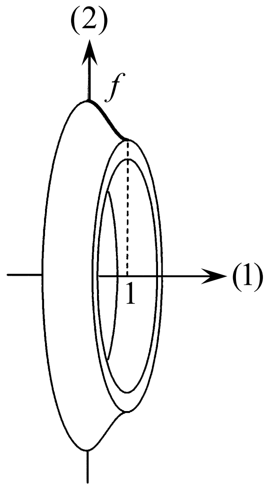
Integralregning

2. del



2006 Karsten Juul

Indhold

Integralregning 2. del
1. udgave 2006

6. Ubestemt integral

6.01 Sætning om eksistens af stamfunktioner

(6a) Sætning

Enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.

6.02 Oplæg til "regneregler for integral"

Husk at det ubestemte integral består af alle funktioner af denne type. k er altså alle tal.

Her lægger vi sammen før vi tager stamfunktion:

$$\int \left(2x^2 + 4x^2\right)dx \quad = \quad \int 6x^2 dx \quad = \quad 2x^3 + k \ .$$

Når to konstanter lægges sammen, fås en konstant, så det er nok at skrive én konstant.

Her tager vi stamfunktion før vi lægger sammen:

$$\int 2x^2 dx + \int 4x^2 dx \quad = \quad \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{4}{3}x^3 + k \quad = \quad 2x^3 + k \ .$$

At de to rækkefølger giver samme resultat kan skrives sådan:

$$\int \left(2x^2 + 4x^2\right)dx \quad = \quad \int 2x^2 dx + \int 4x^2 dx$$

6.03 Øvelse

Skriv følgende påstand som en ligning med integraltegn:

At gange e^{-x^2} med 5 og tage stamfunktion til resultatet
giver det samme som
at tage stamfunktion til e^{-x^2} og gange resultatet med 5.

6.04 Øvelse

Lad p og q være kontinuerte funktioner. Skriv følgende påstand som en ligning med integraltegn:

Hvis vi lægger $p(x)$ og $q(1-x)$ sammen og tager stamfunktion til resultatet,
så får vi det samme som
hvis vi tager stamfunktion til $p(x)$ og $q(1-x)$ hver for sig og lægger resultaterne sammen.

6.05 Regneregler for ubestemt integral

(6b) **Sætning** (formlen for ubestemt integral af sum)

Hvis f og g er kontinuerte, så gælder:

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx \quad = \quad \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \ .$$

(6c) **Sætning** (formlen for ubestemt integral af differens)

Hvis f og g er kontinuerte, så gælder:

$$\int \big(f(x)-g(x)\big)dx \quad = \quad \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx \ .$$

(6d) **Sætning** (formlen for ubestemt integral af konstant gange funktion)

Hvis f er kontinuert og k er konstant, så gælder:

$$\int k\cdot f(x)\,dx \quad = \quad k\cdot\int f(x)\,dx \ .$$

Advarsel: Hvis man i (6b) erstatter de to plusser med gangetegn, så fås en formel der ikke gælder.

6.06 Øvelse

Antag at en af stamfunktionerne til $f(x)$ er en kendt funktion $\text{qiq}(x)$. Bestem følgende integraler:

(1) $\int 14f(x)\,dx$ (2) $\int \big(f(x)+2x\big)\,dx$ (3) $\int \big(1-3f(x)\big)\,dx$.

6.07 Øvelse

Er

$$\int x\cdot x^2\,dx$$

lig

$$\int x\,dx\cdot\int x^2\,dx \quad ?$$

6.08 Forberedelse til "integration ved substitution"

Nogle typer af spørgsmål du får brug for at stille og besvare
når du skal bestemme visse integraler:

Spørgsmål 1: Når $f(t)=\mathrm{e}^t$ og $g(x)=3x^2$, hvad er så $f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$?

Svar på 1: $f\big(g(x)\big)\cdot g'(x) \quad = \quad \mathrm{e}^{g(x)}\cdot g'(x) \quad = \quad \underline{\mathrm{e}^{3x^2}\cdot 6x}$.

Spørgsmål 2: Bestem $f(t)$ og $g(x)$ så $6x\mathrm{e}^{3x^2} \;=\; f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$.

Svar på 2: $\underline{f(t)=\mathrm{e}^t}$ og $\underline{g(x)=3x^2}$.

Kontrol af svar: $f\big(g(x)\big)\cdot g'(x) \quad = \quad \mathrm{e}^{g(x)}\cdot g'(x) \quad = \quad \mathrm{e}^{3x^2}\cdot 6x \quad = \quad 6x\mathrm{e}^{3x^2}$.

Spørgsmål 3: Bestem $f(t)$ og $g(x)$ så $\dfrac{2x}{x^2+1} = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$.

Svar på 3: $\underline{f(t)=\dfrac{1}{t}}$ og $\underline{g(x)=x^2+1}$.

6.09 Øvelse

Bestem $f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$ i hvert af følgende tilfælde:

(1) $f(t)=\mathrm{e}^t$ og $g(x)=3x+4$ (2) $f(t)=t^4$ og $g(x)=x^3+5$.

6.10 Øvelse

Bestem for hvert af følgende udtryk $f(t)$ og $g(x)$ så udtrykket er lig $f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$.

(1) $4\mathrm{e}^{4x}$ (2) $-\mathrm{e}^{1-x}$ (3) $2x\left(2+x^2\right)^3$ (4) $\dfrac{3+8x}{3x+4x^2}$, $x>0$.

6.11 Formlen for ubestemt integration ved substitution

(6e) Sætning (Formlen for ubestemt integration ved substitution)

I et interval hvor f og integranden er kontinuerte, kan man foretage følgende omskrivning hvor F er en stamfunktion til f :

$$(*) \qquad \int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \;=\; F(g(x))+k \;.$$

Bemærkning

v) Venstre side af ligningen $(*)$ betyder

stamfunktionerne til integranden $f(g(x))\cdot g'(x)$.

h1) Differentieres $F(g(x))$, fås integranden,

så $F(g(x))$ er en stamfunktion til integranden.

h2) Der står $+k$, så højresiden er alle stamfunktionerne.

Formlen for ubestemt integration ved substitution er altså blot en omformulering af reglen for at differentiere en sammensat funktion.

6.12 Bestemme integral ved brug af formlen for substitution

$$\int 6x\,\mathrm{e}^{3x^2}\,dx$$

$$= \int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \qquad \text{hvor } f(t)=\mathrm{e}^t ,\; g(x)=3x^2 ,\; g'(x)=6x \;.$$

$$= F(g(x))+k \qquad \text{hvor } F'=f ,\; \text{dvs. } F(t)=\mathrm{e}^t \;.$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{e}^{3x^2}+k}} \;.$$

$$\int 2x\,\mathrm{e}^{3x^2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\int 6x\,\mathrm{e}^{3x^2}\,dx$$

Da $\left(3x^2\right)' = 6x$ erstatter vi $2x$ med $6x$. Da $\tfrac{1}{3}\cdot 6 = 2$, er det nye udtryk lig det oprindelige.

