=\; \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 \;=\; x^2 = f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

4. En funktion har mange stamfunktioner.

En funktion har mange stamfunktioner, da en konstant differentieret giver nul:

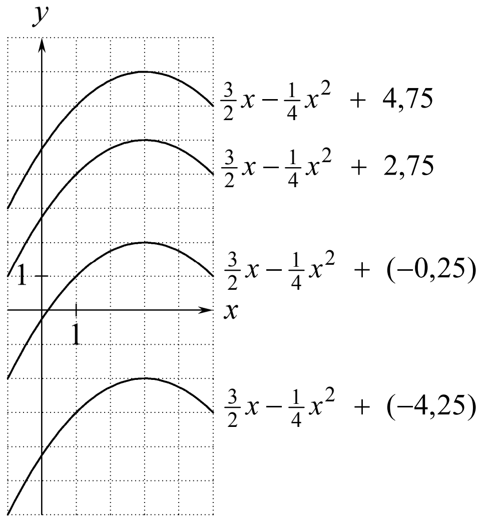
$$\left(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2\right)' = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2 \;+\; 5\right)' = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2 \;+\; 8\right)' = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$$

$\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2+c$ er stamfunktion til $\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$
uanset hvilket tal vi skriver i stedet for c.
Når vi ændrer på c, forskyder vi grafen op eller ned.

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}x$.



4.1 Regel Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$, så er funktionerne $h(x)+k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

4.2 Regel Hvis $h(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så vil stamfunktionerne til $f(x)$ være de funktioner hvis graf vi kan få ved at rykke $h(x)$-grafen op eller ned.

5. Symbol for stamfunktion.

Symbolet $\int f(x)\,dx$

betyder: stamfunktionerne til $f(x)$

og læses: det ubestemte integral af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x)\,dx$ er lig, så siger vi at vi integrerer $f(x)$

Eksempel: $\int (2x+1)dx \;=\; x^2+x+c$

6. Bestem stamfunktion med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int \square \, \mathrm{d}\square$

Nspire skriver kun én af stamfunktionerne: $\int 7^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+c$: $\int 7^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln(7)} + c$

For at finde stamfunktion til

$$f(x) = 3x-\frac{2}{x}\ , \quad x>0$$

skal vi efter integraltegnet angive at $x>0$:

$$\int \left(3\cdot x-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x|x>0 = \frac{3\cdot x^2}{2}-2\cdot \ln(x)$$

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

$|x>0$ skal stå uden for $\int \square \, \mathrm{d}\square$

7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.

k	har stamfunktionen	$k \cdot x$	når k er en konstant	**f.eks.**	6	har stamfunktionen	$6x$
x	har stamfunktionen	$\frac{1}{2}x^2$		**dvs.**	x	har stamfunktionerne	$\frac{1}{2}x^2 + c$
x^a	har stamfunktionen	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$		**f.eks.**	x^3	har stamfunktionen	$\frac{1}{4}x^4$
				MEN	4^x	har **IKKE** stamfunktionen	$\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

---

x^{-1} har stamfunktionen $\ln(x)$ i intervallet $x > 0$

$\frac{1}{x}$ har stamfunktionen $\ln(x)$ i intervallet $x > 0$ **MEN** $\frac{1}{2-x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\ln(2-x)$

e^x har stamfunktionen e^x

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
så: $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$

f.eks. $12x^3$ har stamfunktionen $12 \cdot \frac{1}{4}x^4$ dvs. $3x^4$

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
$g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x)+g(x)$ har stamfunktionen $F(x)+G(x)$
$f(x)-g(x)$ har stamfunktionen $F(x)-G(x)$

f.eks. $6 - e^x$ har stamfunktionerne $6x - e^x + c$

f.eks. $x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

Advarsel: Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde), f.eks.

$x^3 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot e^x$

$\frac{x^3}{e^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{\frac{1}{4}x^4}{e^x}$

$5 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot e^x$

8. Bestem $\int f(x)\,dx$ uden hjælpemidler.

Opgave

Bestem $\int 6x^2 dx$.

