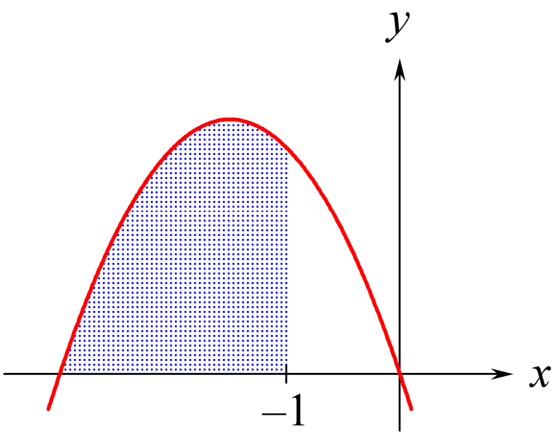
Integralregning

for B-niveau i hf



2012 Karsten Juul

Indholdsfortegnelse

Integralregning for B-niveau i hf

1. Hvad er en stamfunktion?

$g(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$g'(x) = f(x)$

2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Undersøg om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at undersøge om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) \;=\; \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4x\right)' \;=\; \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + (4x)' \;=\; \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 4 \;=\; \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 + 4 \;=\; x^2 + 4 \;\neq\; f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret ikke giver $f(x)$, gælder:

$\underline{\underline{g(x) \text{ er ikke en stamfunktion til } f(x)}}$

3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Gør rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at gøre rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) \;=\; \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + 4' \;=\; \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 0 \;=\; \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 \;=\; x^2 = f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

4. En funktion har mange stamfunktioner.

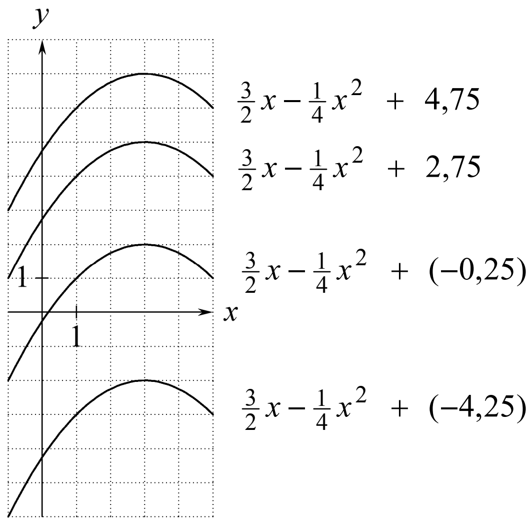
$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 \ + \ 5\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 \ + \ 8\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + c$ er stamfunktion til $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$ uanset hvilket tal vi skriver i stedet for c.

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$.



<u>4.1 Sætning</u> Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$, så er funktionerne $h(x)+k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

<u>4.2 Sætning</u> Hvis $h(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så vil stamfunktionerne til $f(x)$ være de funktioner hvis graf vi kan få ved at rykke $h(x)$-grafen op eller ned.

5. Symbol for stamfunktion.

<u>Symbolet</u> $\int f(x)\,dx$

<u>betyder:</u> stamfunktionerne til $f(x)$

<u>og læses:</u> det <u>ubestemte integral</u> af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x)\,dx$ er lig, så siger vi at vi <u>integrerer</u> $f(x)$

<u>Eksempel:</u> $\int (2x+1)\,dx = x^2 + x + c$

6. Bestem stamfunktion med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int \square \, \mathrm{d}\square$

<u>Nspire skriver kun én af stamfunktionerne</u>: $\int \left(7^x\right) \mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+c$.

