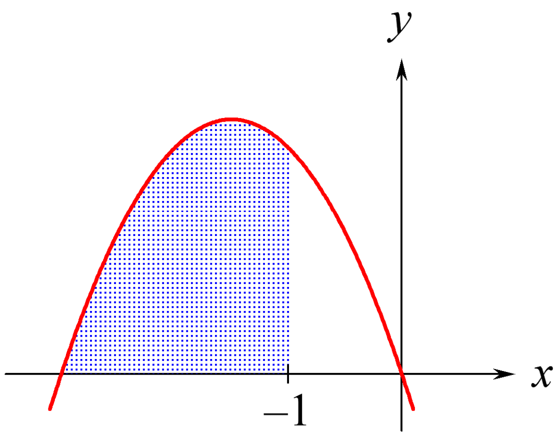
Integralregning

for B-niveau i hf



2013 Karsten Juul

Stikordsregister

Indholdsfortegnelse

En tidligere udgave af dette hæfte har skiftet adresse til
http://mat1.dk/integralregning_for_b_niveau_i_hf_2012.pdf

Integralregning for B-niveau i hf
 3/11-2013

1. Hvad er en stamfunktion?

$g(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$g'(x) = f(x)$

2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Undersøg om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at undersøge om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4x\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + \left(4x\right)' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 4 = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 + 4 = x^2 + 4 \neq f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret ikke giver $f(x)$, gælder:

$\underline{\underline{g(x) \text{ er ikke en stamfunktion til } f(x)}}$

3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Gør rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at gøre rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + 4' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 0 = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

4. En funktion har mange stamfunktioner.

En funktion har mange stamfunktioner, da en konstant differentieret giver nul:

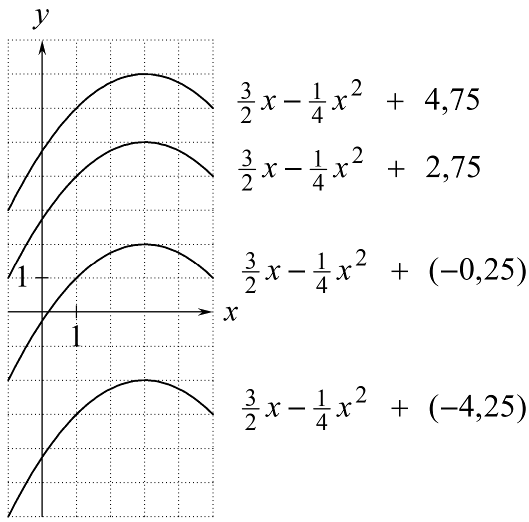
$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + 5\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + 8\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + c$ er stamfunktion til $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$ uanset hvilket tal vi skriver i stedet for c.
Når vi ændrer på c, forskyder vi grafen op eller ned.

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$.



<u>4.1 Sætning</u> Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$, så er funktionerne $h(x)+k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

<u>4.2 Sætning</u> Hvis $h(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så vil stamfunktionerne til $f(x)$ være de funktioner hvis graf vi kan få ved at rykke $h(x)$-grafen op eller ned.

5. Symbol for stamfunktion.

<u>Symbolet</u> $\int f(x)\,dx$

<u>betyder:</u> stamfunktionerne til $f(x)$

<u>og læses:</u> det <u>ubestemte integral</u> af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x)\,dx$ er lig, så siger vi at vi <u>integrerer</u> $f(x)$

<u>Eksempel:</u> $\int (2x+1)dx = x^2 + x + c$

6. Bestem stamfunktion med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int \square\, d\square$

<u>Nspire skriver kun én af stamfunktionerne</u>: $\int \left(7^x\right)dx = \dfrac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+c$.

For at finde stamfunktion til $f(x) = 3x - \dfrac{2}{x}$, $x > 0$

skal vi angive at $x > 0$:

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

$$\int \left(3\cdot x - \frac{2}{x}\right)dx|x>0 = \frac{3\cdot x^2}{2} - 2\cdot\ln(x)$$

7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.

k	har stamfunktionen	$k \cdot x$ når k er en konstant	**f.eks.**	6	har stamfunktionerne	$6x + c$
x	har stamfunktionerne	$\frac{1}{2}x^2 + c$				
x^a	har stamfunktionen	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$	**f.eks.**	x^3	har stamfunktionerne	$\frac{1}{4}x^4 + c$
			MEN	4^x	har **IKKE** stamfunktionen	$\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

---

x^{-1} har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

$\frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$ **MEN** $\frac{1}{2-x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\ln(2-x)$

e^x har stamfunktionerne $e^x + c$

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
så: $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$

f.eks. $12x^3$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c$ dvs. $3x^4 + c$

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
$g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x) + g(x)$ har stamfunktionen $F(x) + G(x)$
$f(x) - g(x)$ har stamfunktionen $F(x) - G(x)$

f.eks. $6 - e^x$ har stamfunktionerne $6x - e^x + c$

f.eks. $x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

<u>Advarsel:</u> Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde), f.eks.