Besvarelse

$$\int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} + c = 6 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \underline{\underline{2x^3 + c}} .$$

9. Find en bestemt af stamfunktionerne.

Opgave (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

Find F .

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan: $F(-1) = -6$.

Besvarelse uden hjælpemidler.

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} x^2 + 3 \cdot x + c = \underline{x^2 + 3x + c}$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + c = -6$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

$$1 - 3 + c = -6$$

$$-2 + c = -6$$

$$c = -6 + 2$$

$$\underline{c = -4}$$

dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4 \ , \quad -\infty < x < \infty}}$$

Besvarelse med hjælpemidler.

F er den stamfunktion til $f(x) = 2x+3$ hvis graf går gennem punktet $(-1,-6)$.

$F(x) = \int (2 \cdot x + 3) \, dx = x^2 + 3 \cdot x + c$ udregnet af Nspire

$(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + c = -6$ da F−graf går gennem $(-1,-6)$

Nspire løser ligningen $(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + c = -6$ mht. c og får $c = -4$

$\text{solve}((-1)^2 + 3 \cdot -1 + c = -6, c) \blacktriangleright c = -4$

$F(x) = x^2 + 3 \cdot x + (-4)$ dvs. $F(x) = x^2 + 3 \cdot x - 4 \ , \quad -\infty < x < \infty$

10. Hvad er en arealfunktion?

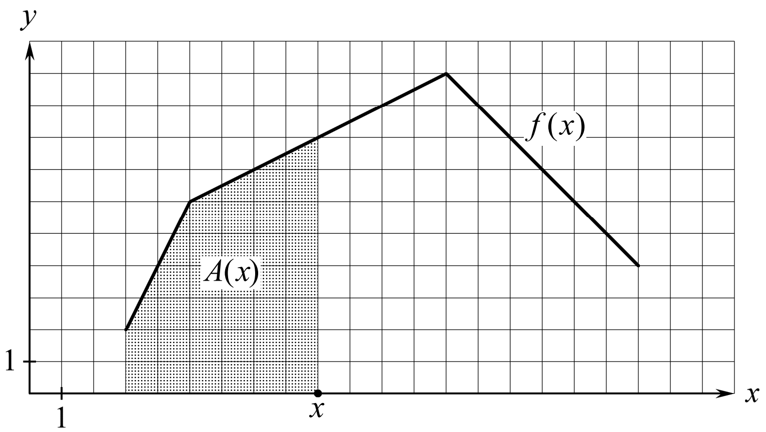
Den viste graf er på en skærm.
Når vi trækker x-prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes <u>arealfunktionen</u> for f .

På billedet ser vi at

$A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.



11. Vigtig regel om arealfunktioner.

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

så gælder at

$A(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$

dvs.

$A'(x) = f(x)$

Betyder at grafen ligger på eller over *x*-aksen.

Bestemt integral

12. Hvad er det bestemte integral.

Det <u>bestemte integral</u> fra a til b af $f(x)$ er tallet

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

<u>Det bestemte integral er et tal</u>.

<u>Det ubestemte integral er funktioner</u>.

13. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int_{\square}^{\square}(\square)d\square$

<u>Eksempel</u>

$\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx = 105$ *udregnet med Nspire*

Husk at skrive dette!

14. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ uden hjælpemidler.

Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $[F(x)]_a^b$ som betyder $F(b) - F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx &= \left[2x^3-5x\right]_{-1}^{4} \\ &= \left(2\cdot4^3-5\cdot4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right) \\ &= 105\end{aligned}$$

I den kantede parentes [ ] skal stå en stamfunktion til udtrykket efter integraltegnet $\int$.

Kontrollér at $(2x^3-5x)' = 6x^2-5$

Den øvre grænse 4 skal sættes ind for x i første parentes, den nedre grænse -1 i sidste parentes.

