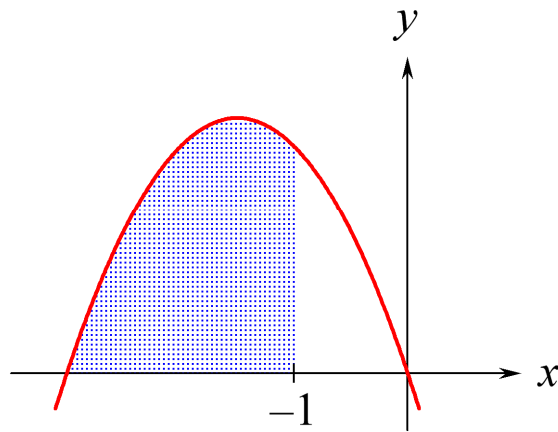


Integralregning

for A-niveau i stx, udgave 2



2015 Karsten Juul

Stamfunktion (ubestemt integral)

1.	Hvad er en stamfunktion?	1
2.	Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$	1
3.	Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$	1
4.	En funktion har mange stamfunktioner	2
5.	Symbol for stamfunktion (ubestemt integral)	2
6.	Bestem stamfunktion med Nspire	2
7.	Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.	3
8.	Bestem $\int f(x) dx$	3
9.	Integral af sammensat funktion	4
10.	Find en bestemt af stamfunktionerne.	5

Bestemt integral

11.	Hvad er det bestemte integral	6
12.	Udregn $\int_a^b f(x) dx$ med Nspire	6
13.	Udregn $\int_a^b f(x) dx$ uden hjælpemidler	6

Areal og bestemt interal

14.	Areal og bestemt integral	7
15.	Kvadrant	7
16.	Areal mellem graf og x-akse. Uden hjælpemidler.	8
17.	Areal mellem graf og x-akse. Med hjælpemidler.	8
18.	Areal mellem grafer. Eksempel 1.	10
19.	Areal mellem grafer. Eksempel 2.	10
20.	Areal i tilfælde der ikke er standard	11
21.	Opgave hvor integral og areal er givet	11
22.	Opdelt område	12
23.	Fortolk integral. Eksempel 1	12
24.	Fortolk integral. Eksempel 2	12
25.	Bestem k så areal er lig et oplyst tal	13

Rumfang af omdrejningslegeme

26.	Rumfang af omdrejningslegeme.	14
27.	Rumfang af skål	14
28.	Rumfang af ring	15

Andre anvendelser

29.	Andre anvendelser	15
-----	-------------------------	----

Beviser

30.	Formler for bestemt integral	16
31.	Hvad er en arealfunktion?	17
32.	Vigtig regel om arealfunktioner.	17
33.	Bevis for at $A'(x) = f(x)$	18
34.	Areal når graf ligger over x-akse	19
35.	Areal mellem grafer	20
36.	Areal når graf ligger under x-akse	21

En tidligere version af dette hæfte har skiftet adresse til

http://mat1.dk/integralregning_for_a_niveau_i_stx_udgave_1.pdf

Stamfunktion (ubestemt integral)

1. Hvad er en stamfunktion?

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$$g'(x) = f(x)$$

2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

Opgave

Undersøg om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

Besvarelse

For at undersøge om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,

vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (4x)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 4 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 4 = x^2 + 4 \neq f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret ikke giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er ikke en stamfunktion til $f(x)$

3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

Opgave

Gør rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

Besvarelse

For at gøre rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,

vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 4\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 4' = \frac{1}{3}(x^3)' + 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

4. En funktion har mange stamfunktioner.

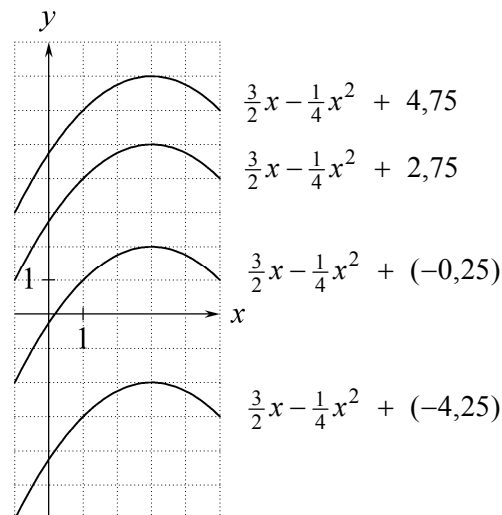
$$\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right)' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + 5\right)' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + 8\right)' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + c$ er stamfunktion til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ uanset hvilket tal vi skriver i stedet for c .

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$.



4.1 Regel Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$, så er funktionerne $h(x) + k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

4.2 Regel Hvis $h(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så vil stamfunktionerne til $f(x)$ være de funktioner hvis graf vi kan få ved at rykke $h(x)$ -graften op eller ned.

5. Symbol for stamfunktion (ubestemt integral).

Symbolet $\int f(x) dx$

betyder: stamfunktionerne til $f(x)$

og læses: det ubestemte integral af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x) dx$ er lig, så siger vi at vi integrerer $f(x)$

Eksempel: $\int (2x+1) dx = x^2 + x + c$

6. Bestem stamfunktion med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int \square d\square$

Nspire skriver kun én af stamfunktionerne: $\int (7^x) dx = \frac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+ c$.

For at finde stamfunktion til

$$f(x) = 3x - \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

skal vi efter integraltegnet angive at $x > 0$:

$$\int \left\{ 3 \cdot x - \frac{2}{x} \right\} dx |_{x>0} = \frac{3 \cdot x^2}{2} - 2 \cdot \ln(x)$$

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.

k	har stamfunktionen	$k \cdot x$	når k er en konstant	f.eks.	6	har stamfunktionerne	$6x + c$
x	har stamfunktionerne	$\frac{1}{2}x^2 + c$					
x^a	har stamfunktionen	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$		f.eks.	x^3	har stamfunktionerne	$\frac{1}{4}x^4 + c$
				MEN	4^x	har IKKE stamfunktionen	$\frac{1}{x+1} \cdot 4^{x+1}$

x^{-1}	har stamfunktionerne	$\ln(x) + c$	i intervallet	$x > 0$			
$\frac{1}{x}$	har stamfunktionerne	$\ln(x) + c$	i intervallet	$x > 0$	MEN	$\frac{1}{2-x}$	har IKKE stamfunktionen $\ln(2-x)$
e^x	har stamfunktionerne	$e^x + c$					

Hvis:	$f(x)$	har stamfunktionen	$F(x)$			
så:	$k \cdot f(x)$	har stamfunktionen	$k \cdot F(x)$			
f.eks.	$12x^3$	har stamfunktionerne	$12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c$	dvs.	$3x^4 + c$	

Hvis:	$f(x)$	har stamfunktionen	$F(x)$	og	
	$g(x)$	har stamfunktionen	$G(x)$		
så:	$f(x) + g(x)$	har stamfunktionen	$F(x) + G(x)$		
	$f(x) - g(x)$	har stamfunktionen	$F(x) - G(x)$		
f.eks.	$6 - e^x$	har stamfunktionerne	$6x - e^x + c$		
f.eks.	$x + \frac{1}{x}$	har stamfunktionerne	$\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + c$	i intervallet	$x > 0$

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$, hvor $F'(t) = f(t)$. Se ramme 9.

f.eks. $\int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x dx = \int (x^2 + 1)^3 \cdot (x^2 + 1)' dx = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + c$ da $(\frac{1}{4}t^4)' = t^3$

Advarsel: Man kan **IKKE** integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde), f.eks.

