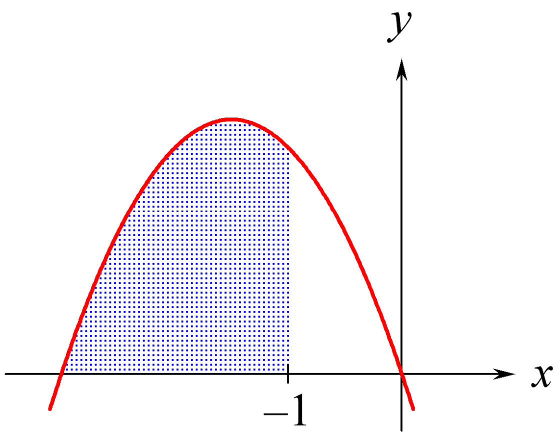
Integralregning

for A-niveau i stx



2013 Karsten Juul

Stamfunktion (ubestemt integral)

1. Hvad er en stamfunktion? ... 1
2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ ... 1
3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ ... 1
4. En funktion har mange stamfunktioner. ... 2
5. Symbol for stamfunktion (ubestemt integral). ... 2
6. Bestem stamfunktion med Nspire. ... 2
7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler. ... 3
8. Bestem $\int f(x)\,dx$. ... 3
9. Integral af sammensat funktion. ... 4
10. Find en bestemt af stamfunktionerne. ... 5

Bestemt integral

11. Hvad er det bestemte integral. ... 6
12. Udregn $\int_a^b f(x)dx$ med Nspire. ... 6
13. Udregn $\int_a^b f(x)dx$ uden hjælpemidler. ... 6

Areal og bestemt interal

14. Areal og bestemt integral. ... 7
15. Kvadrant. ... 7
16. Areal mellem graf og x-akse, 1. eksempel. ... 8
17. Areal mellem graf og x-akse, 2. eksempel. ... 8
18. Areal mellem grafer. Eksempel 1. ... 9
19. Areal mellem grafer. Eksempel 2. ... 9
20. Areal i tilfælde der ikke er standard. ... 10
21. Opgave hvor integral og areal er givet. ... 10
22. Opdelt område. ... 11
23. Fortolk integral. Eksempel 1. ... 11
24. Fortolk integral. Eksempel 2. ... 11
25. Bestem k så areal er lig et oplyst tal. ... 12

Rumfang af omdrejningslegeme

26. Rumfang af omdrejningslegeme. ... 13
27. Rumfang af skål. ... 13
28. Rumfang af ring. ... 14

Beviser

29. Formler for bestemt integral. ... 15
30. Hvad er en arealfunktion? ... 16
31. Vigtig regel om arealfunktioner. ... 16
32. Bevis for at $A'(x) = f(x)$ 17
33. Areal når graf ligger over x-akse. ... 18
34. Areal mellem grafer. ... 19
35. Areal når graf ligger under x-akse. ... 20

Gå ind på http://mat1.dk/noter.htm for at downloade nyeste version af dette hæfte.

Integralregning for A-niveau i stx, © 2013 Karsten Juul

Stamfunktion (ubestemt integral)

1. Hvad er en stamfunktion?

$g(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$

hvis

$g(x)$ differentieret giver $f(x)$

dvs. hvis

$g'(x) = f(x)$

2. Undersøg om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Undersøg om $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at undersøge om $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4x\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + (4x)' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 4 = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 + 4 = x^2 + 4 \neq f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret ikke giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er ikke en stamfunktion til $f(x)$

3. Gør rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$.

<u>Opgave</u>

Gør rede for at $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4$ er en stamfunktion til $f(x) = x^2$.

<u>Besvarelse</u>

For at gøre rede for at $g(x)$ er stamfunktion til $f(x)$,
vil vi differentiere $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + 4\right)' = \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)' + 4' = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right)' + 0 = \tfrac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Da $g(x)$ differentieret giver $f(x)$, gælder:

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

4. En funktion har mange stamfunktioner.

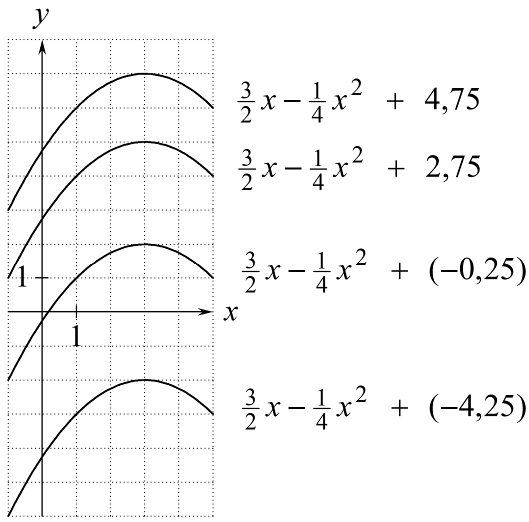
$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 \;+\; 5\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$$\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 \;+\; 8\right)' = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

$\tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 + c$ er stamfunktion til $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$
uanset hvilket tal vi skriver i stedet for c.

I koordinatsystemet har vi tegnet graferne for nogle af stamfunktionerne til $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x$.



4.1 Sætning Hvis $h(x)$ er en af stamfunktionerne til $f(x)$,
så er funktionerne $h(x)+k$ samtlige stamfunktioner til $f(x)$.

4.2 Sætning Hvis $h(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så vil stamfunktionerne til $f(x)$ være de funktioner hvis graf vi kan få ved at rykke $h(x)$-grafen op eller ned.

5. Symbol for stamfunktion (ubestemt integral).

Symbolet $\int f(x)\,dx$

betyder: stamfunktionerne til $f(x)$

og læses: det ubestemte integral af $f(x)$

Når vi finder ud af hvad $\int f(x)\,dx$ er lig, så siger vi at vi integrerer $f(x)$

Eksempel: $\int (2x+1)\,dx = x^2 + x + c$

6. Bestem stamfunktion med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int \square \, d\square$

Nspire skriver kun én af stamfunktionerne: $\int \left(7^x\right) dx = \dfrac{7^x}{\ln(7)}$ Vi må selv tilføje $+c$.

For at finde stamfunktion til

$$f(x) = 3x - \frac{2}{x}\ , \quad x > 0$$

skal vi efter integraltegnet angive at $x > 0$:

$$\int \left(3\cdot x - \frac{2}{x}\right) dx | x>0 = \frac{3\cdot x^2}{2} - 2\cdot \ln(x)$$

Husk at trykke på højre-pilen inden du taster den lodrette streg!