Areal og bestemt interal

15. Regel om bestemt integral og areal.

<u>Regel</u> om bestemt integral og areal:

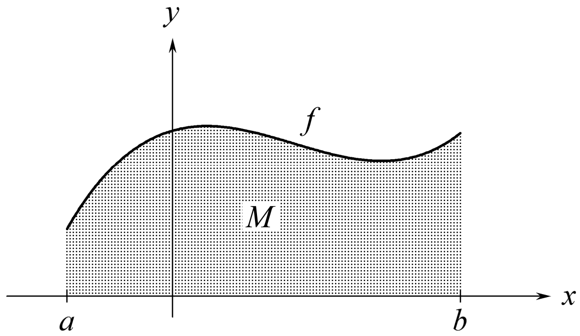
Hvis

$f(x) \geq 0$ for $a \leq x \leq b$ og

M er området mellem f-grafen og x-aksen i intervallet $a \leq x \leq b$

så gælder

$\int_a^b f(x)\,dx$ = arealet af M



16. Bevis for regel om bestemt integral og areal.

<u>Bevis</u>

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$, så $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$(*)\qquad A(x) = F(x) + c$.

Nu fås

areal af M	$= A(b)$	Ifølge definitionen på arealfunktion.
	$= A(b) - A(a)$	Da $A(a) = 0$.
	$= \big(F(b)+c\big) - \big(F(a)+c\big)$	Ifølge $(*)$.
	$= F(b) - F(a)$	
	$= \int_a^b f(x)\,dx$	Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed har vi bevist reglen i ramme 15.

17. Fortolk integral.

I en opgave er $\qquad f(x) = -3x - x^2$

Vi har udregnet at $\qquad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{7}{6}$

Vi skal give en **fortolkning** af dette tal.

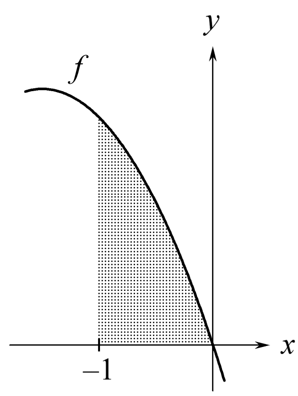
<u>Svar på dette spørgsmål:</u>

Da $f(x) \geq 0$ for $-1 \leq x \leq 0$, gælder:

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ er arealet mellem f-grafen og x-aksen i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

så $\qquad \underline{\underline{\frac{7}{6} \text{ er arealet mellem } f\text{-graf og } x\text{-akse i intervallet } -1 \leq x \leq 0}}$

dvs. $\qquad \underline{\underline{\frac{7}{6} \text{ er arealet af det grå område .}}}$

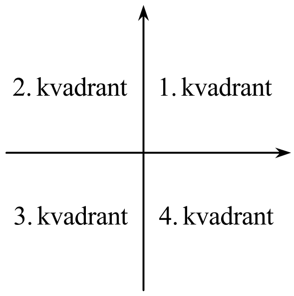


18. Kvadrant.

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer,
kan der stå ordet **kvadrant**.

Koordinatakserne deler planen op i fire kvadranter.

Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



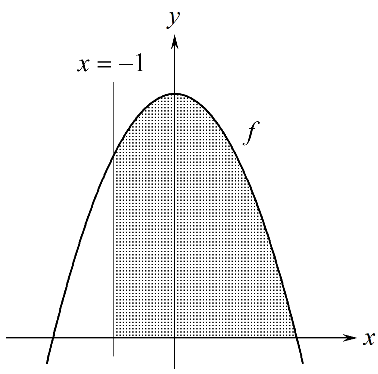
19. Areal mellem graf og x-akse uden hjælpemidler.

Opgave

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - x^2$$

og linjen med ligningen $x = -1$.
Grafen for f skærer x-aksen i punkterne $(-2, 0)$ og $(2, 0)$.
Bestem arealet af det grå område.



Besvarelse indeholder ovenstående oplysninger samt følgende:

Det grå område er

området mellem grafen for f og x-aksen i intervallet $-1 \le x \le 2$.