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \qquad \text{hvor } f(t)=\mathrm{e}^t ,\; g(x)=3x^2 ,\; g'(x)=6x \;.$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot F(g(x))+k \qquad \text{hvor } F'=f ,\; \text{dvs. } F(t)=\mathrm{e}^t \;.$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x^2}+k}} \;.$$

6.13 Øvelse Uden hjælpemidler

Bestem følgende integraler:

(1) $\int 2x(3+x^2)^3\,dx$ (2) $\int 8x(1+2x^2)^3\,dx$ (3) $\int 4x\cdot\frac{1}{1+2x^2}\,dx$.

6.14 Endnu et eksempel på integration ved substitution

$$\int e^{3x-2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\int e^{3x-2}\cdot 3\,dx$$

Da $(3x-2)'=3$ tilføjer vi $\cdot 3$. Da $\frac{1}{3}\cdot 3=1$, er det nye udtryk lig det oprindelige.

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$ hvor $f(t)=e^t$, $g(x)=3x-2$, $g'(x)=3$.

$$= \tfrac{1}{3}\cdot F(g(x))+k$$ hvor $F'=f$, dvs. $F(t)=e^t$.

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{3}e^{3x-2}+k}}\ .$$

6.15 Øvelse Uden hjælpemidler

Bestem følgende integraler:

(1) $\int (3x-2)^4\,dx$ (2) $\int \frac{1}{3x-2}\,dx$, $x>\frac{2}{3}$ (3) $\int e^{3-2x}\,dx$.

6.16 Øvelse

Bestem $\int 2x^2\cdot\sqrt{x^3+4}\,dx$.

6.17 Øvelse

Bestem til funktionen $f(x)=\frac{1}{2x-6}$, $x>3$, den stamfunktion hvis graf går gennem punktet $P(\frac{7}{2},1)$.

7. Bestemt integral

7.01 Øvelse

Lad f betegne funktionen bestemt ved $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 3$.

Da $0 < \frac{1}{2} \leq 3$ og $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, er 2 en funktionsværdi for f .

(a) Er 4 en funktionsværdi for f ?

(b) Er $\frac{1}{4}$ en funktionsværdi for f ?

(c) Bestem en funktionsværdi der er større end eller lig enhver af de andre funktionsværdier, eller sig at ingen af funktionsværdierne har denne egenskab.

(d) Bestem en funktionsværdi der er mindre end eller lig enhver af de andre funktionsværdier, eller sig at ingen af funktionsværdierne har denne egenskab.

(e) Skitsér en graf for en eller anden funktion

$$g(x) = \cdots \ , \quad 1 \leq x \leq 4$$

som ikke har en funktionsværdi der er mindre end eller lig enhver af de andre funktionsværdier, eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

(f) Skitsér en sammenhængende graf for en eller anden funktion

$$h(x) = \cdots \ , \quad 1 \leq x \leq 4$$

som ikke har en funktionsværdi der er mindre end eller lig enhver af de andre funktionsværdier, eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

7.02 Sætning om ekstrema for kontinuerte funktioner

(7a) **Sætning:** Hvis en funktion f er kontinuert i et interval af typen $[p;q]$, så har f både et minimum og et maksimum i $[p;q]$.

Bemærkning

At f har maksimum i 2, betyder ikke at 2 er maksimum.
At f har maksimum i 2, betyder at $f(2)$ er maksimum.
Hvis $f(2) = -1$, er det altså tallet -1 der er maksimum.

At f har et maksimum i $[1;3]$, betyder ikke at maksimum er et tal der tilhører $[1;3]$.
At f har et maksimum i $[1;3]$, betyder at der findes et tal t i $[1;3]$ så $f(t)$ er maksimum.

7.03 Udvidet definition af bestemt integral

(7b) Definition (af bestemt integral)

Lad f være en funktion der er kontinuert i et interval, og lad a og b være tal i dette interval. Lad F være en stamfunktion til f . Tallet

$$F(b)-F(a)$$

kaldes **det bestemte integral fra *a* til *b***, og betegnes med symbolet

$$\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Bemærkning: Hvis $a<b$ er ovenstående blot den tidligere definition. Det nye består i at vi nu også definerer integralet når den nedre grænse er større end den øvre eller lig den øvre, dvs. $a>b$ eller $a=b$.

Eksempler

$$\int_2^1 2x\,dx \;=\; \left[x^2\right]_2^1 \;=\; 1^2-2^2 \;=\; -3 \ .$$

$$\int_3^3 2\mathrm{e}^{2x}\,dx \;=\; \left[\mathrm{e}^{2x}\right]_3^3 \;=\; \mathrm{e}^{2\cdot 3}-\mathrm{e}^{2\cdot 3} \;=\; 0 \ .$$

(7c) Sætning

Lad f være en funktion der er kontinuert i et interval, og lad a og b være tal i dette interval. Der gælder

$$\int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0 \qquad \text{og} \qquad \int_b^a f(x)\,dx \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Bevis for (7c)

Da f er kontinuert, har f en stamfunktion F . Ved at bruge definitionen (7b) af bestemt integral fås

$$\int_a^a f(x)\,dx \;=\; F(a)-F(a) \;=\; 0 \ .$$

$$\int_b^a f(x)\,dx \;=\; F(a)-F(b) \;=\; -\big(F(b)-F(a)\big) \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Hermed er de to formler bevist.

7.04 Øvelse

Lad f være kontinuert i **R**, og lad F være en stamfunktion til f .

Udtryk hvert af følgende tre tal ved hjælp af F :

(1) $\int_3^0 f(x)\,dx$ (2) $\int_{-5}^0 f(x)\,dx$ (3) $\int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^9 f(x)\,dx$.

Udtryk hvert af følgende tre tal ved hjælp af integraltegnet:

(4) $F(6)-F(2)$ (5) $F(12)-F(20)$ (6) $-F(2)+F(1)$.

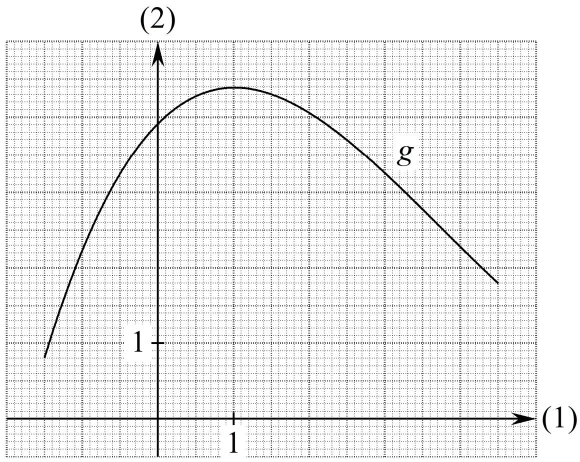
7.05 Øvelse

Om to funktioner f og g gælder at $g'(x)=f(x)$. Figuren viser grafen for g .