$x^3 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot e^x$

$\frac{x^3}{e^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{\frac{1}{4}x^4}{e^x}$

$5 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot e^x$

8. Bestem $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

<u>Opgave</u>

Bestem $\int 6x^2 dx$.

<u>Besvarelse</u>

$$\int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + c = 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 + c = \underline{\underline{2x^3 + c}} .$$

9. Find en bestemt af stamfunktionerne.

9.1 Opgave (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at: **Grafen for F går gennem punktet (–1, –6)** .

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan: **$F(-1) = -6$** .

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3\cdot(-1) + c = -6$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

så $c = -4$, dvs.

$$F(x) = x^2 + 3x - 4 \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

9.2 Opgave (Vi kender en linje der er tangent til stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at: **Linjen med ligningen $y = x - 5$ er tangent til grafen for F** .

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Først udregner vi et punkt der ligger på grafen for F ,
nemlig det punkt (x_0, y_0) hvori tangenten rører grafen.

Af tangentens ligningen $y = x - 5$ ser vi at tangenthældningen er 1 :

$$F'(x_0) = 1$$
$$2x_0 + 3 = 1$$
$$x_0 = -1$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften for differentialkvotienten og regner ud, så får vi grafpunktets tangenthældning.

Da $x_0 = -1$ og (x_0, y_0) ligger på linjen med ligningen

$$y = x - 5$$

får vi

$$y_0 = (-1) - 5$$
$$y_0 = -6$$

At en linjes ligning er $y = ax + b$ betyder at for et punkt på linjen kan vi udregne y-koordinaten ved at gange x-koordinaten med a og lægge b til resultatet.

Nu kender vi et punkt på grafen for F . Så kan vi bruge metoden fra opgave 9.1.

10. Hvad er en arealfunktion?

Den viste graf er på en skærm.

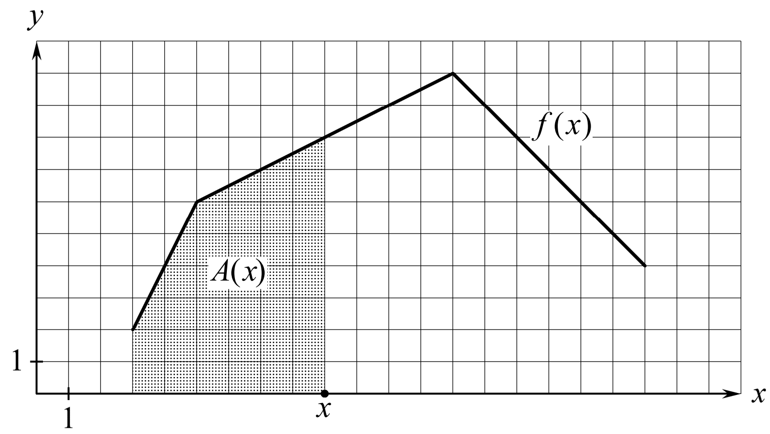
Når vi trækker x-prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes <u>arealfunktionen</u> for f

På billedet ser vi at

$A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.



11. Vigtig regel om arealfunktioner.

Når

Betyder at grafen ligger på eller over x-aksen.

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

så gælder at

$A(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$ dvs. $A'(x) = f(x)$

12. Hvad er det bestemte integral.

Det <u>bestemte integral</u> fra a til b af $f(x)$ er tallet

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

<u>Det bestemte integral er et tal</u>. <u>Det ubestemte integral er funktioner</u>.

13. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int_{\square}^{\square}(\square)\,d\square$.

<u>Eksempel</u>

Husk at skrive dette!

$\int_{-1}^{4}(6x^2 - 5)\,dx = 105$ *udregnet med Nspire*

14. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ uden hjælpemidler.

Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ som betyder $F(b) - F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}(6x^2 - 5)\,dx &= \left[2x^3 - 5x\right]_{-1}^{4} \\ &= \left(2\cdot 4^3 - 5\cdot 4\right) - \left(2\cdot(-1)^3 - 5\cdot(-1)\right) \\ &= 105\end{aligned}$$

15. Regel om bestemt integral og areal.

<u>Regel</u> om bestemt integral og areal

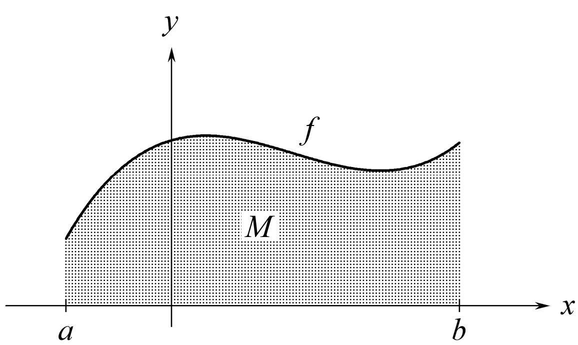
Hvis

$f(x) \ge 0$ for $a \le x \le b$ og

M er området mellem f-grafen og x-aksen i intervallet $a \le x \le b$

så gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{arealet af } M$$



16. Bevis for regel om bestemt integral og areal.

Bevis

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$, så $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$(*)\quad A(x) = F(x)+c$.

Nu fås

areal af M	$= A(b)$	Ifølge definitionen på arealfunktion.
	$= A(b)-A(a)$	Da $A(a)=0$.
	$= \big(F(b)+k\big)-\big(F(a)+k\big)$	Ifølge $(*)$.
	$= F(b)-F(a)$	
	$= \int_a^b f(x)\,dx$	Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed har vi bevist reglen i ramme 15.

17. Fortolk integral.

I en opgave er $\quad f(x) = -3x - x^2$

Vi har udregnet at $\quad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{7}{6}$

Vi skal give en **fortolkning** af dette tal.

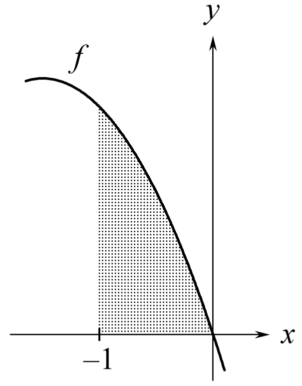
<u>Svar på dette spørgsmål:</u>

Da $f(x) \geq 0$ for $-1 \leq x \leq 0$, gælder:

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ er arealet mellem *f*-grafen og *x*-aksen i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

så $\quad \frac{7}{6}$ er arealet mellem *f*-graf og *x*-akse i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

dvs. $\quad \frac{7}{6}$ er arealet af det grå område .

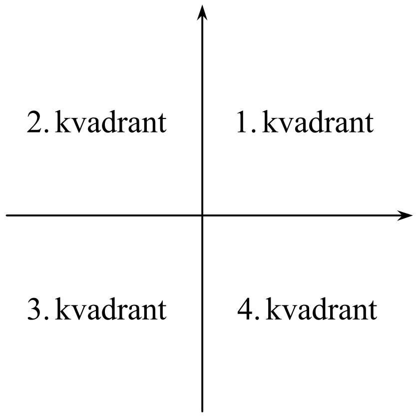


18. Kvadrant.

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer,
kan der stå ordet **kvadrant**.

Koordinatakserne deler planen op i fire kvadranter.

Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



19. Areal mellem graf og x-akse, 1. eksempel.

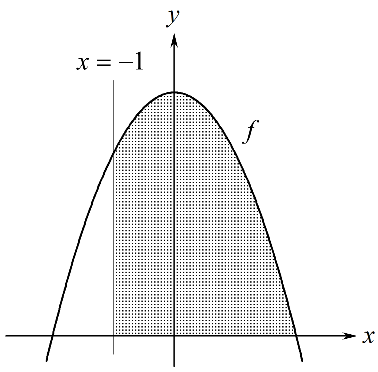
Opgave

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - x^2$$

og linjen med ligningen $x = -1$. Grafen for f skærer x-aksen i punkterne $(-2\ ,\ 0)$ og $(2\ ,\ 0)$.

Bestem arealet af det grå område.



Besvarelse

Det grå område er

området mellem grafen for f og x-aksen i intervallet $-1 \le x \le 2$.