Da $f(x) \ge 0$ i dette interval, er arealet

$$\int_{-1}^{2} (4 - x^2)\, dx \;=\; \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(4 \cdot 2 - \tfrac{1}{3} \cdot 2^3\right) - \left(4 \cdot (-1) - \tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3\right)$$
$$= 8 - \tfrac{8}{3} - \left(-4 + \tfrac{1}{3}\right)$$
$$= 8 - \tfrac{8}{3} + 4 - \tfrac{1}{3}$$
$$= 9$$

I den kantede parentes [ ] skal stå en stamfunktion til udtrykket efter integraltegnet $\int$.

Kontrollér at $(4x - \frac{1}{3}x^3)' = 4 - x^2$

Tallet -1 nederst på $\int$ er områdets venstre gænse .

Tallet 2 øverst på $\int$ er omådets højre grænse.

Det er den øverste grænse 2 der skal indsættes for x i den første parentes.

Den nederste grænse -1 skal indsættes for x i den sidste parentes.

Arealet af det grå område er $\underline{\underline{9}}$.

20. Areal mellem graf og x-akse med hjælpemidler.

Opgave 20

En funktion er bestemt ved $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

Grafen afgrænser i første kvadrant sammen med koordinatakser et område M .

Bestem arealet af M .

Svar 1 på opgave 20: Grundlæggende metode. Skal kunnes.

Vi taster forskriften $f(x) = -x^2+2x+8$
og får Nspire til at tegne grafen.

Grafen afgrænser i første kvadrant sammen med koordinatakserne et område M.

Vi ser at højre grænse er skæring mellem graf og x-akse. Derfor løser vi $-x^2+2x+8=0$

Nspire løser ligningen $-x^2+2x+8=0$ mht. x og får $x=-2$ or $x=4$.

$\text{solve}(-x^2+2\cdot x+8=0,x)$ ▸ $x=-2$ or $x=4$

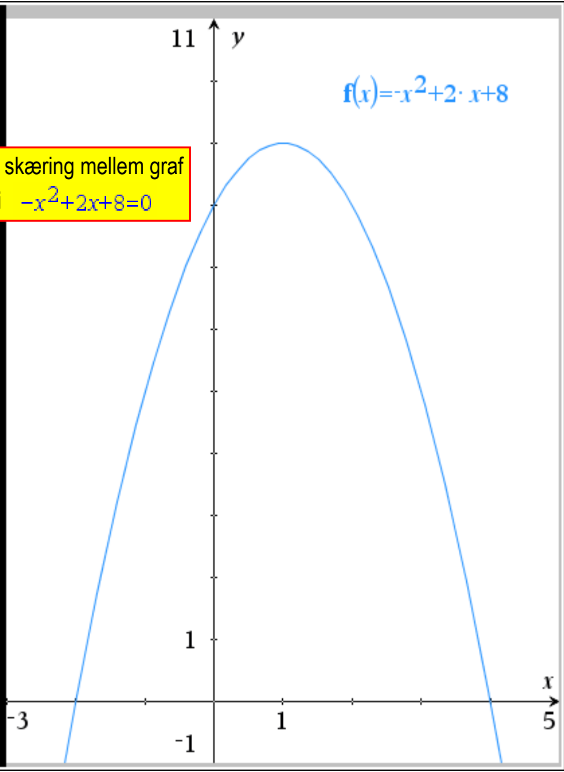
Dette viser hvor grafen skærer x−aksen.

Af figuren ser vi nu at M er arealet mellem graf og x−akse i intervallet $0 \le x \le 4$.

Dette areal er

$$\int_0^4 \left(-x^2+2\cdot x+8\right)dx = \frac{80}{3} \quad \textit{Udregnet af Nspire}$$

Arealet af M er $\frac{80}{3}$.



Svar 2 på opgave 20: Metode hvor f(x) defineres. Skal ikke kunnes.

Vi taster forskriften $f(x):=-x^2+2\cdot x+8$ ▸ *Udført*
og får Nspire til at tegne grafen.

Grafen afgrænser i første kvadrant sammen med koordinatakserne et område M.

Nspire løser ligningen $f(x)=0$ mht. x og får $x=-2$ or $x=4$.