(a) Bestem $\int_1^4 f(x)\,dx$.

(b) Bestem det positive tal a for hvilket

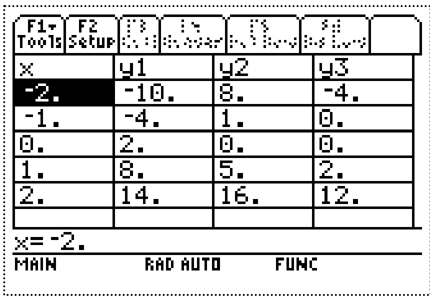
$$\int_0^a f(x)\,dx = 0 \ .$$



7.06 Øvelse

Tabellen viser nogle funktionsværdier for funktionerne y_1 , y_2 og y_3 . Det oplyses at y_3 er en stamfunktion til y_2 , og at y_2 er en stamfunktion til y_1 .

Bestem $\int_{-1}^2 y_2(x)\,dx$.



x	y1	y2	y3
-2.	-10.	8.	-4.
-1.	-4.	1.	0.
0.	2.	0.	0.
1.	8.	5.	2.
2.	14.	16.	12.

7.07 Indskudssætningen for integraler

(7d) Sætning (Indskudssætningen for integraler)

Lad f være en funktion der er kontinuert i et interval, og lad a, b og c være tal i dette interval. Der gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

Bevis for (7d)

Da f er kontinuert, har f en stamfunktion F.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$= F(c)-F(a) + F(b)-F(c)$ Ifølge definitionen på bestemt integral.

$= F(b)-F(a)$

$= \int_a^b f(x)\,dx$. Ifølge definitionen på bestemt integral.

Hermed er sætningen bevist.

7.08 Øvelse

(a) Det oplyses at $\int_1^{-4} f(x)\,dx = -7$ og $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx = 12$. Bestem $\int_1^3 f(x)\,dx$.

(b) Det oplyses at $\int_0^5 f(x)\,dx = 1$ og $\int_0^2 f(x)\,dx = 8$. Bestem $\int_2^5 f(x)\,dx$.

7.09 Regneregler for bestemt integral

(7e) **Sætning** (formlen for bestemt integral af sum)

Hvis f og g er kontinuerte i et interval, og a og b er tal i dette interval, er

$$(*) \qquad \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \;.$$

Bevis for (7e)

Da $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte, har de stamfunktioner $F(x)$ og $G(x)$.

Da

$$\big(F(x)+G(x)\big)' \;=\; F'(x)+G'(x) \;=\; f(x)+g(x)$$

gælder at

$$F(x)+G(x) \quad \text{er en stamfunktion til } f(x)+g(x)$$

så

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx \;=\; \big[F(x)+G(x)\big]_a^b \;.$$

Heraf fås at venstresiden i $(*)$ er lig

$$\big(F(b)+G(b)\big) - \big(F(a)+G(a)\big).$$

Dette kan omskrives til

$$F(b)-F(a) \;+\; G(b)-G(a)$$

som ifølge definitionen på bestemt integral er lig højresiden i $(*)$.

(7f) **Sætning** (formlen for bestemt integral af differens)

Hvis f og g er kontinuerte i et interval, og a og b er tal i dette interval, er

$$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \;.$$

(7g) **Sætning** (formlen for bestemt integral af konstant gange funktion)

Hvis f er kontinuert i et interval, og a og b er tal i dette interval, og k er konstant, er

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx \;=\; k\cdot\int_a^b f(x)\,dx \;.$$

Advarsel: Hvis man i (7e) erstatter de to plusser med gangetegn, så fås en formel der ikke gælder.

7.10 Øvelse

(a) **Find fejlen i følgende udregning:**

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \;=\; \left[F(x)\cdot G(x)\right]_a^b \;=\; F(b)\cdot G(b) \;-\; F(a)\cdot G(a)\ .$$

(b) Bevis sætning (7g).

7.11 Øvelse

(a) Det oplyses at $\int_2^7 4f(x)\,dx \;=\; 12$. Bestem $\int_2^7 f(x)\,dx$.

(b) Det oplyses at $\int_1^3 \left(f(x)+4\right)dx \;=\; 9$. Bestem $\int_1^3 f(x)\,dx$.

(c) Det oplyses at $\int_0^1 \left(3x^2-2f(x)\right)dx \;=\; 4$. Bestem $\int_0^1 f(x)\,dx$.

7.12 Formlen for bestemt integration ved substitution

(7h) Sætning (Formlen for bestemt integration ved substitution)
Hvis integranderne er kontinuerte i integrationsintervallerne, gælder

$$(*)\qquad \int_a^b f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt\ .$$

Bevis for (7h):

Da f er kontinuert, har f en stamfunktion F .

Af definitionen på bestemt integral fås at højresiden i $(*)$ er lig

$$\left[F(t)\right]_{g(a)}^{g(b)} \;=\; F\left(g(b)\right)-F\left(g(a)\right)\ .$$

Da $F\left(g(x)\right)$ er stamfunktion til integranden på $(*)$'s venstreside, er venstresiden lig

$$\left[F\left(g(x)\right)\right]_a^b \;=\; F\left(g(b)\right)-F\left(g(a)\right)\ .$$

Altså er de to sider af $(*)$ ens.

7.13 Bestemme integral ved brug af formlen for substitution

$$\int_0^1 6x\,e^{3x^2}\,dx$$

$= \int_0^1 f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx$ hvor $f(t)=e^t$, $g(x)=3x^2$, $g'(x)=6x$.

$= \int_{g(0)}^{g(1)} f(t)\,dt$

$= \int_0^3 e^t\,dt$

$= \big[e^t\big]_0^3$ da e^t er stamfunktion til e^t .

$= e^3 - e^0$

$= \underline{\underline{e^3-1}}$.

$$\int_5^7 (2x-10)^3\,dx$$

Da $(2x-10)' = 2$ tilføjer vi $\cdot 2$. Da $\frac{1}{2}\cdot$ også er tilføjet, og $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$, er det nye udtryk lig det oprindelige.

$= \frac{1}{2}\cdot\int_5^7 (2x-10)^3\cdot 2\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\int_5^7 f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx$ hvor $f(t)=t^3$, $g(x)=2x-10$, $g'(x)=2$.

$= \frac{1}{2}\cdot\int_{g(5)}^{g(7)} f(t)\,dt$

$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^4 t^3\,dt$

$= \frac{1}{2}\cdot\big[\frac{1}{4}t^4\big]_0^4$

$= \frac{1}{2}\cdot\big(\frac{1}{4}\cdot 4^4 - \frac{1}{4}\cdot 0^4\big)$

$= \underline{\underline{32}}$.

7.14 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem hvert af følgende integraler:

(1) $\int_{-1}^{0} \left(x^2-1\right)^3 \cdot 2x\,dx$ (2) $\int_{3}^{5} \mathrm{e}^{2x-6}\,dx$ (3) $\int_{0}^{1} 3\mathrm{e}^{2x+1}\,dx$.