$x^3 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot e^x$

$\frac{x^3}{e^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{\frac{1}{4}x^4}{e^x}$

$5 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x \cdot e^x$

8. Bestem $\int f(x) dx$.

Opgave

Bestem $\int 6x^2 dx$.

Besvarelse

$\int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + c = 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 + c = \underline{\underline{2x^3 + c}}$.

9. Integral af sammensat funktion.

Regel for stamfunktion til sammensat funktion:

$$9.1 \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c \quad , \quad \text{hvor } F'(t) = f(t) \text{ .}$$

Bevis for reglen ved hjælp af metoden fra ramme 2:

Vi bruger reglen for at differentiere sammensat funktion:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Da $F(g(x)) + c$ differentieret giver $f(g(x)) \cdot g'(x)$, er $F(g(x)) + c$ en stamfunktion til $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Eksempler på brug af denne regel:

$$9.2 \quad \int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x dx = \int (x^2 + 1)^3 \cdot (x^2 + 1)' dx = \underline{\underline{\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + c}} \quad , \quad \text{da } \left(\frac{1}{4}t^4\right)' = t^3 \text{ .}$$

$$\text{Kontrol for regnefejl (se ramme 2): } \left(\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4(x^2 + 1)^{4-1} \cdot (x^2 + 1)' = (x^2 + 1)^3 \cdot 2x$$

9.3 I følgende eksempel tilføjer vi tallet 2 foran x for at opnå at det der står, er differentialkvotienten af den indre funktion $x^2 + 1$. For at lighedstegnet skal gælde, ganger vi samtidig integralet med $\frac{1}{2}$.

$$\int (x^2 + 1)^3 \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \int (x^2 + 1)^3 \cdot (x^2 + 1)' dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + c}} = \underline{\underline{\frac{1}{8}(x^2 + 1)^4 + c}} \quad , \quad \text{da } \left(\frac{1}{4}t^4\right)' = t^3 \text{ .}$$

$$9.4 \quad \int 3e^{1+3x} dx = \int e^{1+3x} \cdot (1+3x)' dx = \underline{\underline{e^{1+3x} + c}} \quad , \quad \text{da } (e^t)' = e^t \text{ .}$$

$$9.5 \quad x > -1: \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \int \frac{1}{x^3+1} \cdot 3x^2 dx = \int \frac{1}{x^3+1} \cdot (x^3+1)' dx = \underline{\underline{\ln(x^3+1) + c}} \quad ,$$

$$\text{da } \ln'(t) = \frac{1}{t} \quad , \quad t > 0 \text{ .}$$

10. Find en bestemt af stamfunktionerne.

10.1 Opgave (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan:

$$F(-1) = -6.$$

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3(-1) + c = -6$$

så $c = -4$, dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Når vi indsætter et grafpunkts x -koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y -koordinat.

10.2 Opgave (Vi kender en linje der er tangent til stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

Linjen med ligningen $y = x - 5$ er tangent til grafen for F .

Find F .

Besvarelse

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Først udregner vi et punkt der ligger på grafen for F , nemlig det punkt (x_0, y_0) hvori tangenten rører grafen.

Af tangentens ligningen $y = x - 5$ ser vi at tangenthældningen er 1:

$$F'(x_0) = 1$$

$$2x_0 + 3 = 1$$

$$x_0 = -1$$

Når vi indsætter et grafpunkts x -koordinat i forskriften for differentialkvotienten og regner ud, så får vi grafpunktets tangenthældning.

Da $x_0 = -1$ og (x_0, y_0) ligger på linjen med ligningen

$$y = x - 5$$

får vi

$$y_0 = (-1) - 5$$

$$y_0 = -6$$

At en linjes ligning er $y = ax + b$ betyder at for et punkt på linjen kan vi udregne y -koordinaten ved at gange x -koordinaten med a og lægge b til resultatet.

Nu kender vi et punkt på grafen for F . Så kan vi bruge metoden fra opgave 10.1.

Bestemt integral

11. Hvad er det bestemte integral.

Det bestemte integral fra a til b af $f(x)$ er tallet

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Det bestemte integral er et tal. Det ubestemte integral er funktioner.

12. Udregn $\int_a^b f(x) dx$ med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int_{\square}^{\square} (\square) d\square$.

Eksempel

$$\int_{-1}^4 (6x^2 - 5) dx = 105 \quad \text{udregnet med Nspire}$$

13. Udregn $\int_a^b f(x) dx$ uden hjælpemidler.

13.1 Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $[F(x)]_a^b$ som betyder $F(b) - F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x .

13.2 Simpel opgave

Udregn $\int_{-1}^4 (6x^2 - 5) dx$.

Svar

$$\int_{-1}^4 (6x^2 - 5) dx = [2x^3 - 5x]_{-1}^4 = (2 \cdot 4^3 - 5 \cdot 4) - (2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)) = \underline{\underline{105}}$$

Her skal du skrive en stamfunktion til det der står efter integraltegnet. Du skal ikke skrive $+c$.

13.3 Opgave med sammensat funktion

Udregn $\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)^3 dx$.

Svar (Først finder vi stamfunktionen ved hjælp af metoden fra ramme 9)

$$\int (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^3 \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^3 \cdot (2x-1)' dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x-1)^4 + c = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + c$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)^3 dx = \left[\frac{1}{8} (2x-1)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8} (2 \cdot 1 - 1)^4 - \frac{1}{8} (2 \cdot \frac{1}{2} - 1)^4 = \frac{1}{8} \cdot 1^4 - \frac{1}{8} \cdot 0^4 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

Areal og bestemt integral

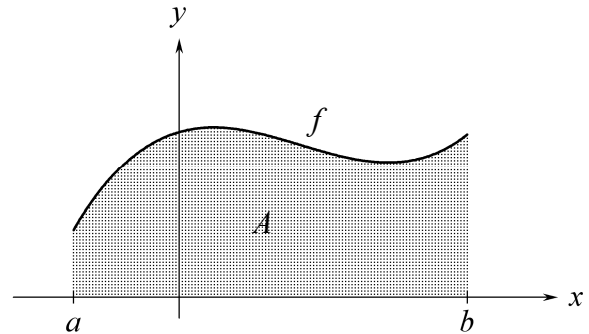
14. Areal og bestemt integral.

14.1 Regel *Areal når graf er over x-aksen*

A er arealet mellem f -graf og x -akse i intervallet $a \leq x \leq b$.

Hvis $f(x) \geq 0$ for $a \leq x \leq b$

er $A = \int_a^b f(x) dx$

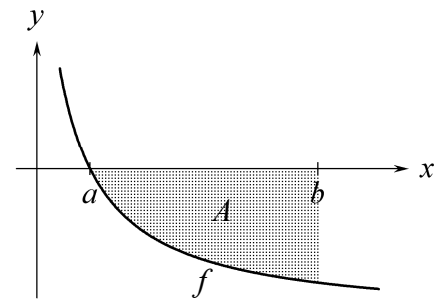


14.2 Regel *Areal når graf er under x-aksen*

A er arealet mellem f -graf og x -akse i intervallet $a \leq x \leq b$.

Hvis $f(x) \leq 0$ for $a \leq x \leq b$

er $A = -\int_a^b f(x) dx$ **Bemærk:** "minus integral" er et positivt tal.