$\text{solve}(f(x)=0,x)$ ▸ $x=-2$ or $x=4$

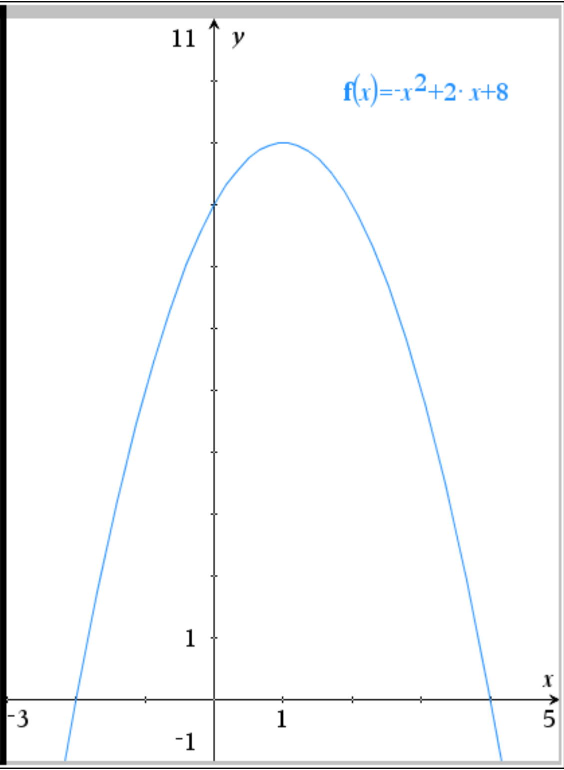
Dette viser hvor grafen skærer x−aksen.

Af figuren ser vi nu at M er arealet mellem graf og x−akse i intervallet $0 \le x \le 4$.

Dette areal er

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{80}{3} \quad \textit{Udregnet af Nspire}$$

Arealet af M er $\frac{80}{3}$.



Opgave 20 fortsætter på næste side!

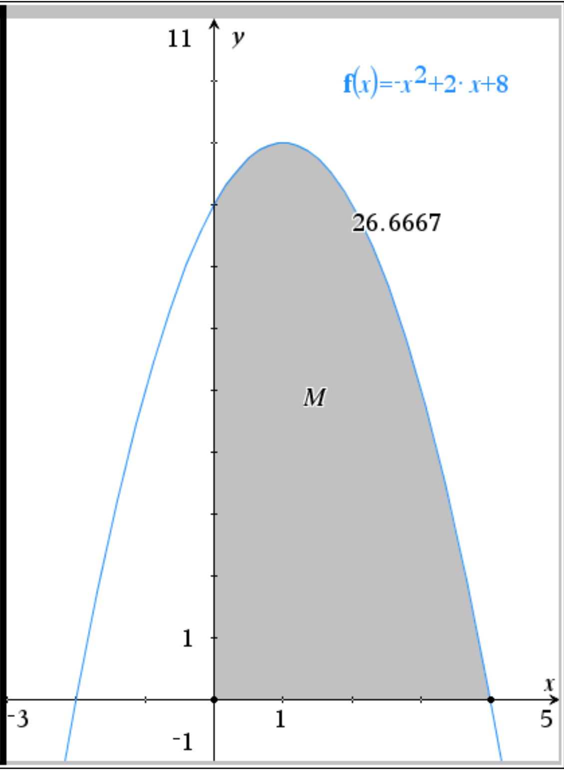
Svar 3 på opgave 20: Metode hvor graf bruges. Skal ikke kunnes. God til kontrol og illustration.

Vi taster forskriften $f(x) = -x^2+2\cdot x+8$
og får Nspire til at tegne grafen.

Grafen afgrænser i første kvadrant sammen med koordinatakserne et område *M*.