7.15 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem hvert af følgende integraler

(1) $\int_{0}^{3} \frac{1}{2x+1} \cdot 2\,dx$ (2) $\int_{1}^{2} \frac{3}{3x-2}\,dx$ (3) $\int_{2}^{3} \frac{1}{2x-3}\,dx$.

7.16 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem hvert af følgende integraler

(1) $\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+2}\,dx$ (2) $\int_{1}^{0} x\left(1-x^2\right)^3\,dx$ (3) $\int_{-1}^{0} 2x^2\mathrm{e}^{x^3+1}\,dx$.

8. Integral og areal

8.01 Øvelse

(a) Tegn grafen for funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $-2 \le x \le 2$.

(b) Skravér det område M der afgrænses af f-grafen, førsteaksen og de lodrette linjer gennem punkterne $(-1, 0)$ og $(\frac{1}{2}, 0)$.

(c) I intervallet $[-1; \frac{1}{2}]$ har f minimum i et tal x_1, og maksimum i et tal x_2 . Skriv uden begrundelse tallene x_1 og x_2 .

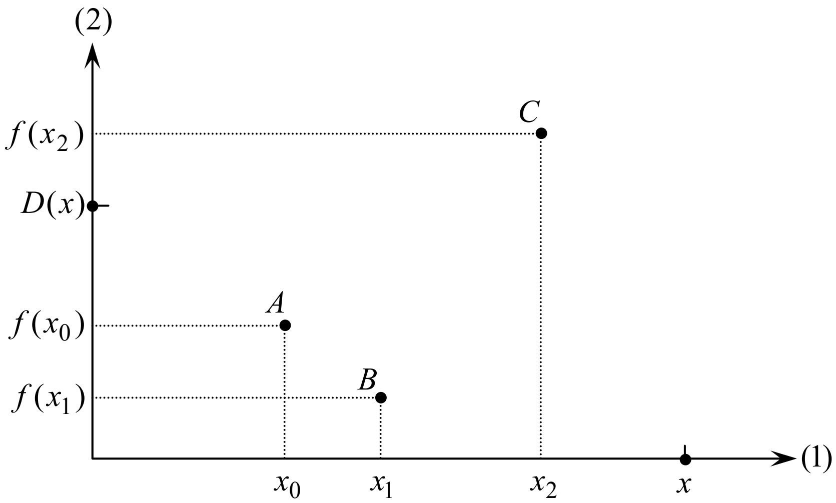
(d) Bestem $f(x_1)$ og $f(x_2)$.

(e) Tegn det rektangel med vandret grundlinje som er indeholdt i M og har højde $f(x_1)$ og grundlinje $1\frac{1}{2}$.

(f) Tegn det rektangel med vandret grundlinje som indeholder M og har højde $f(x_2)$ og grundlinje $1\frac{1}{2}$.

(g) Når x er et tal mellem -1 og 2 , så har f i intervallet $[-1; x]$ minimum i et tal x_1 . Hvilket tal er $f(x_1)$ tæt ved når x er tæt ved -1 ?

8.02 Øvelse



Billedet viser en interaktiv figur hvor grafen for en <u>kontinuert</u> funktion f er tegnet med hvid streg. Punkterne A , B og C ligger på grafen. Når x trækkes hen mod x_0 , så flytter x_1 og x_2 sig så de hele tiden ligger mellem x_0 og x . Når x ændres, ændres $D(x)$ også, men sådan at $D(x)$ hele tiden ligger mellem $f(x_1)$ og $f(x_2)$.

(a) Hvilket tal er $f(x_1)$ tæt ved når x er tæt ved x_0 ?

(b) Hvilket tal er $f(x_2)$ tæt ved når x er tæt ved x_0 ?

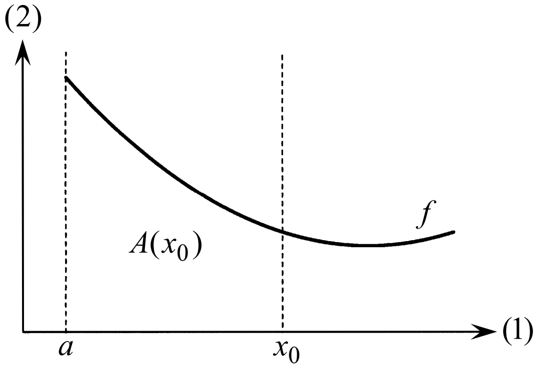
(c) Hvilket tal er $D(x)$ tæt ved når x er tæt ved x_0 ?

8.03 Sammenhæng mellem areal og stamfunktion

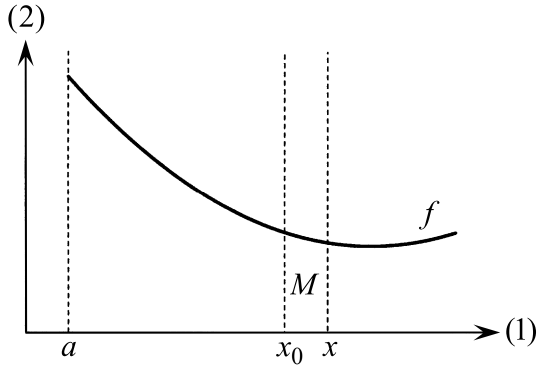
Lad $f(x)$ være kontinuert og ≥ 0 i et interval $[a;b]$, og lad $A(x)$ være den tilhørende arealfunktion. Når x_0 er et tal i $[a;b]$, så er $A(x_0)$, som bekendt, arealet af det område der afgrænses af *f*-grafen, førsteakse og de lodrette linjer gennem punkterne $(a,0)$ og $(x_0,0)$ (se figur 8b).

Vi vil nu bevise at der, som tidligere omtalt, gælder følgende:

(8a) Sætning: $A'(x_0) = f(x_0)$.



Figur 8b



Figur 8c

Bevis for (8a)

Ifølge definitionen på differentialkvotient er (8a) ensbetydende med

(1) $$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \ .$$

Vi indfører betegnelserne x, x_1 og x_2:

Lad x være et tal i $[a;b]$ som er $\neq x_0$.

I intervallet med endepunkter x og x_0, endepunkterne medregnet, findes
et tal x_1 så $f(x_1)$ er minimum for f i intervallet, og
et tal x_2 så $f(x_2)$ er maksimum for f i intervallet,
da en funktion der er kontinuert i et interval af typen $[p;q]$, både har et minimum og et maksimum i dette interval.
(Hvis situationen er som på figur 8c, så er $x_1 = x$ og $x_2 = x_0$).

Som en hjælp til at bevise (1) vil vi bevise at følgende gælder:

(2) $\quad f(x_1) \;\leq\; \dfrac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} \;\leq\; f(x_2)$

Til brug i beviset herfor indfører vi betegnelsen M for det område der afgrænses af *f*-grafen, førsteaksen og de lodrette linjer gennem punkterne $(x_0,0)$ og $(x,0)$. Området M er vist på figur 8c.