For at finde stamfunktion til

$$f(x) = 3x - \frac{2}{x}\ , \quad x > 0$$

skal vi efter integraltegnet angive at $x > 0$:

$$\int \left(3\cdot x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x | x>0 = \frac{3\cdot x^2}{2} - 2\cdot \ln(x)$$

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.

k har stamfunktionen $k \cdot x$ når k er en konstant **f.eks.** 6 har stamfunktionerne $6x + c$

x har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + c$

x^a har stamfunktionen $\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$ **f.eks.** x^3 har stamfunktionerne $\frac{1}{4}x^4 + c$

MEN 4^x har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

---

x^{-1} har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

$\frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$ **MEN** $\frac{1}{2-x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\ln(2-x)$

e^x har stamfunktionerne $e^x + c$

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
så: $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$

f.eks. $12x^3$ har stamfunktionerne $12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c$ dvs. $3x^4 + c$

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
$g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x) + g(x)$ har stamfunktionen $F(x) + G(x)$
$f(x) - g(x)$ har stamfunktionen $F(x) - G(x)$

f.eks. $6 - e^x$ har stamfunktionerne $6x - e^x + c$

f.eks. $x + \frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$ i intervallet $x > 0$

Advarsel: Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde), f.eks.

$x^3 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot e^x$

$\frac{x^3}{e^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{\frac{1}{4}x^4}{e^x}$

$5 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot e^x$

8. Bestem $\int f(x)\,dx$.

Opgave

Bestem $\int 6x^2 dx$.

Besvarelse

$$\int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} + c = 6 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \underline{\underline{2x^3 + c}} .$$

9. Find en bestemt af stamfunktionerne.

9.1 Opgave (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan:

$F(-1) = -6$.

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3\cdot(-1) + c \;=\; -6$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

så $c = -4$, dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4 \quad , \quad -\infty < x < \infty}}$$

9.2 Opgave (Vi kender en linje der er tangent til stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

Linjen med ligningen $y = x - 5$ er tangent til grafen for F .

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Først udregner vi et punkt der ligger på grafen for F ,
nemlig det punkt (x_0, y_0) hvori tangenten rører grafen.
Af tangentens ligningen $y = x - 5$ ser vi at tangenthældningen er 1 :

$$F'(x_0) \;=\; 1$$
$$2x_0 + 3 \;=\; 1$$
$$x_0 \;=\; -1$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften for differentialkvotienten og regner ud, så får vi grafpunktets tangenthældning.

Da $x_0 = -1$ og (x_0, y_0) ligger på linjen med ligningen

$$y = x - 5$$

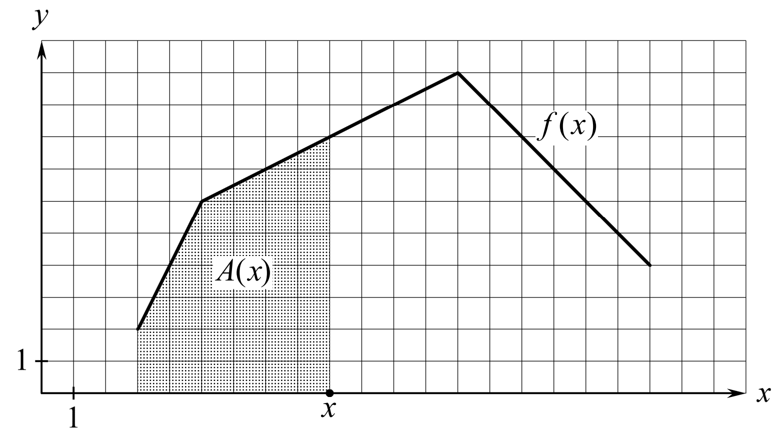
får vi

$$y_0 \;=\; (-1) - 5$$
$$y_0 \;=\; -6$$

At en linjes ligning er $y = ax + b$ betyder at for et punkt på linjen kan vi udregne y-koordinaten ved at gange x-koordinaten med a og lægge b til resultatet.

Nu kender vi et punkt på grafen for F . Så kan vi bruge metoden fra opgave 9.1.

10. Hvad er en arealfunktion?



Den viste graf er på en skærm.

Når vi trækker x-prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes arealfunktionen for f .

På billedet ser vi at $A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.

11. Vigtig regel om arealfunktioner.

11.1 Sætning

Betyder at grafen ligger på eller over x-aksen.