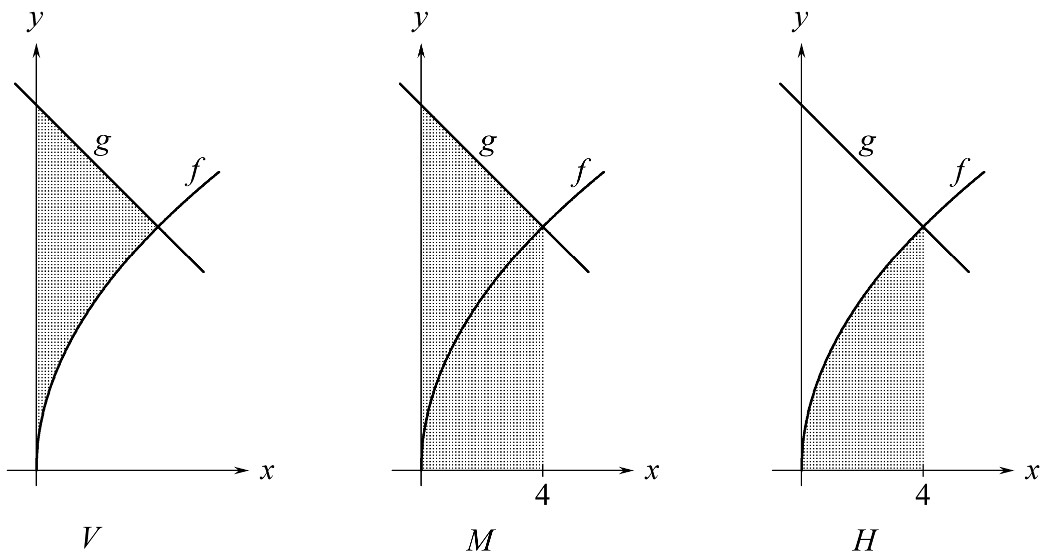
1. Vælger: undersøg graf med hensyn til integral.
2. Taster 0 (da x=0 ved venstre kant af M).
3. Fører markør til højre skæring med x-akse
   (så udregnes x ved højre kant af M)
4. Trykker på Enter-tast og får areal = 26.6667 .

Areal af M er 26.7 .



21. Areal mellem to grafer, 1. eksempel.

I nogle opgaver skal et areal udregnes ved at udregne to arealer og trække det ene fra det andet.
Vi har tegnet graferne for funktionerne $f(x) = 4\cdot\sqrt{x}$ og $g(x) = 12 - x$
Vi vil udregne arealet af det grå område V på venstre figur.



Vi løser ligningen $4\cdot\sqrt{x} = 12 - x$ og får $x = 4$, så grafernes skæringspunkt har x-koordinat 4.

Det grå område M på midterste figur har arealet $\int_0^4 (12 - x)\,dx = 40$ *udregnet med Nspire*

Det grå område H på højre figur har arealet $\int_0^4 4\cdot\sqrt{x}\,dx = \frac{64}{3}$ *udregnet med Nspire*

Hvis vi fjerner H fra M, får vi V, så arealet af V er $40 - \frac{64}{3} = \underline{\underline{\frac{56}{3}}}$

22. Areal mellem to grafer, 2. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0{,}1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g .

Besvarelse indeholder ovenstående oplysninger samt følgende:

For at finde x-koordinater til skæringspunkter mellem grafer lader vi Nspire løse ligningen

$-\frac{1}{4}x^2 + 2x = -0{,}1x + 2$ og får $x = 1{,}09517$ eller $x = 7{,}30483$.

Se figur nedenfor til venstre.

areal mellem f-graf og g-graf =

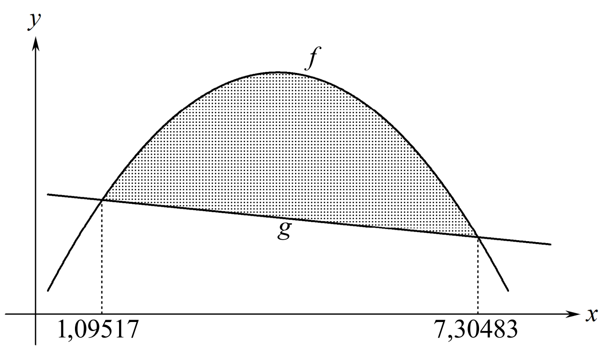
(areal mellem f-graf og x-akse) − (areal mellem g-graf og x-akse) =

$$\int_{1{,}09517}^{7{,}30483} (-\tfrac{1}{4}x^2 + 2x)\,dx \;-\; \int_{1{,}09517}^{7{,}30483} (-0{,}1x + 2)\,dx \;=$$