Først beviser vi at (2) gælder når $x > x_0$:

$A(x)-A(x_0)$ er arealet af M

da

$A(x)$ er arealet mellem graf og førsteakse fra lodret linje gennem $(a,0)$ til lodret linje gennem $(x,0)$

og

$A(x_0)$ er arealet mellem graf og førsteakse fra lodret linje gennem $(a,0)$ til lodret linje gennem $(x_0,0)$.

$f(x_1)\cdot(x-x_0)$ er arealet af et rektangel der er indeholdt i M

Tallene $f(x_1)$ og $x-x_0$ er hhv. højde og grundlinje i rektanglet.

$f(x_2)\cdot(x-x_0)$ er arealet af et rektangel der indeholder M

Tallene $f(x_2)$ og $x-x_0$ er hhv. højde og grundlinje i rektanglet.

så

$$f(x_1)\cdot(x-x_0) \;\leq\; A(x)-A(x_0) \;\leq\; f(x_2)\cdot(x-x_0)$$

Da $x-x_0$ er et positivt tal, vil ulighederne stadig gælde efter at hver side er divideret med $x-x_0$. Hermed er (2) bevist når $x > x_0$.

Nu beviser vi at (2) også gælder når $x < x_0$:

$A(x_0)-A(x)$ er arealet af M

$f(x_1)\cdot(x_0-x)$ er arealet af et rektangel der er indeholdt i M

$f(x_2)\cdot(x_0-x)$ er arealet af et rektangel der indeholder M

så

$$f(x_1)\cdot(x_0-x) \;\leq\; A(x_0)-A(x) \;\leq\; f(x_2)\cdot(x_0-x)$$

Da x_0-x er et positivt tal, vil ulighederne stadig gælde efter at hver side er divideret med x_0-x:

$$f(x_1) \;\leq\; \frac{A(x_0)-A(x)}{x_0-x} \;\leq\; f(x_2)$$

Når vi forlænger brøken med -1 fås (2), som hermed også er bevist når $x < x_0$.

Til sidst bruger vi (2) til at bevise (1):

For $x \to x_0$ fås:

$x_1 \to x_0$ og $x_2 \to x_0$
da x_1 og x_2 ligger i intervallet med endepunkter x og x_0 .

$f(x_1) \to f(x_0)$ og $f(x_2) \to f(x_0)$
da $x_1 \to x_0$ og $x_2 \to x_0$ og $f(x)$ er kontinuert.

(3) $$\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \to f(x_0)$$
da (2) er opfyldt og $f(x_1) \to f(x_0)$ og $f(x_2) \to f(x_0)$.

Hermed er (8a) bevist da (3) er (1) udtrykt med andre symboler.

Bemærkning

Lad f være en funktion der er kontinuert i et interval $[a;b]$, og lad M være området mellem *f*-grafen og førsteaksen fra den lodrette linje gennem (a,0) til den lodrette linje gennem (b,0).

I rammerne 3.03 og 4.01 så vi at man ud fra (8a) kan slutte:

(8d) Sætning

Hvis $f(x) \geq 0$ for x i $[a;b]$, så er $\int_a^b f(x)\,dx$ = areal(M) .

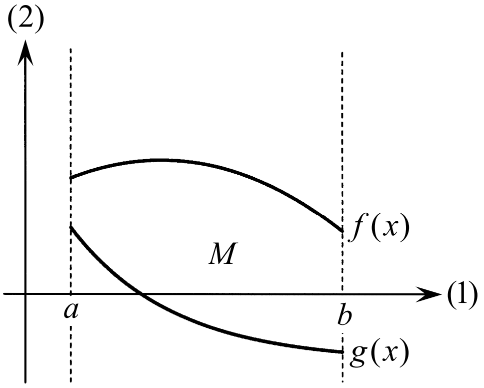
8.04 Formlen for areal mellem grafer

Lad f og g være funktioner der er kontinuerete i et interval $[a;b]$, og lad M være området mellem f-grafen og g-grafen fra den lodrette linje gennem $(a,0)$ til den lodrette linje gennem $(b,0)$. Se figur 8f.

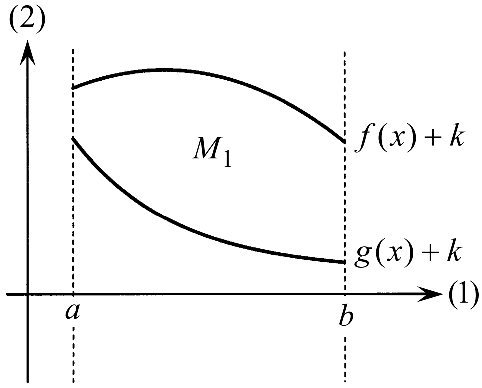
Ved hjælp af (8d) vil vi nu bevise følgende sætning:

(8e) Sætning (Formlen for areal mellem grafer).

Hvis $f(x) \geq g(x)$ for x i $[a;b]$, så er $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \text{areal}(M)$.



Figur 8f



Figur 8g

Bevis for (8e)

$g(x)$ har et minimum i $[a;b]$

da en funktion der er kontinuert i et interval af typen $[p;q]$, har et minimum.

Altså findes et tal k så graferne for $f(x)+k$ og $g(x)+k$ ligger over førsteaksen. Se figur 8g. Ifølge (8d) gælder

(1) $\int_a^b \big(f(x)+k\big)dx$ er arealet mellem førsteaksen og grafen for $f(x)+k$

(2) $\int_a^b \big(g(x)+k\big)dx$ er arealet mellem førsteaksen og grafen for $g(x)+k$.

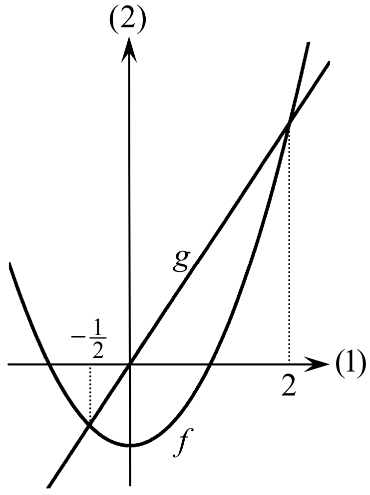
Nu fås:

areal(M)	$=$	areal(M_1)	
	$=$	$\int_a^b \big(f(x)+k\big)dx - \int_a^b \big(g(x)+k\big)dx$	ifølge (1) og (2) .
	$=$	$\int_a^b \Big(\big(f(x)+k\big) - \big(g(x)+k\big)\Big)dx$	ifølge formlen for integral af differens.
	$=$	$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$	

Hermed er sætning (8e) bevist.

8.05 Eksempel på brug af formlen for areal mellem grafer

Det er oplyst at graferne for funktionerne $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x$ afgrænser et område der har et areal.



(1) For at bestemme dette areal tegner vi først graferne for f og g.