7. Bestem stamfunktion uden hjælpemidler.

k	har stamfunktionen	$k \cdot x$ når k er en konstant	**f.eks.**	6	har stamfunktionerne	$6x+c$
x	har stamfunktionerne	$\frac{1}{2}x^2+c$				
x^a	har stamfunktionen	$\frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}$	**f.eks.**	x^3	har stamfunktionerne	$\frac{1}{4}x^4+c$
			MEN	4^x	har **IKKE** stamfunktionen	$\frac{1}{x+1}\cdot 4^{x+1}$

x^{-1} har stamfunktionerne $\ln(x)+c$ i intervallet $x>0$

$\frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\ln(x)+c$ i intervallet $x>0$ **MEN** $\frac{1}{2-x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\ln(2-x)$

e^x har stamfunktionerne e^x+c

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$
så: $k\cdot f(x)$ har stamfunktionen $k\cdot F(x)$

f.eks. $12x^3$ har stamfunktionerne $12\cdot\frac{1}{4}x^4 + c$ dvs. $3x^4 + c$

Hvis: $f(x)$ har stamfunktionen $F(x)$ og
$g(x)$ har stamfunktionen $G(x)$

så: $f(x)+g(x)$ har stamfunktionen $F(x)+G(x)$
$f(x)-g(x)$ har stamfunktionen $F(x)-G(x)$

f.eks. $6-e^x$ har stamfunktionerne $6x-e^x + c$

f.eks. $x+\frac{1}{x}$ har stamfunktionerne $\frac{1}{2}x^2+\ln(x) + c$ i intervallet $x>0$

Advarsel: Man kan IKKE integrere et udtryk ved at integrere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde), f.eks.

$x^3 \cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{1}{4}x^4 \cdot e^x$

$\frac{x^3}{e^x}$ har **IKKE** stamfunktionen $\frac{\frac{1}{4}x^4}{e^x}$

$5\cdot e^x$ har **IKKE** stamfunktionen $5x\cdot e^x$

8. Bestem $\int f(x)\,dx$.

Opgave

Bestem $\int 6x^2 dx$.

Besvarelse

$$\int 6x^2dx = 6\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1} + c = 6\cdot\frac{1}{3}x^3 + c = \underline{\underline{2x^3 + c}} .$$

9. Integral af sammensat funktion.

<u>Regel for stamfunktion til sammensat funktion:</u>

9.1 $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \;=\; F(g(x)) + c$, hvor $F'(t) = f(t)$.

<u>Bevis for reglen</u> <u>ved hjælp af metoden fra ramme 2:</u>

Vi bruger reglen for at differentiere sammensat funktion:

$$\big(F(g(x)) + c\big)' \;=\; F'(g(x)) \cdot g'(x) \;+\; 0 \;=\; f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Da $F(g(x)) + c$ differentieret giver $f(g(x)) \cdot g'(x)$, er $F(g(x)) + c$ en stamfunktion til $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

<u>Eksempler på brug af denne regel:</u>

9.2 $\int (x^2+1)^3 \cdot 2x\, dx \;=\; \int (x^2+1)^3 \cdot (x^2+1)'\, dx \;=\; \underline{\underline{\tfrac{1}{4}(x^2+1)^4 + c}}$, da $\left(\tfrac{1}{4}t^4\right)' = t^3$.

Kontrol for regnefejl (se ramme 2): $\left(\tfrac{1}{4}(x^2+1)^4\right)' = \tfrac{1}{4} \cdot 4(x^2+1)^{4-1} \cdot (x^2+1)' \;=\; (x^2+1)^3 \cdot 2x$

9.3 I følgende eksempel tilføjer vi tallet 2 foran x for at opnå at det der står, er differentialkvotienten af den indre funktion x^2+1 . For at lighedstegnet skal gælde, ganger vi samtidig integralet med $\tfrac{1}{2}$.

$$\int (x^2+1)^3 \cdot x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \int (x^2+1)^3 \cdot 2x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \int (x^2+1)^3 \cdot (x^2+1)'\, dx \;=$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}(x^2+1)^4 + c \;=\; \underline{\underline{\tfrac{1}{8}(x^2+1)^4 \; + c}} \quad , \quad \text{da } \left(\tfrac{1}{4}t^4\right)' = t^3 .$$

9.4 $\int 3\mathrm{e}^{1+3x} dx \;=\; \int \mathrm{e}^{1+3x} \cdot (1+3x)'\, dx \;=\; \underline{\underline{\mathrm{e}^{1+3x} + c}}$, da $\left(\mathrm{e}^t\right)' = \mathrm{e}^t$.

9.5 $x > -1$: $\int \frac{3x^2}{x^3+1}\, dx \;=\; \int \frac{1}{x^3+1} \cdot 3x^2 dx \;=\; \int \frac{1}{x^3+1} \cdot (x^3+1)' dx \;=\; \underline{\underline{\ln(x^3+1) + c}}$,

da $\ln'(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$.

10. Find en bestemt af stamfunktionerne.

<u>10.1 Opgave</u> (Vi kender et punkt på stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$.

I nogle opgaver er denne oplysning formuleret sådan:

$F(-1) = -6$.

Find F .

<u>Besvarelse</u>

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Da grafen for F går gennem punktet $(-1, -6)$, må

$$(-1)^2 + 3\cdot(-1) + c = -6$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat.

så $c = -4$, dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4 \quad , \quad -\infty < x < \infty}}$$

<u>10.2 Opgave</u> (Vi kender en linje der er tangent til stamfunktionens graf)

F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$.

Det er oplyst at

Linjen med ligningen $y = x - 5$ er tangent til grafen for F .

Find F .

<u>Besvarelse</u>

Da F er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$, findes en konstant c så

$$F(x) = x^2 + 3x + c$$

Først udregner vi et punkt der ligger på grafen for F ,
nemlig det punkt (x_0, y_0) hvori tangenten rører grafen.
Af tangentens ligningen $y = x - 5$ ser vi at tangenthældningen er 1 :

$$F'(x_0) = 1$$
$$2x_0 + 3 = 1$$
$$x_0 = -1$$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften for differentialkvotienten og regner ud, så får vi grafpunktets tangenthældning.

Da $x_0 = -1$ og (x_0, y_0) ligger på linjen med ligningen

$$y = x - 5$$

får vi

$$y_0 = (-1) - 5$$
$$y_0 = -6$$

At en linjes ligning er $y = ax + b$ betyder at for et punkt på linjen kan vi udregne y-koordinaten ved at gange x-koordinaten med a og lægge b til resultatet.

Nu kender vi et punkt på grafen for F . Så kan vi bruge metoden fra opgave 10.1.

Bestemt integral

11. Hvad er det bestemte integral.

Det bestemte integral fra a til b af $f(x)$ er tallet

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b)-F(a)$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Det bestemte integral er et tal. Det ubestemte integral er funktioner.

12. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ med Nspire.

På skabelon-paletten vælger vi integralskabelonen $\int_{\square}^{\square}(\square)\,d\square$.

Eksempel

$$\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx \;=\; 105 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

13. Udregn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ uden hjælpemidler.

13.1 Når vi udregner bestemte integraler uden hjælpemidler, er det praktisk at bruge

symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ som betyder $F(b)-F(a)$

Fordelen er at vi kan skrive stamfunktionen inden vi indsætter grænserne a og b for x.

13.2 Simpel opgave

Udregn $\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx$.

Svar

$$\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx \;=\; \left[2x^3-5x\right]_{-1}^{4} \;=\; \left(2\cdot4^3-5\cdot4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right) \;=\; \underline{\underline{105}}$$

13.3 Opgave med sammensat funktion

Udregn $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)^3\,dx$.

Svar (*Først finder vi stamfunktionen ved hjælp af metoden fra ramme 9*)

$$\int(2x-1)^3\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int(2x-1)^3\cdot2\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int(2x-1)^3\cdot(2x-1)'\,dx \;=$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}(2x-1)^4+c \;=\; \tfrac{1}{8}(2x-1)^4+c$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)^3\,dx \;=\; \left[\tfrac{1}{8}(2x-1)^4\right]_0^1 \;=\; \tfrac{1}{8}(2\cdot1-1)^4-\tfrac{1}{8}(2\cdot\tfrac{1}{2}-1)^4 \;=\; \tfrac{1}{8}\cdot1^4-\tfrac{1}{8}\cdot0^4 \;=\; \underline{\underline{\tfrac{1}{8}}}$$

Areal og bestemt interal

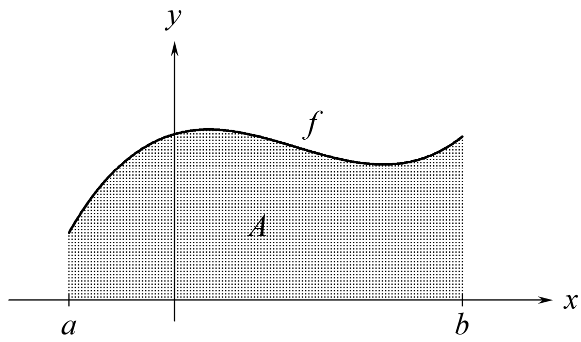
14. Areal og bestemt integral.

14.1 Sætning *Areal når graf er over x-aksen*

A er arealet mellem f-graf og x-akse
i intervallet $a \le x \le b$.

Hvis $f(x) \ge 0$ for $a \le x \le b$

er $A = \int_a^b f(x)\,dx$



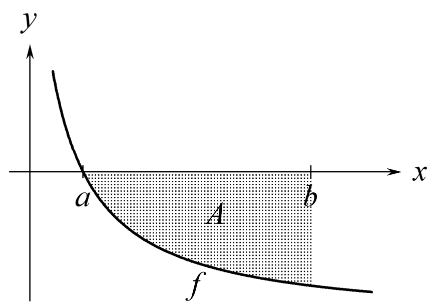
14.2 Sætning *Areal når graf er under x-aksen*

A er arealet mellem f-graf og x-akse
i intervallet $a \le x \le b$.

Hvis $f(x) \le 0$ for $a \le x \le b$

er $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

Bemærk: minus integralet
er et positivt tal.

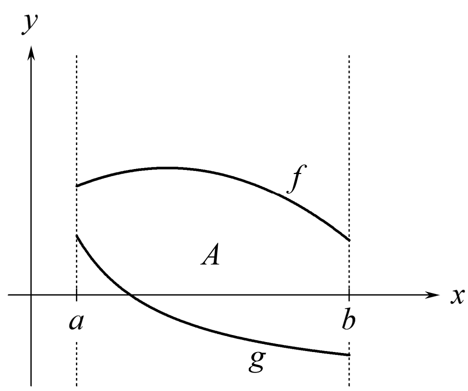


14.3 Sætning *Areal mellem grafer*

A er arealet mellem f-graf og g-graf
i intervallet $a \le x \le b$.

Hvis $f(x) \ge g(x)$ for $a \le x \le b$

er $A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$

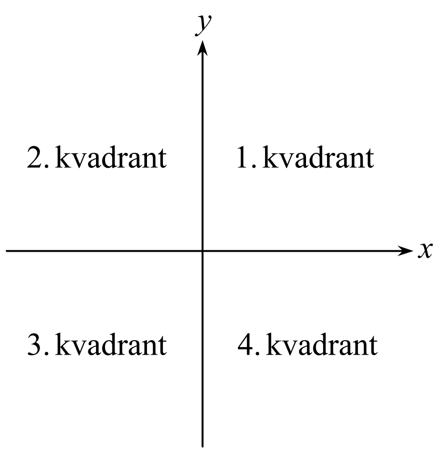


15. Kvadrant.

I opgaver hvor vi skal bestemme arealer,
kan der stå ordet **kvadrant**.

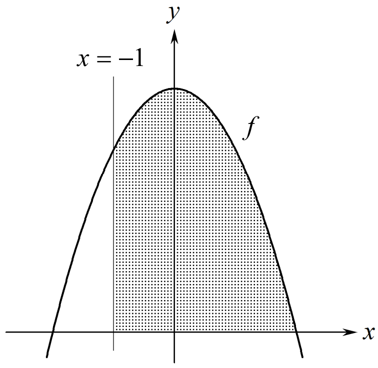
Koordinatakserne deler planen op i fire kvadranter.

Figuren viser hvad de fire kvadranter hedder.



16. Areal mellem graf og x-akse, 1. eksempel.

Opgave



Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - x^2$$

og linjen med ligningen $x = -1$. Grafen for f skærer x-aksen i punkterne $(-2\ ,\ 0)$ og $(2\ ,\ 0)$.

Bestem arealet af det grå område.

Besvarelse

Det grå område er

området mellem grafen for f og x-aksen i intervallet $-1 \le x \le 2$.

Da $f(x) \ge 0$ i dette interval, er arealet

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(4-x^2)\,dx &= \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(4\cdot 2 - \tfrac{1}{3}\cdot 2^3\right) - \left(4\cdot(-1) - \tfrac{1}{3}\cdot(-1)^3\right) \\ &= 8 - \tfrac{8}{3} - \left(-4 + \tfrac{1}{3}\right) \\ &= 8 - \tfrac{8}{3} + 4 - \tfrac{1}{3} \\ &= 9\end{aligned}$$

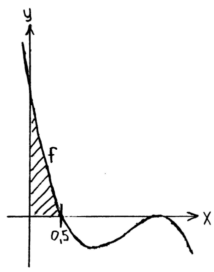
Arealet af det grå område er $\underline{\underline{9}}$.