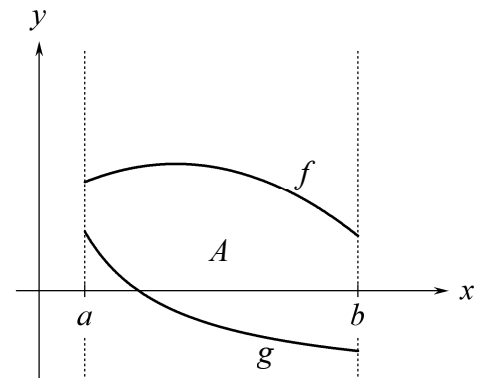


14.3 Regel *Areal mellem grafer*

A er arealet mellem f -graf og g -graf i intervallet $a \leq x \leq b$.

Hvis $f(x) \geq g(x)$ for $a \leq x \leq b$

er $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

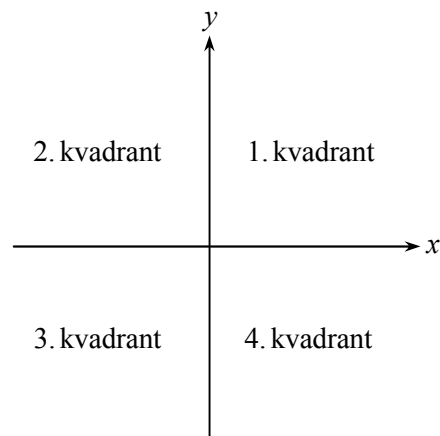


15. Kvadrant.

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer, kan der stå ordet **kvadrant**.

Koordinataksene deler planen op i fire kvadranter.

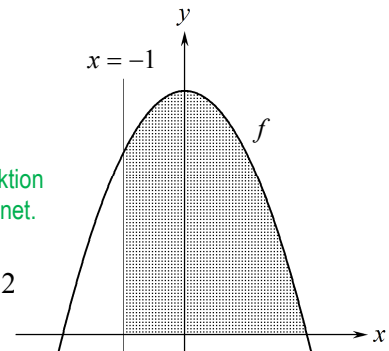
Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



16. Areal mellem graf og x-akse. Uden hjælpemidler.

Opgave

Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = 4 - x^2$ og linjen med ligningen $x = -1$. Grafen for f skærer x-aksen i punkterne $(-2, 0)$ og $(2, 0)$. Bestem arealet af det grå område.



Besvarelse

Det grå område er

området mellem grafen for f og x-aksen i intervallet $-1 \leq x \leq 2$

Da $f(x) \geq 0$ i dette interval, er arealet

Se 14.1

$$\int_{-1}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2$$

Se 13.2

$$= \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(4 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right)$$

$$= 8 - \frac{8}{3} - \left(-4 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3}$$

$$= 9$$

Arealet af det grå område er $\underline{9}$.

Venstre grænse skal stå nederst.

Her skal du skrive en stamfunktion til det der står efter integraltegnet. Du skal ikke skrive +c.

Disse klammer skal du kun bruge hvis opgaven er uden hjælpemidler. Med hjælpemidler skal du kun taste integralet og trykke på enter.

Øvre grænse først, så nedre.

17. Areal mellem graf og x-akse. Med hjælpemidler.

Opgave

$f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$. Bestem areal af området der i første kvadrant afgrænses af f -graf og koordinataksler.

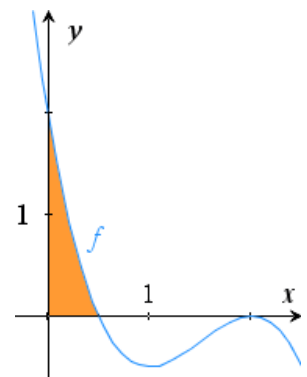
Bemærkning

Nspire tegner f -graf, og vi markerer det søgte areal.

Når vi går fra venstre mod højre, så starter området ved y-aksen, dvs. der hvor x er 0, så integralets nedre grænse er 0.

Området slutter ved det ene fællespunkt for f -graf og x-akse, så dette punkts x -koordinat er integralets øvre grænse. Vi skal løse ligningen $f(x) = 0$ for at finde x -koordinater til fællespunkter for f -graf og x-akse. På figur ser vi at vi skal bruge den af løsningerne der ligger mellem 0 og 1.

$$\text{areal} = \int_0^{0,5} f(x) dx = \int_0^{0,5} (-x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2) dx \quad \text{Se 14.1}$$



Opgave

$f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$. Bestem areal af området der i fjerde kvadrant afgrænses af f -graf og førsteakse.

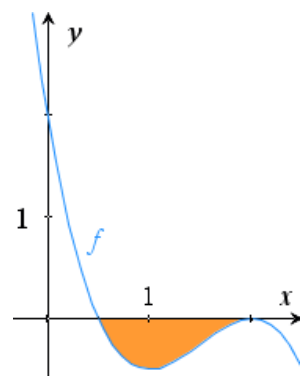
Bemærkning

Nspire tegner f -graf, og vi markerer det søgte areal.

Når vi går fra venstre mod højre, så starter området ved et fællespunkt for f -graf og x-akse, så dette punkts x -koordinat er integralets nedre grænse.

Området slutter ved et fællespunkt for f -graf og x-akse, så dette punkts x -koordinat er integralets øvre grænse. Vi skal løse ligningen $f(x) = 0$ for at finde x -koordinater til fællespunkter for f -graf og x-akse.

$$\text{areal} = -\int_{0,5}^2 f(x) dx = -\int_{0,5}^2 (-x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2) dx \quad \text{Se 14.2}$$



Ramme 17 fortsætter på næste side.

Opgave

$f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$. Bestem areal af området der i første kvadrant afgrænses af f -graf og koordinataksler.

Besvarelse 1 Skal kunnes.

På figur har Nspire tegnet graf for $f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$, og vi har vist området der i første kvadrant er afgrænset af f -graf og koordinataksler. Vi ser at dette område starter ved y -aksen, dvs. ved $x = 0$, så integralets nedre grænse er 0. Området slutter ved et fællespunkt for f -graf og x -akse, så dette punkts x -koordinat er integralets øvre grænse.

Nspire løser ligningen $f(x) = 0$ dvs. ligningen $-x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2 = 0$ mht. x og får at fællespunktens x -koordinater er $x = 0,5$ og $x = 2$.

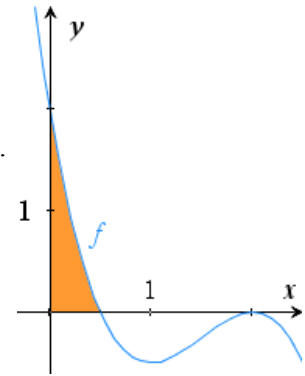
$$\text{solve}(-x^3 + 4,5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 = 0, x) \rightarrow x = 0,5 \text{ or } x = 2.$$

Det søgte areal er altså areal mellem f -graf og x -akse i intervallet $0 \leq x \leq 0,5$.

Da $f(x) \geq 0$ i dette interval, er

$$\text{areal} = \int_0^{0,5} (-x^3 + 4,5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2) dx = 0,421875 \quad \text{udregnet af Nspire}$$

Areal af område der i første kvadrant afgrænses af f -graf og akser, er 0,422.



Se 14.1

Venstre grænse skal stå nederst.

Besvarelse 2 Skal ikke kunnes, men er nyttig for nogen. Samme figur som i besvarelse 1.

$$f(x) := -x^3 + 4,5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2 \rightarrow \text{Udført}$$

Nspire tegner grafen for f . På figuren har vi vist området der i første kvadrant er afgrænset af f -graf og koordinataksler. Vi ser at dette område starter ved y -aksen, dvs. ved $x = 0$, så integralets nedre grænse er 0. Området slutter ved et fællespunkt for f -graf og x -akse, så dette punkts x -koordinat er integralets øvre grænse.