(2) Ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$ finder vi at førstekoordinaterne til grafernes skærings-punkter er $-\frac{1}{2}$ og 2.

(3) Da $g(x) \geq f(x)$ for x i $[-\frac{1}{2}; 2]$, er det søgte areal lig $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} \big(g(x) - f(x)\big)dx$.

(4) Ved at bestemme dette integral fås at arealet er $\underline{\underline{\frac{125}{48}}}$.

8.06 Øvelse

Graferne for funktionerne $f(x) = -x^2 + x + 1$ og $g(x) = x$ afgrænser et område der har et areal.

Bestem dette areal.

8.07 Øvelse

Betragt de to funktioner

$$f(x) = x^3 - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = \tfrac{1}{8}x^3 - 1 \ .$$

Graferne for funktionerne afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde der har et areal.

Bestem dette areal.

8.08 Areal mellem graf og 1.akse når graf ligger under 1.akse

Lad f være en funktion der er kontinuert i et interval $[a;b]$, lad M være området mellem *f*-grafen og førsteaksen fra den lodrette linje gennem (a,0) til den lodrette linje gennem (b,0).

Ved hjælp af (8e) kan vi nu bevise følgende:

(8h) Sætning

Hvis $f(x) \leq 0$ for x i $[a;b]$, så er $\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\text{areal(M)}$.

Bevis for (8h)

Området M kan også beskrives som området mellem *f*-grafen og grafen for funktionen $g(x) = 0$ fra den lodrette linje gennem (a,0) til den lodrette linje gennem (b,0).

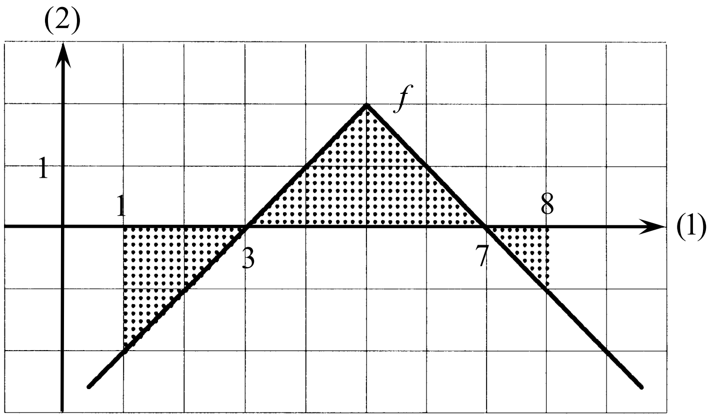
Da $g(x) \geq f(x)$ følger af (8e) at

$\text{areal}(M)$	$=$	$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$	ifølge sætning (8e).
	$=$	$\int_a^b \big(0 - f(x)\big)dx$	
	$=$	$-\int_a^b f(x)\,dx$	ifølge sætning (7g) med $k = -1$.

Hermed er sætningen bevist.

8.09 Sammenhængen mellem arealer og integral

Eksemplet i denne ramme tydeliggør den sammenhæng der er mellem arealer og integral.



Figuren viser grafen for en funktion f .

A1. areal fra 1 til 3 **er** 2.
I1. integral fra 1 til 3 **er** -2 .

A2. areal fra 3 til 7 **er** 4.
I2. integral fra 3 til 7 **er** 4.

A3. areal fra 7 til 8 **er** $\frac{1}{2}$.
I3. integral fra 7 til 8 **er** $-\frac{1}{2}$.

A4. areal fra 1 til 8 **er** $6\frac{1}{2}$.
I4. integral fra 1 til 8 **er** $1\frac{1}{2}$.

De arealer der omtales, er arealer mellem f-graf og førsteakse.

De integraler der omtales, er integraler af funktionen f .

Begrundelse for I1: Da $f(x) \leq 0$ for $1 \leq x \leq 3$, er integral = $-$areal .

Begrundelse for I2: Da $f(x) \geq 0$ for $3 \leq x \leq 7$, er integral = areal .

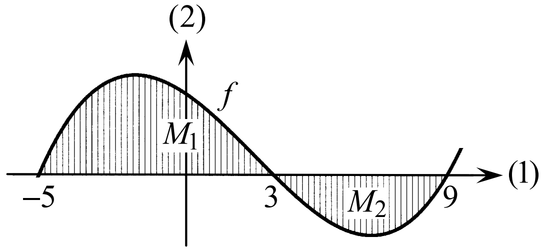
Begrundelse for I3: Da $f(x) \leq 0$ for $7 \leq x \leq 8$, er integral = $-$areal .

Begrundelse for I4: Af <u>indskudsreglen</u> fås:

integral fra 1 til 8 $= (-2) + 4 + (-\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}$.

Bemærkning: Sproget i denne ramme efterligner en mundtlig forklaring hvor der peges på en figur. I en skriftlig besvarelse af en opgave er det mere praktisk at bruge integraltegn. Se hvordan i de næste rammer.

8.10 1. eksempel hvor integral og/eller areal er givet



Figuren viser grafen for en funktion f som har nulpunkterne -5, 3 og 9. Det oplyses at $\text{areal}(M_1) = \frac{86}{5}$ og $\text{areal}(M_2) = 8$.

Vi vil bestemme integralet fra -5 til 9 af f .

Da $f(x) \geq 0$ for x i $[-5; 3]$, fås

$$\int_{-5}^{3} f(x)\,dx \;=\; \text{areal}(M_1) \;=\; \frac{86}{5} \;.$$

Da $f(x) \leq 0$ for x i $[3; 9]$, fås

$$\int_{3}^{9} f(x)\,dx \;=\; -\text{areal}(M_2) \;=\; -8 \;.$$

Ved at bruge indskudssætningen fås

$$\int_{-5}^{9} f(x)\,dx \;=\; \int_{-5}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{9} f(x)\,dx \;=\; \frac{86}{5} + (-8) \;=\; \underline{\underline{\frac{46}{5}}} \;.$$

Advarsel

Sig ikke "areal" når du mener "integral".

I eksemplet ovenfor gælder

arealet fra 3 til 9 er lig 8

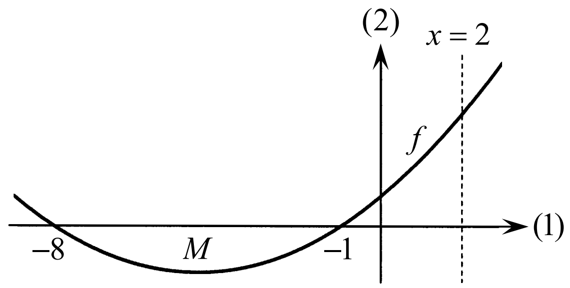
mens

integralet fra 3 til 9 er $-$areal

dvs.

integralet fra 3 til 9 er -8.

8.11 2. eksempel hvor integral og/eller areal er givet



Figuren viser grafen for en funktion f hvis nulpunkter er -8 og -1. Sammen med førsteaksen afgrænser grafen en punktmængde M der har et areal.