17. Areal mellem graf og x-akse, 2. eksempel.

Opgave

En funktion f har forskriften $f(x) = -x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2$.

Bestem arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinatakserne.



Bemærkning

På Nspire får vi grafen tegnet i et passende udsnit af koordinatsystemet.
Ud fra dette tegner vi en skitse som er en del af besvarelsen.
På skitsen skriver vi relevante tal og markerer det areal vi skal finde.

Besvarelse

Det søgte areal er skraveret på skitsen (fra Nspire). På skitsen ser vi at vi skal bruge x-koordinaten til det venstre af de to fællespunkter mellem grafen og x-aksen, så vi får Nspire til at løse ligningen $-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2 = 0$ mht. x og får $x = 0{,}5$ eller $x = 2$.

Det søgte areal er altså arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $0 \le x \le 0{,}5$, dvs.

$$\int_{0}^{0,5}\left(-x^3 + 4{,}5x^2 - 6x + 2\right)dx = 0{,}421875 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

Arealet af det område der i første kvadrant afgrænses mellem grafen for f og koordinatakserne, er $\underline{\underline{0{,}422}}$.

18. Areal mellem grafer. Eksempel 1.

Opgave

Bestem arealet af det område der afgrænses af graferne for funktionerne

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = \tfrac{3}{2} \cdot x$$

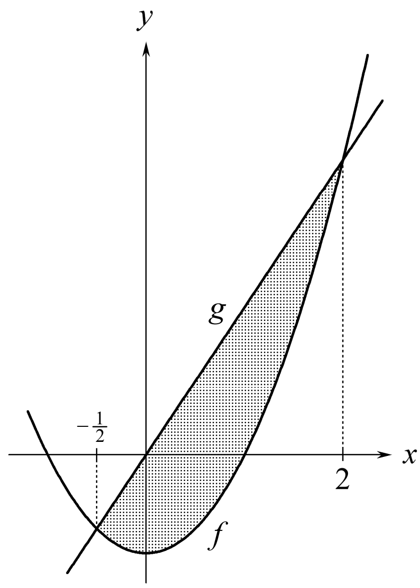
Besvarelse

Nspire tegner graferne for f og g .

Nspire løser ligningen $x^2 - 1 = \tfrac{3}{2} \cdot x$ mht. x og får at x-koordinaterne til grafernes skæringspunkter er $-\tfrac{1}{2}$ og 2 .

Da $g(x) \geq f(x)$ for $-\tfrac{1}{2} \leq x \leq 2$, er det søgte areal lig $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} \left(\tfrac{3}{2} \cdot x - (x^2 - 1) \right) dx$.

Nspire udregner dette integral og får at arealet er $\underline{\underline{\dfrac{125}{48}}}$.



19. Areal mellem grafer. Eksempel 2.

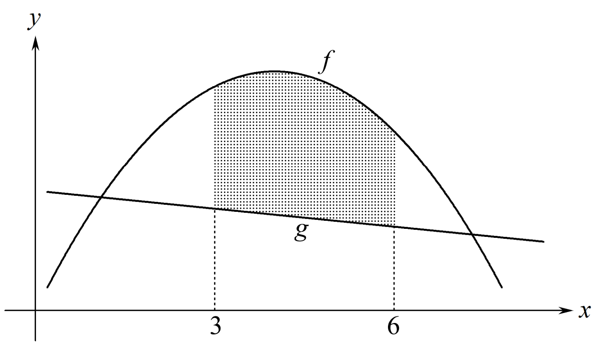
Opgave

Der er givet funktionerne $f(x) = -\tfrac{1}{4} x^2 + 2x$ og $g(x) = -0{,}1x + 2$.

Bestem arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g i intervallet [3 ; 6] .

Besvarelse

Se skitse (fra Nspire).



areal mellem f-graf og g-graf i [3 ; 6] =

$$\int_3^6 \left((-\tfrac{1}{4} x^2 + 2x) - (-0{,}1x + 2) \right) dx \; = \; 6{,}60000 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

Dvs.

Arealet af det område der afgrænses mellem graferne for f og g er $\underline{\underline{6{,}60}}$.

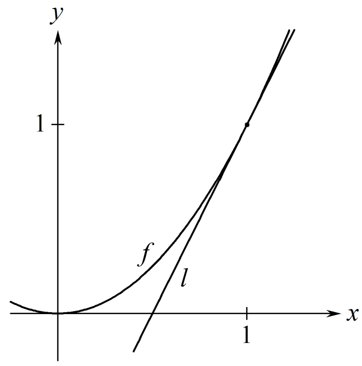
20. Areal i tilfælde der ikke er standard.

Opgave

Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = x^2$ og linjen l: $y = 2x - 1$. Linjen l er tangent til grafen for f i punktet $(1, 1)$.

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med linjen l og førsteaksen en punktmængde M der har et areal.

Bestem arealet af M.



Besvarelse

Ligningen $2x - 1 = 0$ har løsningen $x = \frac{1}{2}$, så l skærer x-aksen i punktet $(\frac{1}{2}, 0)$.

Areal af M = (areal mellem f-graf og x-akse i intervallet $0 \le x \le 1$) − (areal mellem l og x-akse i intervallet $\frac{1}{2} \le x \le 1$)

$$= \int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= (\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3) - \left((1^2 - 1) - ((\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{2})\right) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \underline{\underline{\tfrac{1}{12}}}$$

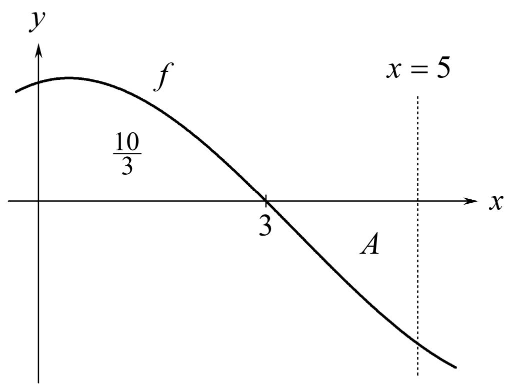
21. Opgave hvor integral og areal er givet.

Opgave

Figuren viser to områder med arealer $\frac{10}{3}$ og A. Det er oplyst at

(1) $\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$

Bestem A.



Besvarelse

Da $f(x) \ge 0$ for $0 \le x \le 3$ er

(2) $\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$

Da $f(x) \le 0$ for $3 \le x \le 5$ er

(3) $\int_3^5 f(x)\,dx = -A$

Ifølge indskudssætningen (se 29.1) er

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx$$

I denne ligning erstatter vi de tre integraler med værdierne fra (1), (2) og (3) og får

$$\tfrac{4}{3} = \tfrac{10}{3} + (-A)$$

Heraf følger at $\underline{\underline{A = 2}}$.