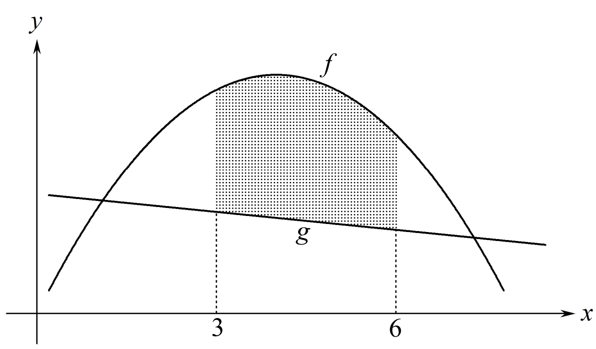
9,97687 *udregnet med Nspire*

Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er $\underline{\underline{9{,}98}}$.



Figur til ramme 22



Figur til ramme 23

23. Areal mellem to grafer, 3. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0{,}1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g i intervallet [3 ; 6] .

Besvarelse indeholder ovenstående oplysninger samt følgende:

Se figur ovenfor til højre.

areal mellem f-graf og g-graf i [3 ; 6] =

(areal ml. f-graf og x-akse i [3 ; 6]) − (areal ml. g-graf og x-akse i [3 ; 6]) =

$$\int_{3}^{6} (-\tfrac{1}{4}x^2 + 2x)\,dx \;-\; \int_{3}^{6} (-0{,}1x + 2)\,dx \;=$$

6,60000 *udregnet med Nspire*

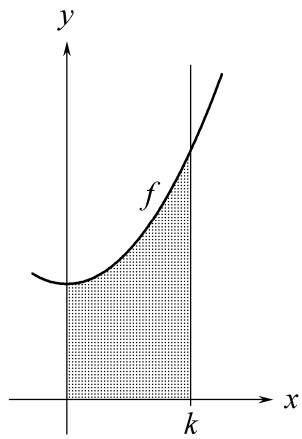
Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er $\underline{\underline{6{,}60}}$.

24. Bestem k så arealet af M er lig et tal der er oplyst.

Opgave

Figuren viser grafen for $f(x) = x^2 + 1$
og linjen med ligningen $x = k$.
Bestem et positivt tal k så det grå areal er $\frac{3}{2}$.



Besvarelse

Vi skal bestemme k så

$$\text{det grå areal} = \frac{3}{2}$$

dvs. så

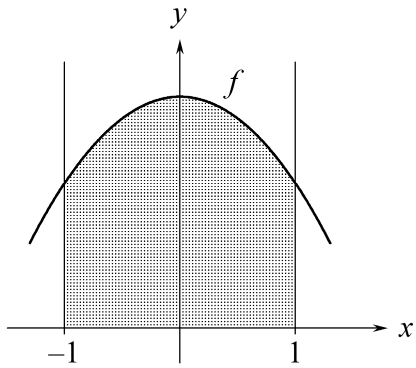
$$\int_0^k (x^2+1)\,dx = \frac{3}{2}$$

Nspire løser ligningen $\int_0^k (x^2+1)\,dx = \frac{3}{2}$ mht. k for $k > 0$ og får

$$k = \underline{\underline{1{,}080}}$$

Opgave

Figuren viser grafen for $f(x) = 2 - kx^2$, $0 < k < 2$.
Bestem k så det grå areal er $\frac{7}{2}$.



Besvarelse

Vi skal bestemme k så

$$\text{det grå areal} = \frac{7}{2}$$

dvs. så

$$\int_{-1}^1 (2-kx^2)\,dx = \frac{7}{2}$$

Husk at taste gangetegn mellem k og x .

Nspire løser ligningen $\int_{-1}^1 (2-kx^2)\,dx = \frac{7}{2}$ mht. k for $0 < k < 2$ og får

$$k = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$