Det er oplyst at arealet af M er $\frac{27}{5}$ og at $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{19}{5}$.

Vi vil bestemme integralet fra -8 til 2 af f .

Da $f(x) \leq 0$ for x i $[-8;-1]$, fås

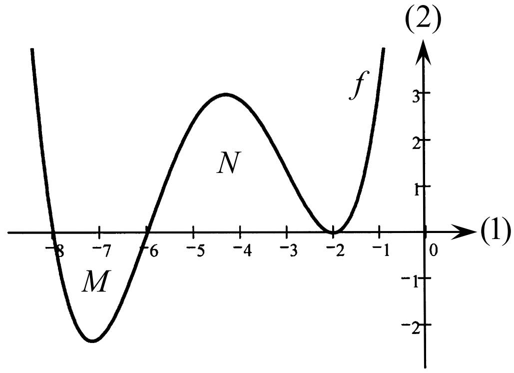
$$\int_{-8}^{-1} f(x)\,dx \;=\; -\text{areal}(M) \;=\; -\tfrac{27}{5} \;.$$

Ved at bruge indskudssætningen fås

$$\int_{-8}^{2} f(x)\,dx \;=\; \int_{-8}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \;=\; \left(-\tfrac{27}{5}\right) + \tfrac{19}{5} \;=\; \underline{\underline{-\tfrac{8}{5}}} \;.$$

8.12 Øvelse

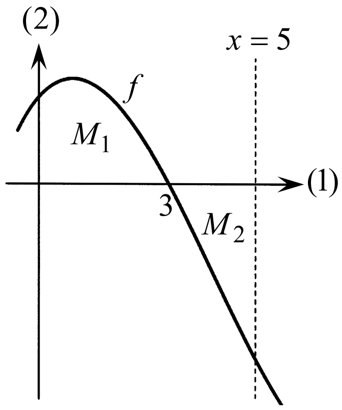
Figuren viser grafen for en funktion f som har nulpunkterne -8, -6 og -2. I tredje kvadrant afgrænser grafen og førsteaksen en punktmængde M der har arealet 3. I anden kvadrant afgrænser grafen og førsteaksen en punktmængde N der har arealet 7.



Bestem hvert af integralerne

$$\int_{-8}^{-6} f(x)\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-8}^{-2} f(x)\,dx \;.$$

8.13 3. eksempel hvor integral og/eller areal er givet



På figuren ses grafen for en funktion f der har nulpunktet 3. Desuden ses to punktmængder M_1 og M_2. Det er oplyst at arealet af M_1 er $\frac{21}{4}$, og at $\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$.

Vi vil bestemme arealet af M_2.

Da $f(x) \geq 0$ for x i $[0;3]$, fås

$$\int_0^3 f(x)\,dx \;=\; \text{areal}(M_1) \;=\; \tfrac{21}{4} \;.$$

Da $f(x) \leq 0$ for x i $[3;5]$, gælder at

$$\int_3^5 f(x)\,dx \;=\; -\text{areal}(M_2) \;.$$

Ifølge indskudssætningen er

$$\int_0^5 f(x)\,dx \;=\; \int_0^3 f(x)\,dx \;+\; \int_3^5 f(x)\,dx$$

dvs.

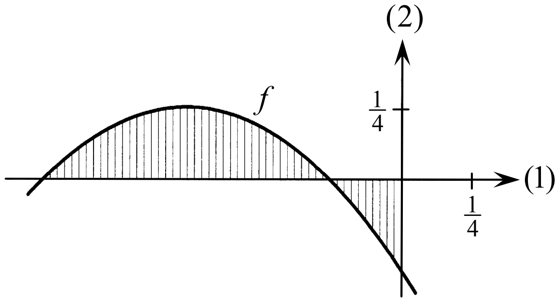
$$\tfrac{5}{4} \;=\; \tfrac{21}{4} \;+\; \left(-\text{areal}(M_2)\right) .$$

Altså er

$$\text{areal}(M_2) \;=\; \tfrac{21}{4} \;-\; \tfrac{5}{4}$$

så arealet af M_2 er $\underline{\underline{4}}$.

8.14 Eksempel på beregning af areal ved opdeling



Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = -x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{5}{16}$. Vi vil beregne arealet af det skraverede område.

Lad M_1 betegne det skraverede område over førsteaksen, og lad M_2 betegne det skraverede område under førsteaksen.

Ved at løse ligningen $f(x) = 0$ finder vi at førstekoordinaterne til grafens skæringspunkter med førsteaksen er $-\frac{5}{4}$ og $-\frac{1}{4}$.

Da $f(x) \geq 0$ for x i $[-\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}]$, gælder at

(1) $$\int_{-\frac{5}{4}}^{-\frac{1}{4}} f(x)\,dx \;=\; \text{areal}(M_1) \;.$$

Da $f(x) \leq 0$ for x i $[-\frac{1}{4}; 0]$, gælder at

(2) $$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} f(x)\,dx \;=\; -\,\text{areal}(M_2) \;.$$

Ved beregning finder vi at

(3) $$\int_{-\frac{5}{4}}^{-\frac{1}{4}} f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{6}$$

(4) $$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} f(x)\,dx \;=\; -\frac{7}{192} \;.$$

Af (1) og (3) fås at $\text{areal}(M_1) = \frac{1}{6}$, og af (2) og (4) fås at $\text{areal}(M_2) = \frac{7}{192}$, så

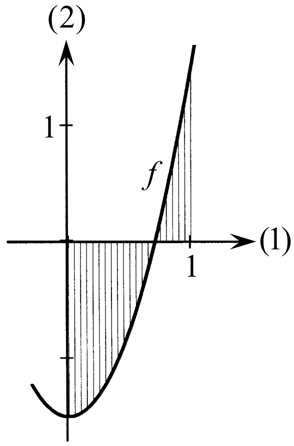
arealet af det skraverede område er $\frac{1}{6} + \frac{7}{192} = \underline{\underline{\frac{13}{64}}}$.

8.15 Eksempel med fortolkning af integral

Betragt funktionen $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}$. Vi vil beregne

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

og give en geometrisk fortolkning af resultatet.



$$\int_0^1 \left(3x^2 - \tfrac{3}{2}\right)dx \;=\; \left[x^3 - \tfrac{3}{2}x\right]_0^1 \;=$$

$$\left(1^3 - \tfrac{3}{2}\cdot 1\right) - \left(0^3 - \tfrac{3}{2}\cdot 0\right) \;=\; \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}}}\;.$$

Vi tegner grafen. Den geometriske fortolkning er:

Skraveret areal under 1.akse er $\frac{1}{2}$ enhed større end skraveret areal over.

Integralet er nemlig lig arealet S_2 over aksen minus arealet S_1 under aksen:

$$S_2 - S_1 \;=\; -\tfrac{1}{2}\;.$$

8.16 Øvelse

Betragt funktionen

$$f(x) = 3x^2 - 6x\;.$$

Beregn det bestemte integral

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx$$

og fortolk resultatet ved hjælp af en skitse.