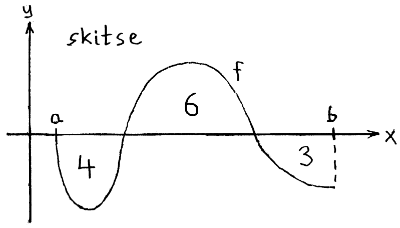
22. Opdelt område.

Arealet fra a til b er summen af <u>arealerne</u>:

$4+6+3 \;=\; 13$

Integralet fra a til b er summen af <u>integralerne</u>:

$(-4)+6+(-3) \;=\; -1$



Areal mellem f-graf og x-akse i intervallet $a \le x \le b$ er $\underline{\underline{13}}$.

$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \underline{\underline{-1}}$

23. Fortolk integral. Eksempel 1.

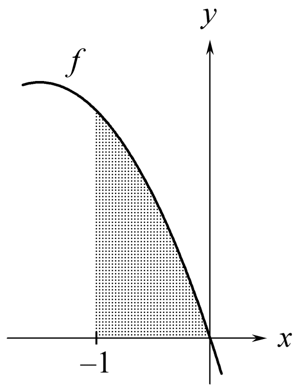
<u>**Opgave**</u>

Det er oplyst at $\int_{-1}^{0} (-3x-x^2)\,dx \;=\; \frac{7}{6}$.

Giv en geometrisk fortolkning af dette.

<u>**Besvarelse**</u>

Vi skitserer grafen for funktionen $f(x)=-3x-x^2$.



Da $f(x) \ge 0$ for $-1 \le x \le 0$, gælder:

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ er arealet mellem f-grafen og x-aksen i intervallet $-1 \le x \le 0$

så $\underline{\underline{\frac{7}{6} \text{ er arealet mellem } f\text{-graf og } x\text{-akse i intervallet } -1 \le x \le 0}}$

dvs. $\underline{\underline{\frac{7}{6} \text{ er arealet af det grå område}}}$.

24. Fortolk integral. Eksempel 2.

<u>**Opgave**</u>

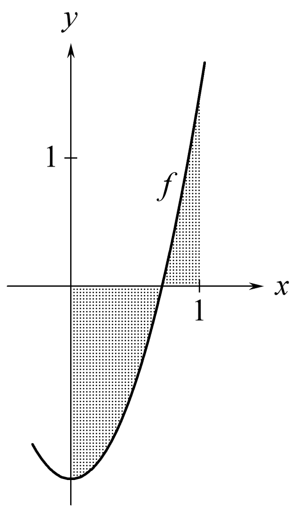
Det er oplyst at når $f(x)=3x^2-\frac{3}{2}$ er $\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; -\frac{1}{2}$.

Giv en geometrisk fortolkning af dette.

<u>**Besvarelse**</u>

Vi tegner grafen for f .

A = gråt areal under x-akse og B = gråt areal over x-akse



Da (integral fra 0 til 1) $=\; (-A) + B$

er $-\frac{1}{2} \;=\; (-A) + B$ og dermed $A \;=\; B + \frac{1}{2}$

$\underline{\underline{\text{Det grå areal under } x\text{-aksen er } \tfrac{1}{2} \text{ enhed større end det grå areal over.}}}$

25. Bestem k så areal er lig et oplyst tal.

<u>Eksempel hvor k er en grænse.</u>

Figuren viser grafen for $f(x) = x^2 + 1$ og linjen med ligningen $x = k$.
Vi vil bestemme et positivt tal k så

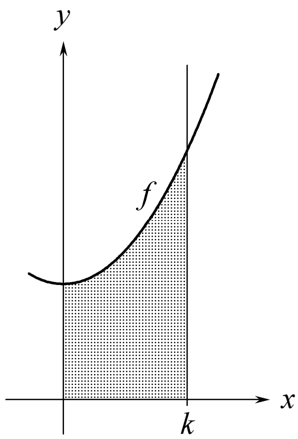
$$\text{det grå areal} = \frac{3}{2}$$

dvs.

$$\int_0^k (x^2+1)\,dx = \frac{3}{2}$$

Nspire løser denne ligning mht. k for $k > 0$ og får

$$k = \underline{\underline{1{,}08004}}$$



<u>Eksempel hvor k er i forskriften.</u>

Figuren viser grafen for $f(x) = 2 - kx^2$ hvor $0 < k < 2$.
Vi vil bestemme k så

$$\text{det grå areal} = \frac{7}{2}$$

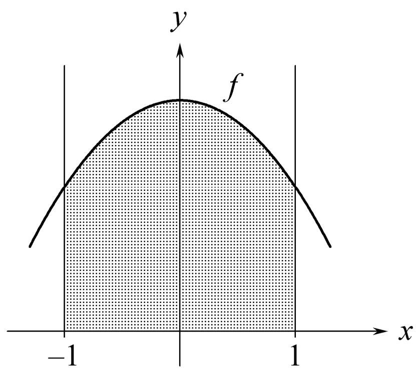
dvs.

$$\int_{-1}^1 (2 - kx^2)\,dx = \frac{7}{2}$$

Husk at taste gangetegn mellem k og x .

Nspire løser denne ligning mht. k for $0 < k < 2$ og får

$$k = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$



<u>Eksempel hvor k både er en grænse og er i forskriften.</u>

Figuren viser graferne for

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = k - x \quad \text{hvor} \quad k > \frac{5}{4} .$$

Vi vil bestemme k så det grå areal er $\frac{4}{3}$.

På figuren ser vi at vi har brug for at kende de to viste skærings-punkter mellem x-aksen og graferne:

Nspire løser $1 - x^2 = 0$ og får $x = \pm 1$

Nspire løser $k - x = 0$ og får $x = k$

Heraf og af figuren får vi, da

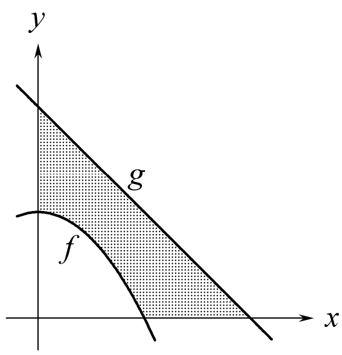
$$\text{det grå areal} = \frac{4}{3}$$

at

$$\int_0^k (k-x)\,dx - \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{4}{3}$$

Nspire løser denne mht. k for $k > \frac{5}{4}$ og får

$$k = \underline{\underline{2}}$$



For at finde grænser for integralerne løste vi ligningerne $f(x) = 0$ og $g(x) = 0$.