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

så gælder at

$A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

dvs.

$$A'(x) = f(x)$$

12. Hvad er det bestemte integral.

Det bestemte integral fra a til b af $f(x)$ er tallet

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Det bestemte integral er et tal.

Det ubestemte integral er funktioner.

13. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int_{\square}^{\square}(\square)\mathrm{d}\square$.

Eksempel

$$\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx \;=\; 105 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

14. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ uden hjælpemidler.

Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ som betyder $F(b)-F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x .

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx &= \left[\,2x^3-5x\,\right]_{-1}^{4} \\
&= \left(2\cdot 4^3-5\cdot 4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right) \\
&= 105
\end{aligned}$$

15. Bestemt integral og areal.

15.1 Sætning om bestemt integral og areal

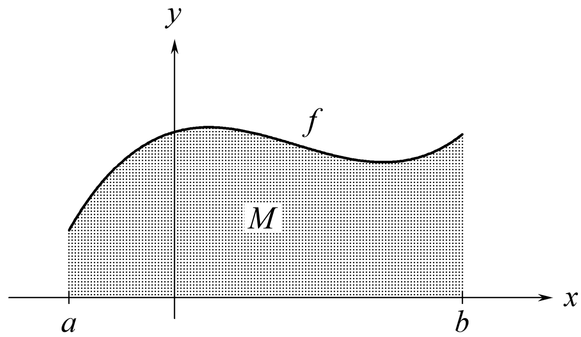
Hvis

$f(x)\ge 0$ for $a\le x\le b$ og

M er området mellem f-grafen og x-aksen i intervallet $a\le x\le b$

så gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \text{arealet af } M$$



Bevis

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$.

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$(*)\qquad A(x) \;=\; F(x)+c$.

Nu fås

areal af M	$= A(b)$	Ifølge definitionen på arealfunktion.
	$= A(b)-A(a)$	Da $A(a)=0$.
	$= \left(F(b)+k\right)-\left(F(a)+k\right)$	Ifølge $(*)$.
	$= F(b)-F(a)$	
	$= \int_a^b f(x)\,dx$	Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætning 15.1 bevist.

16. Fortolk integral.

I en opgave er $f(x) = -3x - x^2$

Vi har udregnet at $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{7}{6}$

Vi skal give en **fortolkning** af dette tal.

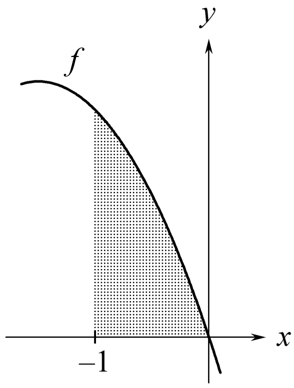
Svar på dette spørgsmål:

Da $f(x) \geq 0$ for $-1 \leq x \leq 0$, gælder:

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ er arealet mellem f-grafen og x-aksen i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

så $\frac{7}{6}$ er arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

dvs. $\frac{7}{6}$ er arealet af det grå område.

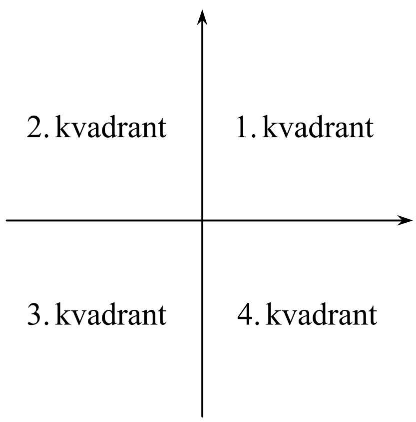


17. Kvadrant.

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer,
kan der stå ordet **kvadrant**.

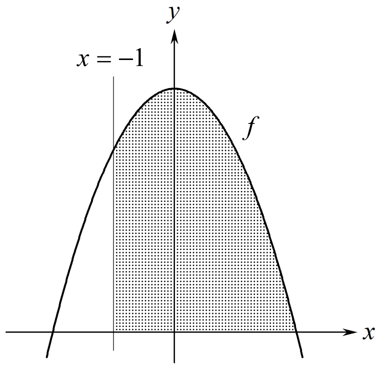
Koordinatakserne deler planen op i fire kvadranter.

Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



18. Areal mellem graf og x-akse, 1. eksempel.

Opgave



Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - x^2$$

og linjen med ligningen $x = -1$. Grafen for f skærer x-aksen i punkterne $(-2\ ,\ 0)$ og $(2\ ,\ 0)$.

Bestem arealet af det grå område.

Besvarelse

Det grå område er

området mellem grafen for f og x-aksen i intervallet $-1 \le x \le 2$.

Da $f(x) \ge 0$ i dette interval, er arealet

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} (4 - x^2)\, dx &= \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(4 \cdot 2 - \tfrac{1}{3} \cdot 2^3\right) - \left(4 \cdot (-1) - \tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3\right) \\
&= 8 - \tfrac{8}{3} - \left(-4 + \tfrac{1}{3}\right) \\
&= 8 - \tfrac{8}{3} + 4 - \tfrac{1}{3} \\
&= 9
\end{aligned}$$

Arealet af det grå område er $\underline{\underline{9}}$.

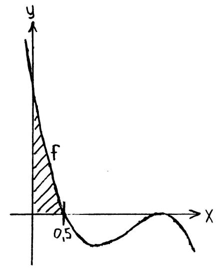
19. Areal mellem graf og x-akse, 2. eksempel.

Opgave

En funktion f har forskriften $f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$.

Bestem arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinatakserne.

Bemærkning



På Nspire får vi grafen tegnet i et passende udsnit af koordinatsystemet.
Ud fra dette tegner vi en skitse som er en del af besvarelsen.
På skitsen skriver vi relevante tal og markerer det areal vi skal finde.

Besvarelse

Det søgte areal er skraveret på skitsen (fra Nspire). På skitsen ser vi at vi skal bruge x-koordinaten til det venstre af de to fællespunkter mellem grafen og x-aksen, så vi får Nspire til at løse ligningen $-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2 = 0$ mht. x og får $x = 0{,}5$ eller $x = 2$.

Det søgte areal er altså arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $0 \le x \le 0{,}5$, dvs.

$$\int_{0}^{0{,}5} \left(-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2\right) dx = 0{,}421875 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

Arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinatakserne, er $\underline{\underline{0{,}422}}$.

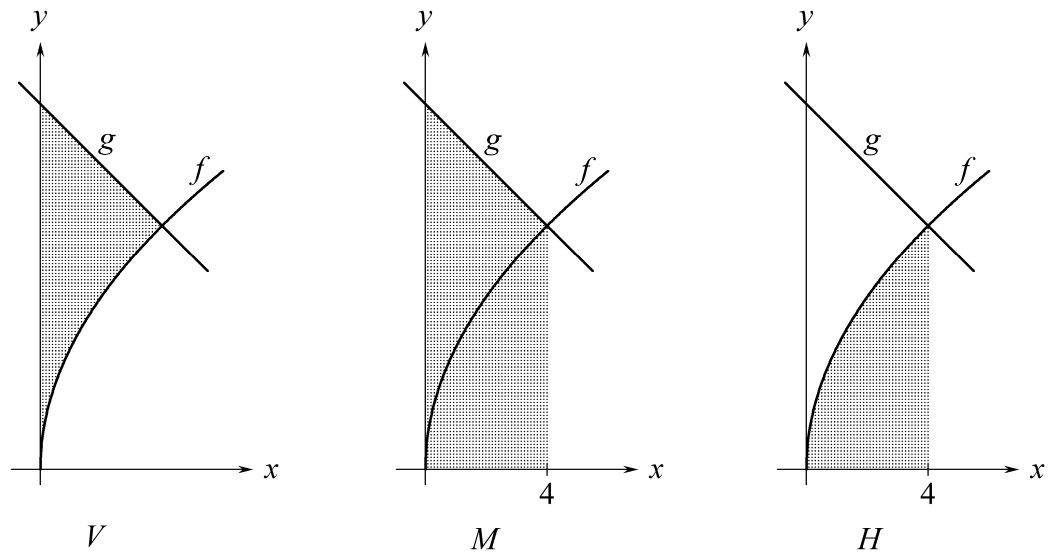
20. Areal mellem to grafer, 1. eksempel.