Nspire løser ligningen $f(x) = 0$ og får at fællespunktens x -koordinater er $x = 0,5$ og $x = 2$.

$$\text{solve}(f(x) = 0, x) \rightarrow x = 0,5 \text{ or } x = 2.$$

Det søgte areal er altså arealet mellem f -graf og x -akse i intervallet $0 \leq x \leq 0,5$.

Da $f(x) \geq 0$ i dette interval, er

$$\text{areal} = \int_0^{0,5} f(x) dx = 0,421875 \quad \text{udregnet af Nspire}$$

Arealet af området der i første kvadrant er afgrænset af f -graf og koordinataksler, er 0,422.

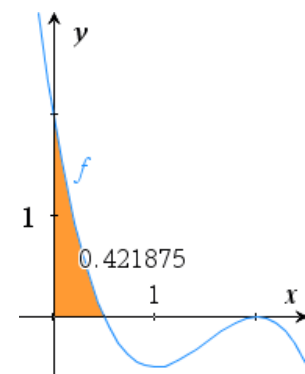
Besvarelse 3 Skal ikke kunnes, men er god kontrol.

Vi taster $f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$ og får Nspire til at tegne graf (se figur).

For denne får vi Nspire til at udregne integral fra $x = 0$ til første fællespunkt for f -graf og x -akse. Når der spørges om nedre grænse, taster vi 0 enter. Når der spørges om øvre grænse, fører vi markør til skæringspunkt så der står skæringspunkt, og klikker.

$$\text{areal} = 0,421875 \approx \underline{0,422}$$

Ovenstående er ikke grundigt nok til at være en brugsanvisning til Nspire. Det er et eksempel på hvordan en besvarelse kan se ud.



18. Areal mellem grafer. Eksempel 1.

Opgave Bestem arealet af det område der afgrænses af graferne for funktionerne

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{3}{2} \cdot x$$

Besvarelse 1 Skal kunnes.

Nspire tegner grafer for $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x$. På figur ser vi at integralets grænser er x-kordinater til grafers skæringspunkter.

Nspire løser ligningen $f(x) = g(x)$, dvs. $x^2 - 1 = \frac{3}{2} \cdot x$ mht. x og får at x-kordinaterne til grafernes skæringspunkter er $-\frac{1}{2}$ og 2 .

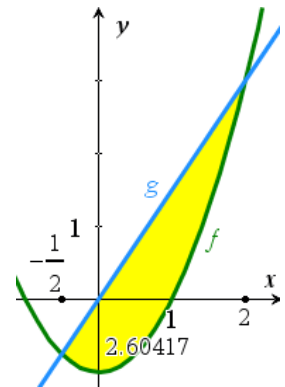
$$\text{solve}(x^2 - 1 = \frac{3}{2} \cdot x, x) \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ or } x = 2$$

ADVARSEL: Det er ikke altid at du skal løse denne ligning. Se ramme 19.

Da $g(x) \geq f(x)$ for $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, er det søgte areal lig

$$\int_{-\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{3}{2} \cdot x - (x^2 - 1) \right) dx = \frac{125}{48} \quad \text{udregnet af Nspire}$$

Vestre grænse skal stå nederst.



Besvarelse 2 Skal ikke kunnes, men er nyttig for nogen.

Nspire tegner **grafer** for funktionerne (se figur)

$$f(x) := x^2 - 1 \rightarrow \text{Udført} \quad g(x) := \frac{3}{2} \cdot x \rightarrow \text{Udført}$$

Nspire løser ligningen $f(x) = g(x)$ mht. x og får at x-kordinater til grafers **skæringspunkter** er $-\frac{1}{2}$ og 2

$$\text{solve}(f(x) = g(x), x) \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ or } x = 2$$

Da $g(x) \geq f(x)$ for $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, er det **søgte areal** lig

$$\int_{-\frac{1}{2}}^2 (g(x) - f(x)) dx = \frac{125}{48} \quad \text{udregnet af Nspire}$$

Besvarelse 3 Skal ikke kunnes, men er god kontrol.

Vi taster

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{3}{2} \cdot x$$

og får Nspire til at tegne grafer (se figur).

For disse får vi Nspire til at udregne areal mellem grafer mellem skæringspunkterne. Når der spørges om nedre og øvre grænse, fører vi markør til skæringspunkt så der står **skæringspunkt** og klikker.

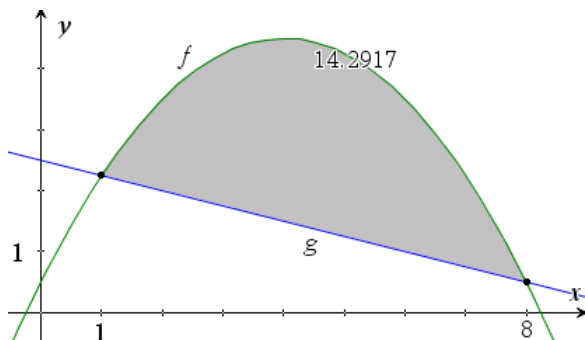
$$\text{areal} = 2,60417 \approx \underline{\underline{2,60}}$$

Hvis grænserne ikke er skæringspunkter, men givne tal, kan vi bruge en formulering som:

udregne areal mellem grafer fra $x=2$ til $x=5$. Når der spørges om nedre og øvre grænse taster vi tallene 2 og 5.

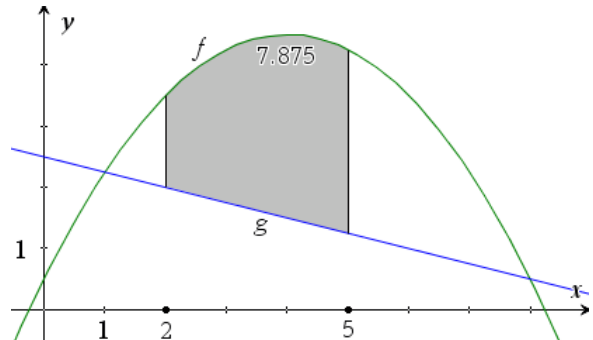
Ovenstående er ikke grundigt nok til at være en brugsanvisning til Nspire. Det er et eksempel på hvordan en besvarelse kan se ud.

19. Areal mellem grafer. Eksempel 2.



$$\text{areal} = \int_1^8 (f(x) - g(x)) dx$$

Her er integralets grænser løsninger til ligningen $f(x) = g(x)$.



$$\text{areal} = \int_2^5 (f(x) - g(x)) dx$$

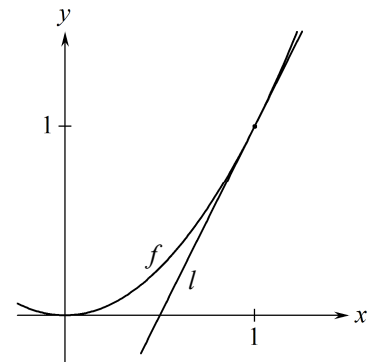
Her er integralets grænser **IKKE** løsninger til ligningen $f(x) = g(x)$.

20. Areal i tilfælde der ikke er standard.

20.1 Opgave Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = x^2$ og linjen $l: y = 2x - 1$. l er tangent til grafen for f i punktet $(1, 1)$.

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med linjen l og førsteaksen en punktmængde M der har et areal.

Bestem arealet af M .