Ofte skal du ikke løse disse ligninger.

I stedet skal du måske løse $f(x) = g(x)$.

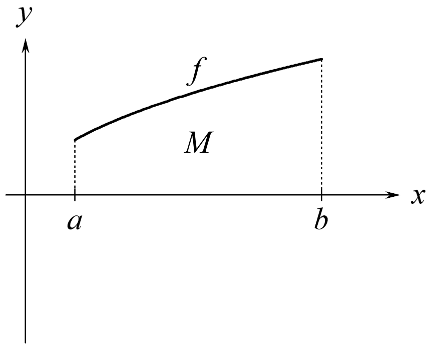
Eller måske fremgår integralets grænser af tekst og figur.

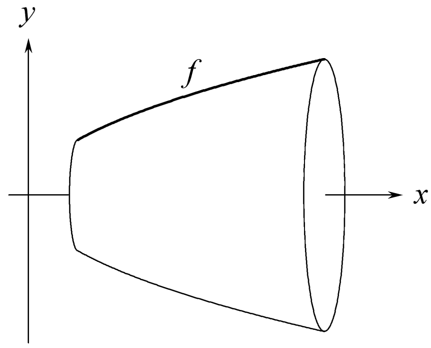
Rumfang af omdrejningslegeme

26. Rumfang af omdrejningslegeme.

Punktmængden M på venstre figur drejer vi $360°$ om x-aksen.
Så får vi omdrejningslegemet på højre figur.

26.1 Formel for rumfang V af omdrejningslegeme: $V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$.





26.2 Opgave

Venstre figur ovenfor viser grafen for funktionen

$$f(x) = \tfrac{4}{5}\sqrt{x} \ , \quad \tfrac{1}{2} \le x \le 3 \ .$$

Området M mellem f-grafen og x-aksen drejer vi $360°$ om x-aksen. Så får vi omdrejningslegemet som vi har tegnet ovenfor til højre.

Bestem rumfanget V af dette omdrejningslegeme.

Besvarelse

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(\tfrac{4}{5}\sqrt{x}\right)^2 dx = \underline{\underline{\tfrac{14}{5}\pi}}$$ *udregnet på Nspire*

27. Rumfang af skål.

Opgave

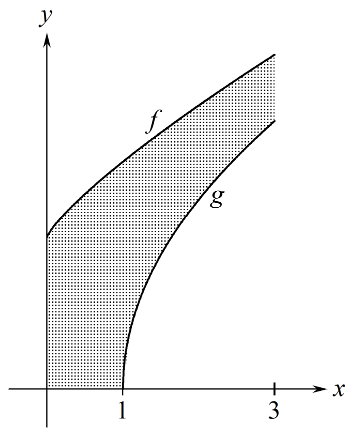
To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^{0,8} + 2 \ , \quad 0 \le x \le 3$$

$$g(x) = 2{,}5 \cdot (x-1)^{0,5} \ , \quad 1 \le x \le 3$$

Det grå område på figuren drejer vi $360°$ om x-aksen.
Så får vi en glasskål.

Bestem rumfanget af glasset.



Besvarelse

Området mellem f-grafen og x-aksen drejer vi $360°$ om x-aksen.
Så får vi et omdrejningslegeme der ikke er en skål. For at gøre det til en skål skal vi fjerne noget. Det vi fjerner, er omdrejningslegemet som vi får ved at dreje området mellem g-grafen og x-aksen $360°$ om x-aksen. Rumfanget af glasset er

$$\pi \cdot \int_0^3 (x^{0,8}+2)^2 \, dx \ - \ \pi \cdot \int_1^3 (2{,}5 \cdot (x-1)^{0,5})^2 \, dx = 69{,}8898 \approx \underline{\underline{69{,}9}}$$ *udregnet på Nspire*

28. Rumfang af ring.

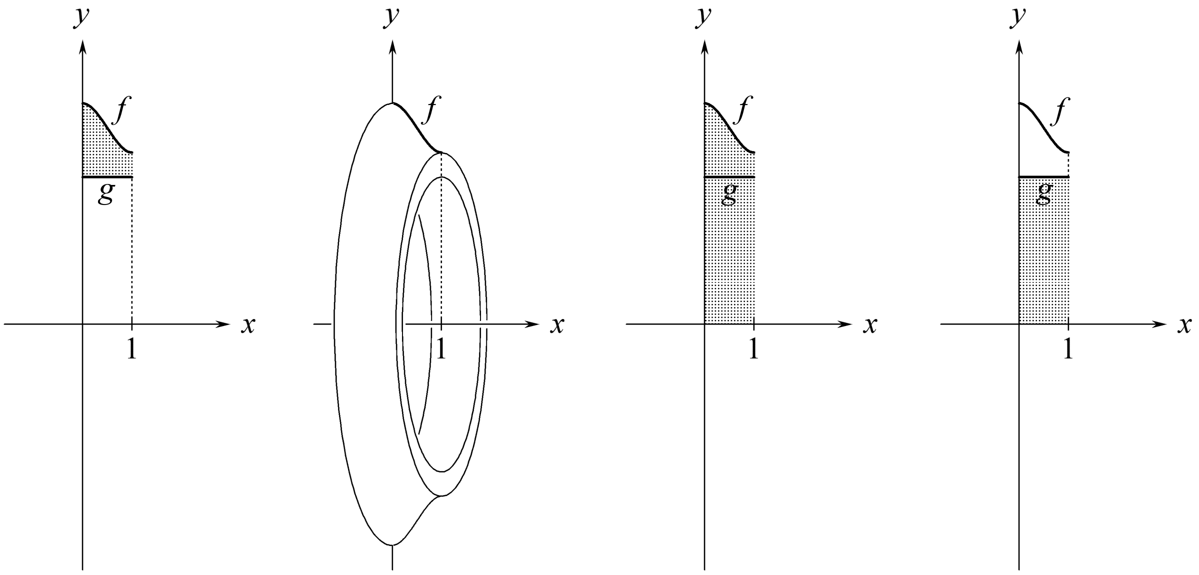
Opgave

To funktioner f og g har forskrifterne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}$ og $g(x) = 3$.

Det grå område på 1. figur drejer vi 360° om x-aksen.

Så får vi det ringformede omdrejningslegeme på 2. figur.

Bestem rumfanget af denne ring.