I nogle opgaver skal et areal udregnes ved at udregne to arealer og trække det ene fra det andet.

I koordinatsystemerne har vi tegnet graferne for funktionerne

$$f(x) = 4\cdot\sqrt{x} \qquad \text{og} \qquad g(x) = 12 - x$$

Vi vil udregne arealet af det grå område V på venstre figur.



Vi løser ligningen $4\cdot\sqrt{x} = 12 - x$ og får $x = 4$,
så grafernes skæringspunkt har x-koordinat 4.

Det grå område M på midterste figur har arealet

$$\int_0^4 (12 - x)\,dx = 40 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

Det grå område H på højre figur har arealet

$$\int_0^4 4\cdot\sqrt{x}\,dx = \frac{64}{3} \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

Hvis vi fjerner H fra M, får vi V, så arealet af V er $40 - \frac{64}{3} = \underline{\underline{\frac{56}{3}}}$

<u>Bemærkning:</u> Vi kunne have udregnet arealet af M uden at bruge integralregning da M er begrænset af rette linjer.

21. Areal mellem to grafer, 2. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0{,}1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g .

Besvarelse

For at finde x-koordinater til skæringspunkter mellem grafer lader vi Nspire løse ligningen $-\frac{1}{4}x^2 + 2x = -0{,}1x + 2$ og får $x = 1{,}09517$ eller $x = 7{,}30483$. Se skitse (fra Nspire).

areal mellem f-graf og g-graf =

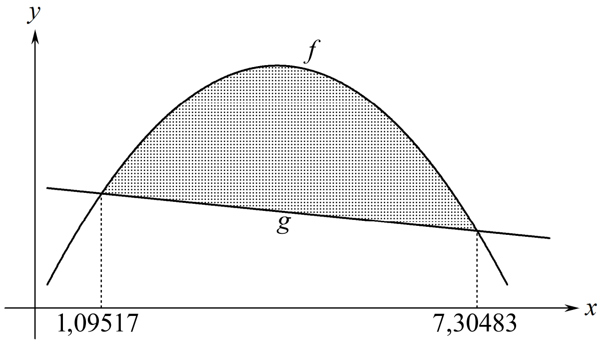
(areal mellem f-graf og x-akse) − (areal mellem g-graf og x-akse) =

$$\int_{1{,}09517}^{7{,}30483} (-\tfrac{1}{4}x^2 + 2x)\,dx \;-\; \int_{1{,}09517}^{7{,}30483} (-0{,}1x + 2)\,dx \;=$$

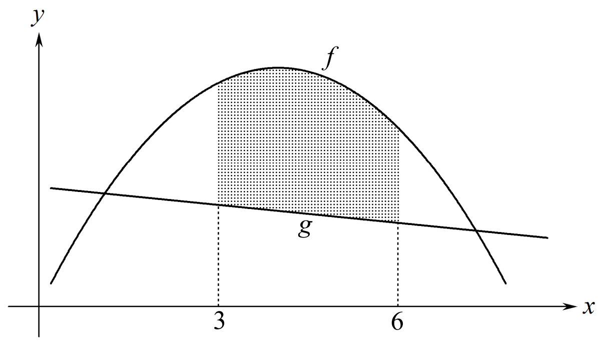
9,97687 *udregnet med Nspire*

Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er $\underline{\underline{9{,}98}}$.



Figur til ramme 21



Figur til ramme 22

22. Areal mellem to grafer, 3. eksempel.

Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ og $g(x) = -0{,}1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g i intervallet [3 ; 6] .