Da $f(x) \ge 0$ i dette interval, er arealet

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} (4 - x^2)\,dx &= \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(4\cdot 2 - \tfrac{1}{3}\cdot 2^3\right) - \left(4\cdot(-1) - \tfrac{1}{3}\cdot(-1)^3\right) \\
&= 8 - \tfrac{8}{3} - \left(-4 + \tfrac{1}{3}\right) \\
&= 8 - \tfrac{8}{3} + 4 - \tfrac{1}{3} \\
&= 9
\end{aligned}$$

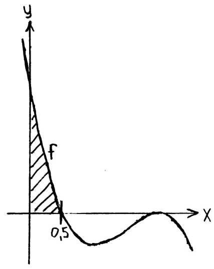
Arealet af det grå område er $\underline{\underline{9}}$.

20. Areal mellem graf og x-akse, 2. eksempel.

Opgave

En funktion f har forskriften $f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$.

Bestem arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinatakserne.



Besvarelse

Det søgte areal er skraveret på skitsen (fra Nspire). På skitsen ser vi at vi skal bruge x-koordinaten til det venstre af de to fællespunkter mellem grafen og x-aksen, så vi får Nspire til at løse ligningen

$-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2 = 0$ mht. x og får $x = 0{,}5$ eller $x = 2$.

Det søgte areal er altså arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $0 \le x \le 0{,}5$, dvs.

$$\int_0^{0{,}5} \left(-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2\right) dx = 0{,}421875 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

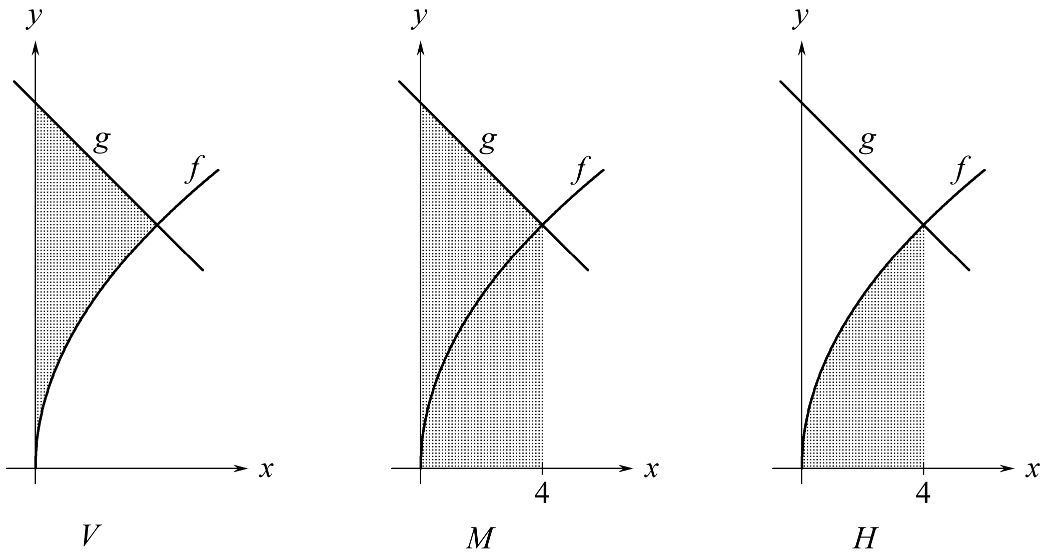
Arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinatakserne, er $\underline{\underline{0{,}422}}$.

21. Areal mellem to grafer, 1. eksempel.

I nogle opgaver skal et areal udregnes ved at udregne to arealer og trække det ene fra det andet.

Vi har tegnet graferne for funktionerne $f(x) = 4\cdot\sqrt{x}$ og $g(x) = 12 - x$

Vi vil udregne arealet af det grå område V på venstre figur.



Vi løser ligningen $4\cdot\sqrt{x} = 12 - x$ og får $x = 4$, så grafernes skæringspunkt har x-koordinat 4.

Det grå område M på midterste figur har arealet $\int_0^4 (12 - x)\,dx = 40$ *udregnet med Nspire*

Det grå område H på højre figur har arealet $\int_0^4 4\cdot\sqrt{x}\,dx = \frac{64}{3}$ *udregnet med Nspire*

Hvis vi fjerner H fra M , får vi V , så arealet af V er $40 - \frac{64}{3} = \underline{\underline{\frac{56}{3}}}$

22. Areal mellem to grafer, 2. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0{,}1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g .

Besvarelse

For at finde x-koordinater til skæringspunkter mellem grafer lader vi Nspire løse ligningen $-\frac{1}{4}x^2 + 2x = -0{,}1x + 2$ og får $x = 1{,}09517$ eller $x = 7{,}30483$.