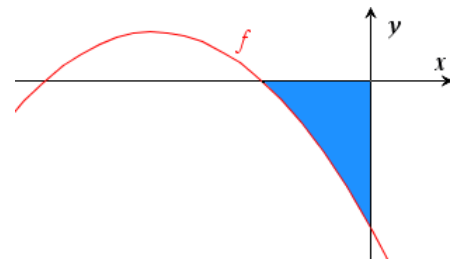
Besvarelse Ligningen $2x - 1 = 0$ har løsningen $x = \frac{1}{2}$, så l skærer x -aksen i punktet $(\frac{1}{2}, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Areal af } M &= (\text{areal mellem } f\text{-graf og } x\text{-akse i intervallet } 0 \leq x \leq 1) - \\ &\quad (\text{areal mellem } l \text{ og } x\text{-akse i intervallet } \frac{1}{2} \leq x \leq 1) \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \left[x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) - \left((1^2 - 1) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}} \end{aligned}$$

20.2 Opgave Funktionen g er en stamfunktion til funktionen f .

Ligningen $f(x) = g(x)$ har netop 2 løsninger.

x	-6	-2	0
$f(x)$	0	0	-3
$g(x)$	0	$\frac{8}{3}$	0



Bestem arealet af det blå område.

Besvarelse Da $f(-6) = 0$ og $f(-2) = 0$, må -6 og -2 være de to løsninger til ligningen $f(x) = g(x)$, så -6 og -2 er x -koordinater til f -grafens skæringspunkter med x -aksen. Det blå areal er altså arealet mellem f -graf og x -akse i intervallet $-2 \leq x \leq 0$.

Da $f(x) \leq 0$ i dette interval, er arealet lig **minus** integralet:

$$\begin{aligned} \text{areal} &= -\int_{-2}^0 f(x) dx \\ &= -[g(x)]_{-2}^0 \quad \text{da } g \text{ er stamfunktion til } f \\ &= -(g(0) - g(-2)) \\ &= -(0 - \frac{8}{3}) \quad \text{ifølge tabel} \\ &= \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

21. Opgave hvor integral og areal er givet.

Opgave Figuren viser to områder med arealer $\frac{10}{3}$ og A . Bestem A når det er oplyst at

$$(1) \int_0^5 f(x) dx = \frac{4}{3}$$

Besvarelse

$$(2) \int_0^3 f(x) dx = \frac{10}{3} \quad \text{da } f(x) \geq 0 \text{ for } 0 \leq x \leq 3$$

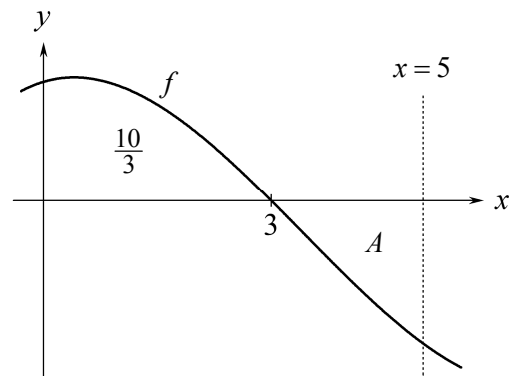
$$(3) \int_3^5 f(x) dx = -A \quad \text{da } f(x) \leq 0 \text{ for } 3 \leq x \leq 5$$

Ifølge indskudssætningen (se 30.1) er

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx$$

Heraf og af (1), (2) og (3) får vi

$$\frac{4}{3} = \frac{10}{3} + (-A) \quad \text{så} \quad \underline{\underline{A = 2}}$$



22. Opdelt område.

Arealet fra a til b er summen af arealerne:

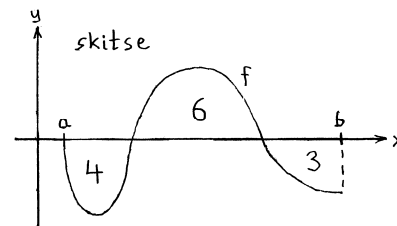
$$4 + 6 + 3 = 13$$

Integralet fra a til b er summen af integralerne:

$$(-4) + 6 + (-3) = -1$$

Areal mellem f -graf og x -akse i intervallet $a \leq x \leq b$ er 13.

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\underline{-1}}$$



23. Fortolk integral. Eksempel 1.

Opgave

Det er oplyst at $\int_{-1}^0 (-3x - x^2) dx = \frac{7}{6}$.

Giv en geometrisk fortolkning af dette.

Besvarelse

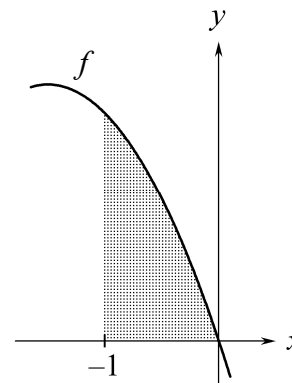
Vi skitserer grafen for funktionen $f(x) = -3x - x^2$.

Da $f(x) \geq 0$ for $-1 \leq x \leq 0$, gælder:

$\int_{-1}^0 f(x) dx$ er arealet mellem f -graf og x -aksen
i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

så $\frac{7}{6}$ er arealet mellem f -graf og x -akse i intervallet $-1 \leq x \leq 0$

dvs. $\frac{7}{6}$ er arealet af det grå område.



24. Fortolk integral. Eksempel 2.

Opgave

Det er oplyst at når $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}$ er $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2}$.

Giv en geometrisk fortolkning af dette.

Besvarelse

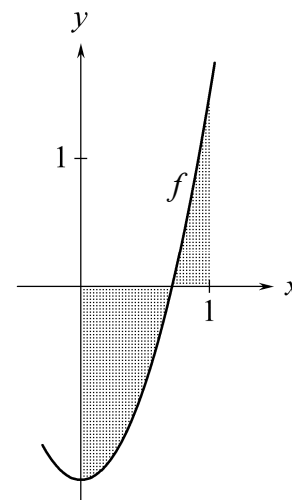
Vi tegner grafen for f .

A = gråt areal under x -akse og B = gråt areal over x -akse

Da (integral fra 0 til 1) = $(-A) + B$

er $-\frac{1}{2} = (-A) + B$ og dermed $A = B + \frac{1}{2}$

Det grå areal under x -aksen er $\frac{1}{2}$ enhed større end det grå areal over.



25. Bestem k så areal er lig et oplyst tal.

Eksempel hvor k er en grænse.

Figuren viser grafen for $f(x) = x^2 + 1$ og linjen med ligningen $x = k$.

Vi vil bestemme et positivt tal k så

$$\text{det grå areal} = \frac{3}{2}$$

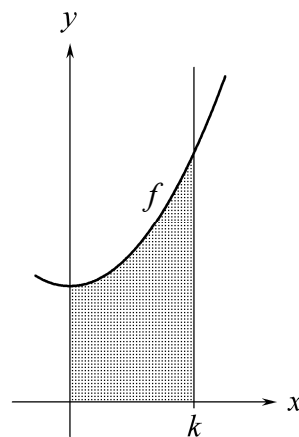
dvs.

$$\int_0^k (x^2 + 1) dx = \frac{3}{2}$$

Nspire løser denne ligning mht. k for $k > 0$ og får

$$k = 1,08004 \approx \underline{\underline{1,080}}$$

$$\text{solve} \left(\int_0^k (x^2 + 1) dx = \frac{3}{2}, k \mid k > 0 \right) \rightarrow k = 1.08004$$



Eksempel hvor k er i forskriften.

Figuren viser grafen for $f(x) = 2 - kx^2$ hvor $0 < k < 2$.

Vi vil bestemme k så

$$\text{det grå areal} = \frac{7}{2}$$

dvs.