Besvarelse

Det grå område på 3. figur drejer vi 360° om x-aksen. Så får vi en skive hvis rumfang er

$$\pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx \;=\; \tfrac{2257}{140}\pi \qquad \textit{udregnet på Nspire}$$

Herfra skal vi trække hullets rumfang. Hullet er den skive vi får ved at dreje det grå område på 4. figur 360° om x-aksen. Hullets rumfang er altså

$$\pi\int_0^1 \left(g(x)\right)^2 dx \;=\; 9\pi \qquad \textit{udregnet på Nspire}$$

Altså er ringens rumfang

$$\tfrac{2257}{140}\pi - 9\pi = \underline{\underline{\tfrac{997}{140}\pi}}$$

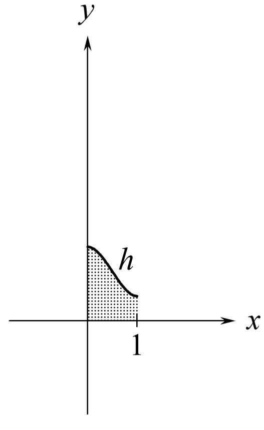
(Hullets rumfang kunne vi have udregnet ved at bruge formlen for rumfang af cylinder).

Advarsel

Vi kan IKKE udregne ringens rumfang sådan:

$$\pi\int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx \;=\; \underline{\underline{\tfrac{157}{140}\pi}}$$

Det vi har udregnet her, er rumfanget af det omdrejningslegeme vi får når det grå område på figuren til højre drejes 360° om x-aksen.



$h(x) = f(x) - g(x)$

Beviser

29. Formler for bestemt integral.

29.1 Sætning (Indskudssætningen for integraler)

Når f har en stamfunktion i et interval, og a, b og c er tal i dette interval, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

29.2 Sætning (Regneregler for bestemt integral)

Når f og g har stamfunktioner i et interval, og a og b er tal i dette interval, og k er et tal, så er

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

29.3 Bevis (Indskudssætningen for integraler)

Lad F være en stamfunktion til f.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$= F(c)-F(a) + F(b)-F(c)$ Ifølge definitionen på bestemt integral.

$= F(b)-F(a)$

$= \int_a^b f(x)\,dx$ Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætningen bevist.

29.4 Bevis (Regneregler for bestemt integral)

De tre formler kan bevises på næsten samme måde. Vi beviser nummer to.

$f(x)$ har en stamfunktion $F(x)$, og $g(x)$ har en stamfunktion $G(x)$.

Funktionen $H(x)=F(x)-G(x)$ er en stamfunktion til $h(x)=f(x)-g(x)$ da

$$H'(x) = \big(F(x)-G(x)\big)' = F'(x)-G'(x) = f(x)-g(x) = h(x)$$

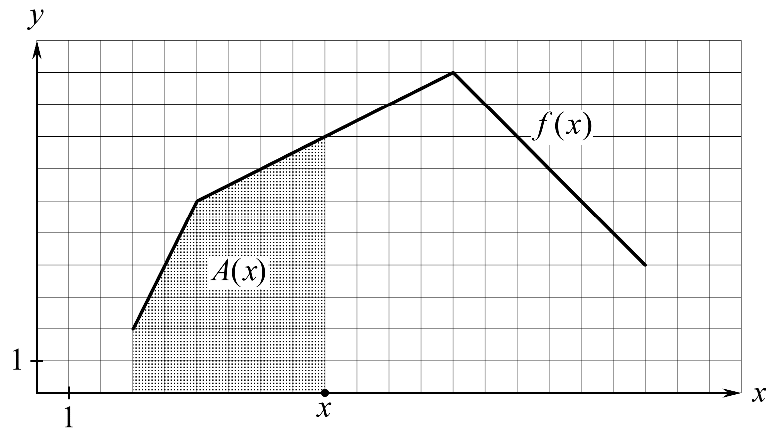
hvor reglen for at differentiere en differens er begrundelsen for andet lighedstegn. Nu er

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx = \int_a^b h(x)\,dx = H(b)-H(a) = \big(F(b)-G(b)\big) - \big(F(a)-G(a)\big) =$$

$$F(b)-F(a) - (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Hermed er formlen bevist.

30. Hvad er en arealfunktion?



Den viste graf er på en skærm.

Når vi trækker x-prikken mod højre, bliver det grå område større.

$A(x)$ er arealet af det grå område.

$A(x)$ kaldes <u>arealfunktionen</u> for f .

På billedet ser vi at $A(9) = 36$ og $A(11) = 53$.

31. Vigtig regel om arealfunktioner.

31.1 Sætning

Betyder at grafen ligger på eller over x-aksen.

Når

$A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$

så gælder at

$A(x)$ er en <u>stamfunktion</u> til $f(x)$

dvs.

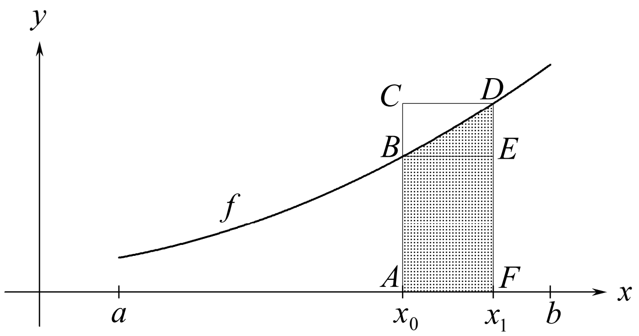
$$A'(x) = f(x)$$

32. Bevis for at $A'(x) = f(x)$.

Sætning (Se ramme 30 og 31)

Når $A(x)$ er arealfunktionen for en ikke-negativ funktion $f(x)$, $a \le x \le b$
er $A'(x) = f(x)$

Bevis



$f(x)$ er ikke-negativ og voksende i intervallet $a \le x \le b$.
x_0 og x_1 er to tal i intervallet $a \le x \le b$, og $x_0 < x_1$.

Vi beviser kun påstanden for voksende funktioner, men den gælder også for funktioner der ikke er voksende.

Af figuren ser vi at

areal af rektangel *ABEF* < areal af grå område < areal af rektangel *ACDF*

Dette kan vi også skrive sådan:

$$f(x_0)\cdot(x_1 - x_0) \quad < \quad A(x_1) - A(x_0) \quad < \quad f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)$$

Ulighedstegnene gælder stadig når vi dividerer de tre udtryk med $x_1 - x_0$
da $x_1 - x_0$ er positiv:

(1) $$f(x_0) \quad < \quad \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0} \quad < \quad f(x_1)$$

På tilsvarende måde kan vi vise at (1) også gælder når $x_1 < x_0$.

Vi giver x_1 værdier der ligger tættere og tættere på x_0
så $f(x_1)$ kommer vilkårlig tæt på $f(x_0)$.

Så kommer brøken i (1) vilkårlig tæt på $f(x_0)$ (da den ifølge (1) er tættere på $f(x_0)$ end $f(x_1)$ er).