9. Rumfang af omdrejningslegeme

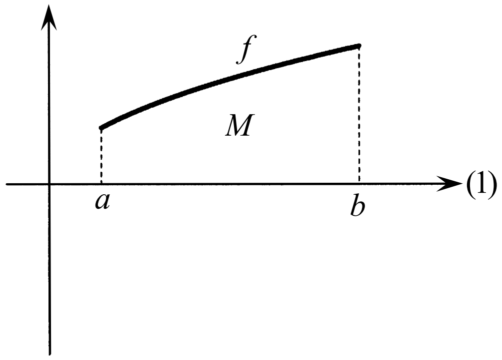
9.01 Formlen for rumfang af omdrejningslegeme + eksempel

Når punktmængden M på figur 9b drejes $360°$ om førsteaksen, fås **omdrejningslegemet** på figur 9c.

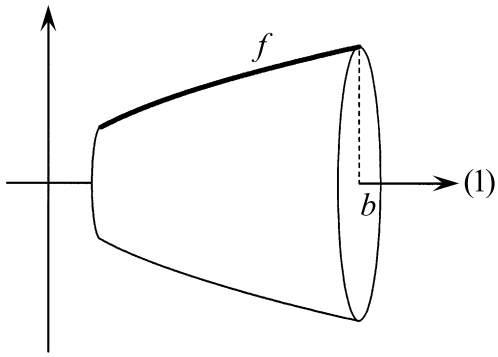
(9a) Sætning (Formlen for rumfang af omdrejningslegeme)

Rumfanget V af omdrejningslegemet kan beregnes ved hjælp af formlen

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \ .$$



Figur 9b



Figur 9c

Antag at figur 9a viser grafen for funktionen

$$f(x) = \tfrac{4}{5}\sqrt{x} \ , \quad \tfrac{1}{2} \le x \le 3 \ .$$

Så har omdrejningslegemet rumfanget

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{3} \left(\tfrac{4}{5}\sqrt{x}\right)^2 dx = \tfrac{8}{25}\pi \int_{\frac{1}{2}}^{3} 2x\,dx =$$

$$\tfrac{8}{25}\pi\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{3} = \tfrac{8}{25}\pi\left(3^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right) = \underline{\underline{\tfrac{14}{5}\pi}} \ .$$

9.02 Øvelse

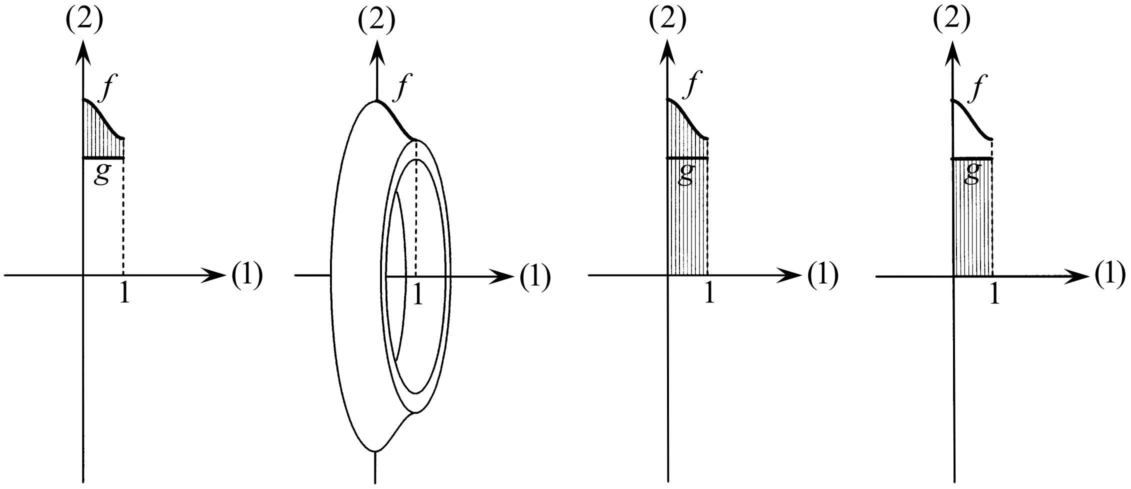
Grafen for funktionen $f(x) = x^2 - 1$ afgrænser sammen med koordinatakserne i fjerde kvadrant en punktmængde M .

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes $360°$ om førsteaksen.

9.03 Bestemme rumfang af ring

Den skraverede punktmængde M på figur 9d er afgrænset af graferne for funktionerne $f(x)=2x^3-3x^2+\frac{9}{2}$ og $g(x)=3$ og linjerne med ligningerne $x=0$ og $x=1$. Når M drejes 360° om førsteaksen, fremkommer det ringformede omdrejningslegeme på figur 9e.

Vi vil beregne ringens rumfang V_{ring}.



Figur 9d Figur 9e Figur 9f Figur 9g

Når den skraverede punktmængde på figur 9f drejes om førsteaksen, fås en skive med rumfang V_{skive}. Herfra skal trækkes hullets rumfang V_{hul}. Hullet fås når den skraverede punktmængde på figur 9g drejes om førsteaksen. Af sætning (9a) fås

$$V_{skive} = \pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \tfrac{2257}{140}\pi$$

$$V_{hul} = \pi\int_0^1 \left(g(x)\right)^2 dx = 9\pi$$

Altså er ringens rumfang

$$V_{ring} = V_{skive} - V_{hul} = \underline{\underline{\tfrac{997}{140}\pi}}$$

Bemærkning

Hullets rumfang kunne også være beregnet ved at bruge formlen for rumfang af cylinder.

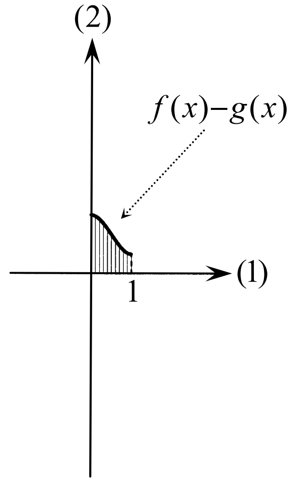
9.04 Advarsel vedr. rumfang af ring

Lad f og g være funktionerne fra ramme 9.03. Figur 9h viser grafen for funktionen $f(x) - g(x)$. Vi betragter omdrejningslegemet der fås ved at dreje den skraverede punktmængde $360°$ om førsteaksen. For at beregne dets rumfang, indsætter vi funktionen $f(x) - g(x)$ for $f(x)$ i formlen i sætning (9a):

$$V = \pi \int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx = \underline{\underline{\tfrac{157}{140}\pi}}$$

Vi ser at rumfanget er meget mindre end ringens rumfang.

Man kan altså ikke bestemme ringens rumfang ved at indsætte $f(x) - g(x)$ i formel (9a).



Figur 9h

9.05 Øvelse

Graferne for funktionerne $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = \sqrt{3x - 2}$ afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M .

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer når M drejes $360°$ om førsteaksen.