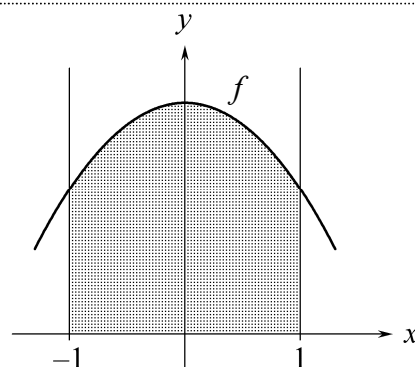
$$\int_{-1}^1 (2 - kx^2) dx = \frac{7}{2}$$

Husk at taste gangetegn mellem k og x .

Nspire løser denne ligning mht. k for $0 < k < 2$ og får

$$k = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$\text{solve} \left(\int_{-1}^1 (2 - k \cdot x^2) dx = \frac{7}{2}, k \mid 0 < k < 2 \right) \rightarrow k = \frac{3}{4}$$



Eksempel hvor k både er en grænse og er i forskriften.

Figuren viser graferne for

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = k - x \quad \text{hvor} \quad k > \frac{5}{4}$$

Vi vil bestemme k så det grå areal er $\frac{4}{3}$.

På figuren ser vi at vi har brug for at kende de to viste skæringspunkter mellem x -aksen og graferne:

$$\text{Vi løser } 1 - x^2 = 0 \text{ og får } x = \pm 1$$

$$\text{Vi løser } k - x = 0 \text{ og får } x = k$$

Heraf og af figuren får vi, da

$$\text{det grå areal} = \frac{4}{3}$$

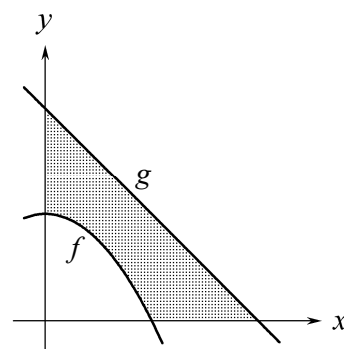
at

$$\int_0^k (k - x) dx - \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$$

Nspire løser denne mht. k for $k > \frac{5}{4}$ og får

$$k = \underline{\underline{2}}$$

$$\text{solve} \left(\int_0^k (k - x) dx - \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}, k \mid k > \frac{5}{4} \right) \rightarrow k = 2$$



For at finde grænser for integralerne løste vi ligningerne $f(x) = 0$ og $g(x) = 0$.

Oftest skal du ikke løse disse ligninger.

I stedet skal du måske løse $f(x) = g(x)$.

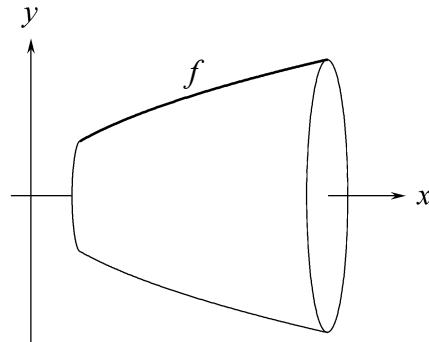
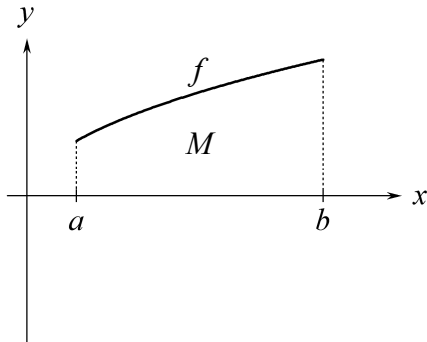
Eller måske fremgår integralets grænser af tekst og figur.

Rumfang af omdrejningslegeme

26. Rumfang af omdrejningslegeme.

Punktmængden M på venstre figur drejer vi 360° om x -aksen. Så får vi omdrejningslegemet på højre figur.

26.1 Formel for rumfang V af omdrejningslegeme: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.



26.2 Opgave

Venstre figur ovenfor viser grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{4}{5}\sqrt{x}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 3.$$

Området M mellem f -grafens og x -aksen drejer vi 360° om x -aksen. Så får vi omdrejningslegemet som vi har tegnet ovenfor til højre.

Bestem rumfanget V af dette omdrejningslegeme.

Besvarelse

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^3 \left(\frac{4}{5}\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{14}{5}\pi \quad \text{udregnet på Nspire}$$

← Venstre grænse skal stå nederst.

27. Rumfang af skål.

Opgave

To funktioner f og g er givet ved

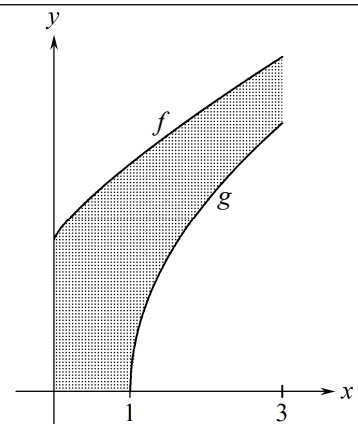
$$f(x) = x^{0,8} + 2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$g(x) = 2,5 \cdot (x-1)^{0,5}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

Det grå område på figuren drejer vi 360° om x -aksen.

Så får vi en glasskål.

Bestem rumfanget af glasset.



Besvarelse

Området mellem f -grafens og x -aksen drejer vi 360° om x -aksen.

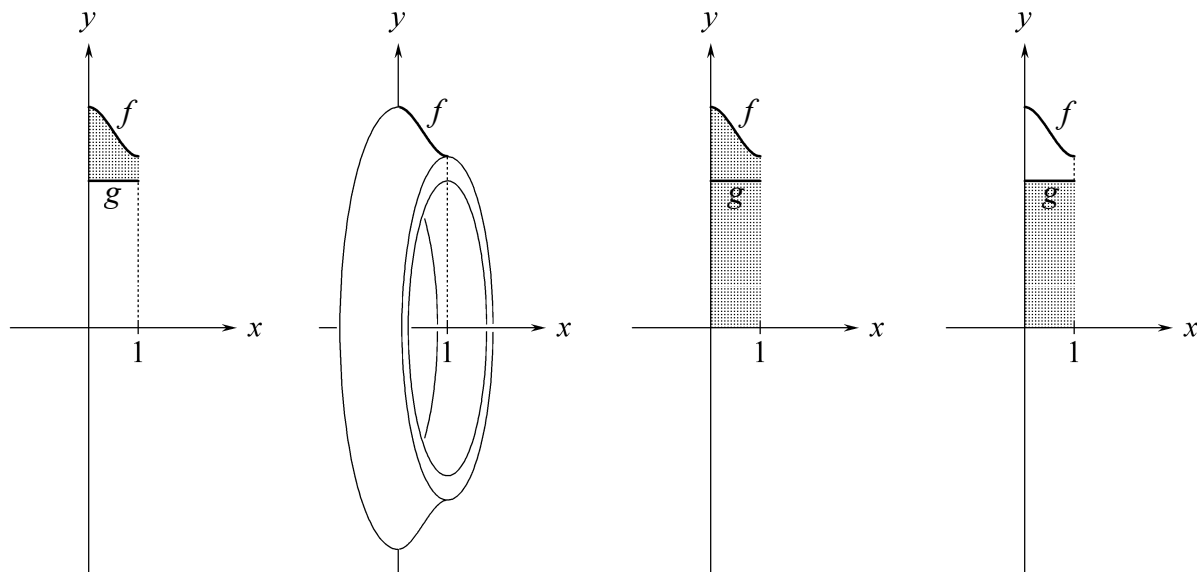
Så får vi et omdrejningslegeme der ikke er en skål. For at gøre det til en skål skal vi fjerne noget. Det vi fjerner, er omdrejningslegemet som vi får ved at dreje området mellem g -grafens og x -aksen 360° om x -aksen. Rumfanget af glasset er

$$\pi \cdot \int_0^3 (x^{0,8} + 2)^2 dx - \pi \cdot \int_1^3 (2,5 \cdot (x-1)^{0,5})^2 dx = 69,8898 \approx \underline{\underline{69,9}} \quad \text{udregnet på Nspire}$$

28. Rumfang af ring.

Opgave To funktioner f og g har forskrifterne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}$ og $g(x) = 3$.