Med symboler kan vi skrive dette sådan:

(2) $$f(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fra differentialregningen ved vi at differentialkvotienten kan udregnes som en grænseværdi på følgende måde:

(3) $$A'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{A(x_1) - A(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Af (2) og (3) følger at $A'(x_0) = f(x_0)$, og dette er det vi ville bevise.

33. Areal når graf ligger over x-akse.

33.1 Sætning om areal mellem f-graf og x-akse når $f(x) \geq 0$

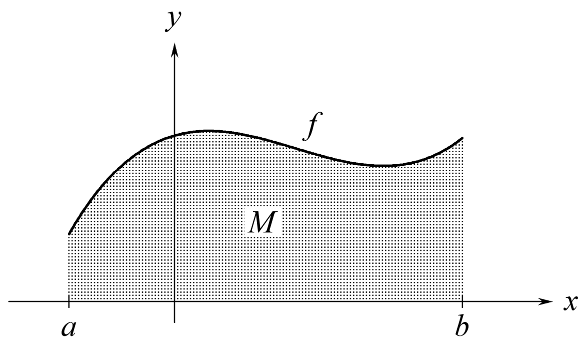
Hvis

$f(x) \geq 0$ for $a \leq x \leq b$ og

M er området mellem f-grafen og x-aksen i intervallet $a \leq x \leq b$

så gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{arealet af } M$$



Bevis

$A(x)$ er arealfunktionen for $f(x)$.
$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Ifølge sætning 31.1 er $A(x)$ en stamfunktion til $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant c så

$(*) \quad A(x) = F(x) + c$.

Nu fås

areal af M	$= A(b)$	Ifølge definitionen på arealfunktion.
	$= A(b) - A(a)$	Da $A(a) = 0$.
	$= \big(F(b)+c\big) - \big(F(a)+c\big)$	Ifølge $(*)$.
	$= F(b) - F(a)$	
	$= \int_a^b f(x)\,dx$	Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætning 33.1 bevist.

34. Areal mellem grafer.

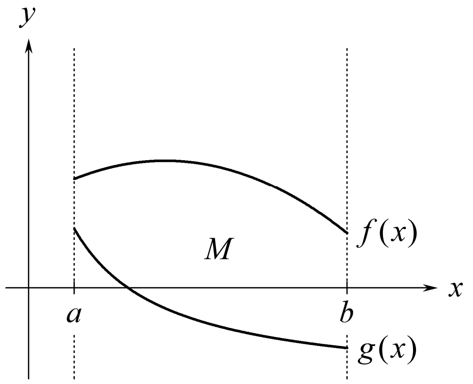
34.1 Sætning om areal mellem grafer

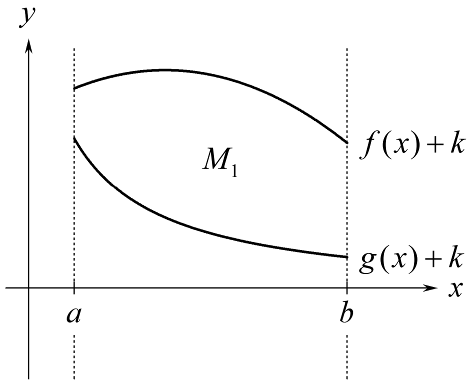
Hvis der i et interval $a \le x \le b$ gælder om to funktioner f og g at

$$f(x) \ge g(x)$$

og M er området mellem f-grafen og g-grafen i dette interval (se venstre figur), så er

$$\text{areal af } M = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$





Bevis

Vi vælger et tal k så graferne for $f(x)+k$ og $g(x)+k$ ligger over x-aksen. Se højre figur. Nu får vi

$$\text{Areal af } M = \text{areal af } M_1$$

$$= \begin{pmatrix}\text{areal mellem } x\text{-akse} \\ \text{og graf for } f(x)+k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{areal mellem } x\text{-akse} \\ \text{og graf for } g(x)+k\end{pmatrix}$$

$$= \int_a^b \big(f(x)+k\big)dx - \int_a^b \big(g(x)+k\big)dx$$ ifølge sætning om areal mellem f-graf og x-akse når $f(x) \ge 0$.

$$= \int_a^b \Big(\big(f(x)+k\big) - \big(g(x)+k\big)\Big)dx$$ ifølge formel for integral af differens.

$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Hermed er sætningen bevist.

35. Areal når graf ligger under x-akse.

35.1 Sætning om areal mellem f-graf og x-akse når $f(x) \le 0$

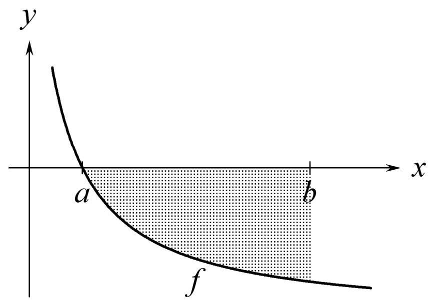
A er arealet mellem f-graf og x-akse i intervallet $a \le x \le b$.

Hvis

$$f(x) \le 0 \quad \text{for} \quad a \le x \le b$$

så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$



Bevis

Grafen for funktionen $g(x) = 0$ er sammenfaldende med x-aksen, så A er arealet mellem f-graf og g-graf i intervallet $a \le x \le b$.

$$A = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx \qquad \text{ifølge sætning om areal mellem grafer}$$

$$= \int_a^b \big(0 - f(x)\big)dx$$

$$= -\int_a^b f(x)\,dx \qquad k = -1 \text{ i regel om integral af } k \cdot f(x)$$

Hermed er sætningen bevist.

Stikordsregister

A
areal 7, 8, 9, 10, 11, 12
areal mellem grafer 7, 9
areal mellem grafer, bevis 19
areal over x-akse 7
areal under x-akse 7
areal under x-akse, bevis 20
areal, bestem k 12
areal, bevis 18
arealfunktion 16, 18
arealfunktion, bevis 17
B
bestemt integral 6
bestemt integral af sammensat funktion 6
bestemt integral med Nspire 6
bestemt integral uden hjælpemidler 6
F
fortolk integral 11
I
indskudssætningen for integraler 15
integral, indskudssætning 15
integral, regneregler 15
integrere 2
K
kvadrant 7
O
omdrejningslegeme 13, 14
opdelt område 11
R
regneregler for integraler 15
rumfang 13
rumfang af omdrejningslegeme 13
rumfang af ring 14
rumfang af skål 13
S
stamfunktion 1, 2, 3, 5, 16
stamfunktion med Nspire 2
stamfunktion til sammensat funktion 4
stamfunktion uden hjælpemidler 3
stamfunktion, grafpunkt givet 5
stamfunktion, tangent givet 5
U
ubestemt integral 2, 3, 4, 6
ubestemt integral af sammensat funktion 4