Besvarelse

Se skitse (fra Nspire).

areal mellem f-graf og g-graf i [3 ; 6] =

(areal ml. f-graf og x-akse i [3 ; 6]) − (areal ml. g-graf og x-akse i [3 ; 6]) =

$$\int_{3}^{6} (-\tfrac{1}{4}x^2 + 2x)\,dx \;-\; \int_{3}^{6} (-0{,}1x + 2)\,dx \;=$$

6,60000 *udregnet med Nspire*

Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er $\underline{\underline{6{,}60}}$.

23. Bestem k så arealet af M er lig et tal der er oplyst.

Figuren viser grafen for $f(x)=x^2+1$
og linjen med ligningen $x=k$.

Vi vil bestemme et positivt tal k så

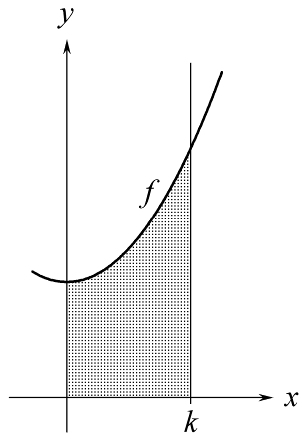
$$\text{det grå areal} \;=\; \frac{3}{2}$$

dvs.

$$\int_0^k (x^2+1)\,dx \;=\; \frac{3}{2}$$

Nspire løser denne ligning mht. k for $k>0$ og får

$$k \;=\; \underline{\underline{1{,}08004}}$$



Figuren viser grafen for $f(x)=2-kx^2$
hvor $0<k<2$.
Vi vil bestemme k så

$$\text{det grå areal} \;=\; \frac{7}{2}$$

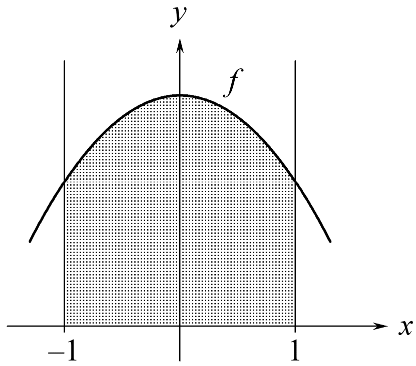
dvs.

$$\int_{-1}^{1} (2-kx^2)\,dx \;=\; \frac{7}{2}$$

Husk at taste gangetegn mellem k og x.

Nspire løser denne ligning mht. k for $0<k<2$ og får

$$k \;=\; \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$



Figuren viser graferne for

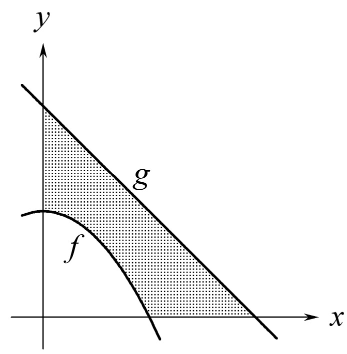
$$f(x)=1-x^2 \quad \text{og} \quad g(x)=k-x \quad \text{hvor } k>\frac{5}{4}.$$

Vi vil bestemme k så det grå areal er $\frac{4}{3}$.

På figuren ser vi at vi har brug for at kende de to viste skæringspunkter mellem x-aksen og graferne:

Nspire løser $1-x^2=0$ og får $x=\pm 1$

Nspire løser $k-x=0$ og får $x=k$



Heraf og af figuren får vi følgende omskrivninger:

$$\text{det grå areal} = \frac{4}{3}$$

(areal ml. g-graf og x-akse i intv. $0\le x\le k$) – (areal ml. f-graf og x-akse i intv. $0\le x\le 1$) $= \frac{4}{3}$

$$\int_0^k (k-x)\,dx - \int_0^1 (1-x^2)\,dx \;=\; \frac{4}{3}$$

Nspire løser denne mht. k for $k>\frac{5}{4}$ og får

$$k = \underline{\underline{2}}$$

For at finde grænser for integralerne løste vi ligningerne $f(x)=0$ og $g(x)=0$. I andre opgaver skal du ikke løse disse ligninger. I stedet skal du måske løse $f(x)=g(x)$. Eller måske fremgår integralets grænser af tekst og figur.

Stikordsregister

Indholdsfortegnelse