Det grå område på 1. figur drejer vi 360° om x -aksen. Så får vi det ringformede omdrejningslegeme på 2. figur. Bestem rumfanget af denne ring.



Besvarelse Det grå område på 3. figur drejer vi 360° om x -aksen. Så får vi en skive hvis rumfang er

$$\pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \frac{2257}{140} \pi \quad \text{udregnet på Nspire}$$

Herfra skal vi trække hullets rumfang. Hullet er den skive vi får ved at dreje det grå område på 4. figur 360° om x -aksen. Hullets rumfang er altså

$$\pi \int_0^1 (g(x))^2 dx = 9\pi \quad \text{udregnet på Nspire}$$

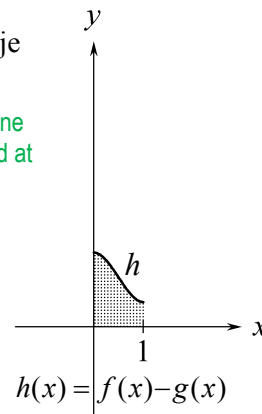
Altså er ringens rumfang $\frac{2257}{140} \pi - 9\pi = \frac{997}{140} \pi$

Hullets rumfang kunne vi have udregnet ved at bruge formlen for rumfang af cylinder.

Advarsel Vi kan IKKE udregne ringens rumfang sådan:

$$\pi \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = \frac{157}{140} \pi$$

Det vi har udregnet her, er rumfanget af det omdrejningslegeme vi får når det grå område på figuren til højre drejes 360° om x -aksen.



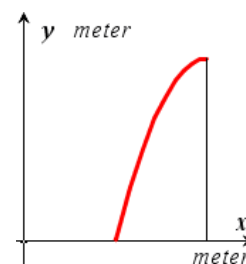
Andre anvendelser

29. Andre anvendelser.

Hvis I i en eksamensopgave skal bruge integral til at udregne andet end graf-afgrænset areal og rumfang af omdrejningslegeme, så vil der i opgaven stå den integralformel I skal bruge. I skal så finde ud af at sætte tal ind i integralformlen. Måske skal I først udregne disse tal. Det I skal udregne med et integral kan både være geometriske størrelser og størrelser fra f.eks. naturvidenskab.

Opgave: Figuren viser en gavl. Langs den buede kant er et rødt lysstofrør der har form som en del af grafen for $f(x) = -x^2 + 8x - 12$. Gavlens bredde er 2 m. Det oplyses at buelængden af grafen for en funktion f i et interval $a \leq x \leq b$ er $\int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx$. Bestem længden af lysstofrøret.

Overvejelser: $f(x) = 0$ har løsningerne 2 og 6 så $a = 2$. Hertil lægger vi gavlens bredde og får $b = 4$. Da $f'(x) = -2x + 8$, skal der under rodtegnet stå $(-2x + 8)^2 + 1$.



Beviser

30. Formler for bestemt integral.

30.1 Sætning (Indskudssætningen for integraler)

Når f har en stamfunktion i et interval, og a , b og c er tal i dette interval, så er

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

30.2 Sætning (Regneregler for bestemt integral)

Når f og g har stamfunktioner i et interval, og a og b er tal i dette interval, og k er et tal, så er

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

30.3 Bevis (Indskudssætningen for integraler)

Lad F være en stamfunktion til f .

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \end{aligned}$$

Ifølge definitionen på bestemt integral.

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætningen bevist.

30.4 Bevis (Regneregler for bestemt integral)

De tre formler kan bevises på næsten samme måde. Vi beviser nummer to.

$f(x)$ har en stamfunktion $F(x)$, og $g(x)$ har en stamfunktion $G(x)$.

Funktionen $H(x) = F(x) - G(x)$ er en stamfunktion til $h(x) = f(x) - g(x)$ da

$$H'(x) = (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = h(x)$$

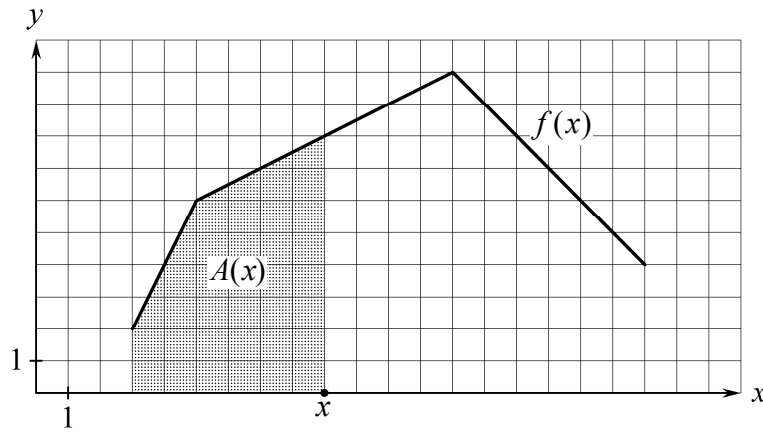
hvor reglen for at differentiere en differens er begrundelsen for andet lighedstegn. Nu er

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) =$$

$$F(b) - F(a) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Hermed er formlen bevist.

31. Hvad er en arealfunktion?



Den viste graf er på en skærm.

Når vi trækker x -prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes arealfunktionen for f .

På billedet ser vi at $A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.

32. **Vigtig regel om arealfunktioner.**

32.1 Sætning

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$

så gælder at

$A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

dvs.

$$A'(x) = f(x)$$

Betyder at grafen ligger på eller over x -aksen.

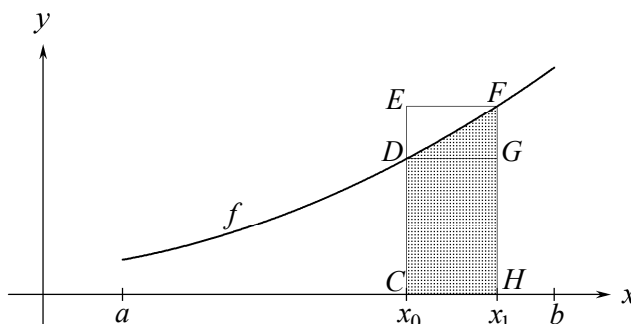


33. Bevis for at $A'(x) = f(x)$.

Sætning (Se ramme 31 og 32)

Når $A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \leq x \leq b$
er $A'(x) = f(x)$

Bevis



$f(x)$ er ikke-negativ og voksende i intervallet $a \leq x \leq b$.
 x_0 og x_1 er to tal i intervallet $a \leq x \leq b$, og $x_0 < x_1$.

Vi beviser kun påstanden for voksende funktioner, men den gælder også for funktioner der ikke er voksende.

Af figuren ser vi at

$$\text{areal af rektangel } CDGH < \text{ areal af grå område} < \text{ areal af rektangel } CEFH$$

Dette kan vi også skrive sådan:

$$f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) < A(x_1) - A(x_0) < f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)$$

Ulighedstegnene gælder stadig når vi dividerer de tre udtryk med $x_1 - x_0$
da $x_1 - x_0$ er positiv:

$$(1) \quad f(x_0) < \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0} < f(x_1)$$

På tilsvarende måde kan vi vise at (1) også gælder når $x_1 < x_0$.