Se figur nedenfor til venstre.

areal mellem f-graf og g-graf =

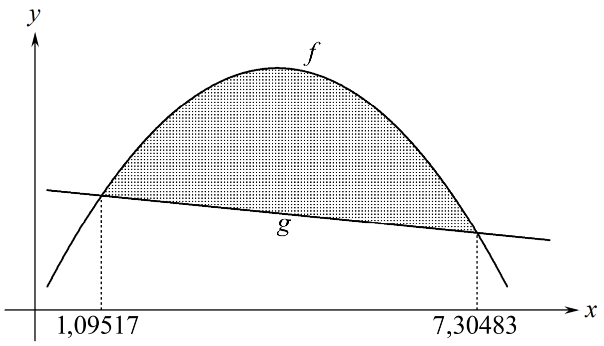
(areal mellem f-graf og x-akse) – (areal mellem g-graf og x-akse) =

$$\int_{1{,}09517}^{7{,}30483} (-\tfrac{1}{4}x^2 + 2x)\,dx \;-\; \int_{1{,}09517}^{7{,}30483} (-0{,}1x + 2)\,dx \;=$$

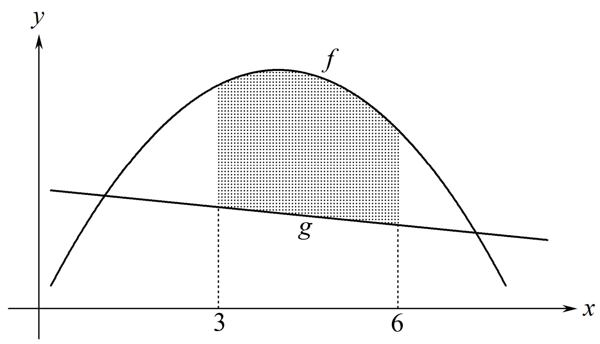
9,97687 *udregnet med Nspire*

Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er $\underline{\underline{9{,}98}}$.



Figur til ramme 22



Figur til ramme 23

23. Areal mellem to grafer, 3. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0{,}1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g i intervallet [3 ; 6] .

Besvarelse

Se figur ovenfor til højre.

areal mellem f-graf og g-graf i [3 ; 6] =

(areal ml. f-graf og x-akse i [3 ; 6]) – (areal ml. g-graf og x-akse i [3 ; 6]) =

$$\int_{3}^{6} (-\tfrac{1}{4}x^2 + 2x)\,dx \;-\; \int_{3}^{6} (-0{,}1x + 2)\,dx \;=$$

6,60000 *udregnet med Nspire*

Dvs.

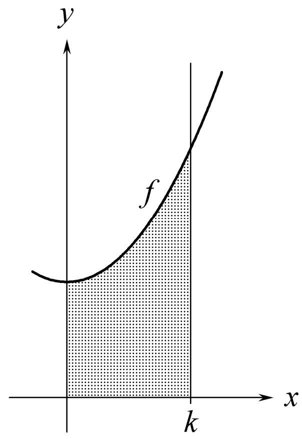
Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er $\underline{\underline{6{,}60}}$.

24. Bestem k så arealet af M er lig et tal der er oplyst.

Opgave

Figuren viser grafen for $f(x) = x^2 + 1$
og linjen med ligningen $x = k$.

Bestem et positivt tal k så det grå areal er $\frac{3}{2}$.



Besvarelse

Vi skal bestemme k så

det grå areal $= \frac{3}{2}$

dvs. så

$$\int_0^k (x^2+1)\,dx = \frac{3}{2}$$

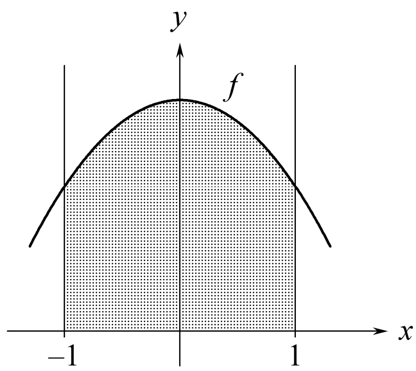
Nspire løser denne ligning mht. k for $k > 0$ og får

$$k = \underline{\underline{1{,}080}}$$

Opgave

Figuren viser grafen for $f(x) = 2 - kx^2$, $0 < k < 2$.

Bestem k så det grå areal er $\frac{7}{2}$.



Besvarelse

Vi skal bestemme k så

det grå areal $= \frac{7}{2}$

dvs. så

$$\int_{-1}^1 (2 - kx^2)\,dx = \frac{7}{2}$$

Husk at taste gangetegn mellem k og x .

Nspire løser denne ligning mht. k for $0 < k < 2$ og får

$$k = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$