Vi giver x_1 værdier der ligger tættere og tættere på x_0
så $f(x_1)$ kommer vilkårlig tæt på $f(x_0)$.

Så kommer brøken i (1) vilkårlig tæt på $f(x_0)$ (da den ifølge (1) er tættere på $f(x_0)$
end $f(x_1)$ er).

Med symboler kan vi skrive dette sådan:

$$(2) \quad f(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fra differentialregningen ved vi at differentialkvotienten kan udregnes som en grænseværdi på følgende måde:

$$(3) \quad A'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Af (2) og (3) følger at $A'(x_0) = f(x_0)$, og dette er det vi ville bevise.

34. Areal når graf ligger over x -akse.

34.1 Sætning om areal mellem f -graf og x -akse når $f(x) \geq 0$

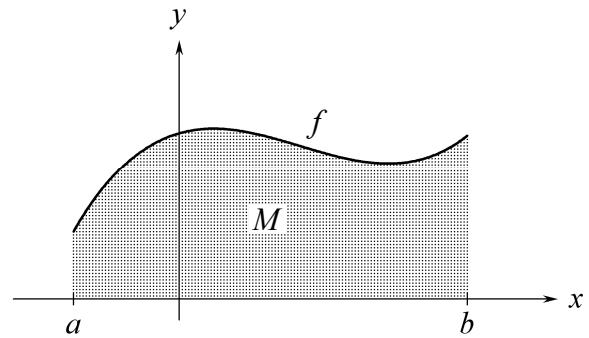
Hvis

$$f(x) \geq 0 \text{ for } a \leq x \leq b \text{ og}$$

M er området mellem f -graf og x -aksen
i intervallet $a \leq x \leq b$

så gælder

$$\int_a^b f(x) dx = \text{arealet af } M$$



Bevis

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$.

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Ifølge sætning 32.1 er $A(x)$ en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$$(*) \quad A(x) = F(x) + c.$$

Nu fås

$$\text{areal af } M = A(b)$$

$$= A(b) - A(a)$$

$$= (F(b) + c) - (F(a) + c)$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

Ifølge definitionen på arealfunktion.

Da $A(a) = 0$.

Ifølge (*).

Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætning 34.1 bevist.

35. Areal mellem grafer.

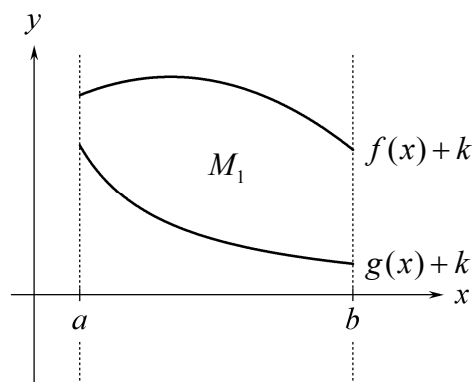
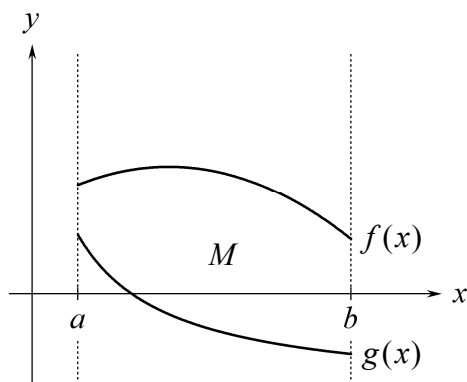
35.1 Sætning om areal mellem grafer

Hvis der i et interval $a \leq x \leq b$ gælder om to funktioner f og g at

$$f(x) \geq g(x)$$

og M er området mellem f -graften og g -graften i dette interval (se venstre figur), så er

$$\text{areal af } M = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Bevis

Vi vælger et tal k så graferne for $f(x)+k$ og $g(x)+k$ ligger over x -aksen. Se højre figur. Nu får vi

$$\begin{aligned} \text{Areal af } M &= \text{areal af } M_1 \\ &= \left(\text{areal mellem } x\text{-akse} \right. \\ &\quad \left. \text{og graf for } f(x)+k \right) - \left(\text{areal mellem } x\text{-akse} \right. \\ &\quad \left. \text{og graf for } g(x)+k \right) \\ &= \int_a^b (f(x)+k) dx - \int_a^b (g(x)+k) dx && \text{ifølge sætning om areal mellem} \\ & && \text{\textit{f}-graf og } x\text{-akse når } f(x) \geq 0 . \\ &= \int_a^b ((f(x)+k) - (g(x)+k)) dx && \text{ifølge formel for} \\ & && \text{integral af differens.} \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

36. Areal når graf ligger under x -akse.

36.1 Sætning om areal mellem f -graf og x -akse når $f(x) \leq 0$

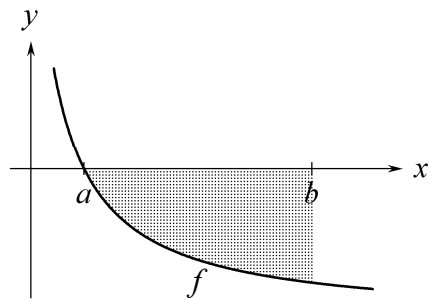
A er arealet mellem f -graf og x -akse
i intervallet $a \leq x \leq b$.

Hvis

$$f(x) \leq 0 \quad \text{for} \quad a \leq x \leq b$$

så er

$$\int_a^b f(x) dx = -A$$



Bevis

Grafen for funktionen $g(x) = 0$ er sammenfaldende med x -aksen,
så A er arealet mellem f -graf og g -graf i intervallet $a \leq x \leq b$.

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \quad \text{ifølge sætning om areal mellem grafer}$$

$$= \int_a^b (0 - f(x)) dx$$

$$= - \int_a^b f(x) dx \quad k = -1 \text{ i regel om integral af } k \cdot f(x)$$

Hermed er sætningen bevist.

Stikordsregister

A

Andre anvendelser	15
areal	7, 8, 10, 11, 12, 13
areal mellem graf og x -akse, med hjælpemidler ..	8
areal mellem graf og x -akse, uden hjælpemidler ..	8
areal mellem grafer	7, 10
areal mellem grafer, bevis	20
areal over x -akse	7
areal under x -akse	7
areal under x -akse, bevis	21
areal, bestem k	13
areal, bevis	19
arealfunktion	17, 19
arealfunktion, bevis	18

B

bestemt integral	6
bestemt integral af sammensat funktion	6
bestemt integral med Nspire	6
bestemt integral uden hjælpemidler	6
buelængde	15

F

fortolk integral	12
------------------------	----

I

indskudssætningen for integraler	16
integral, indskudssætning	16

integral, regneregler	16
integrere	2

K

kvadrant	7
----------------	---

O

omdrejningslegeme	14, 15
opdelt område	12

R

regneregler for integraler	16
rumfang	14
rumfang af omdrejningslegeme	14
rumfang af ring	15
rumfang af skål	14

S

stamfunktion	1, 2, 3, 5, 17
stamfunktion med Nspire	2
stamfunktion til sammensat funktion	4
stamfunktion uden hjælpemidler	3
stamfunktion, grafpunkt givet	5
stamfunktion, tangents givet	5

U

ubestemt integral	2, 4, 6
ubestemt integral af sammensat funktion	4
ubestemt integral uden hjælpemidler	3