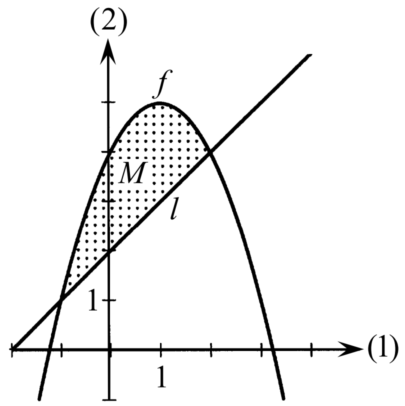
# Integralregning

1. del




2006 Karsten Juul

# Indhold



**Nyere hæfter m.m.:** **Klik på sidste del af linket!**

**http://mat1.dk/integralregning_med_oevelser_for_b-niveau_i_gymnasiet_og_hf.pdf 4/12-11**

**http://mat1.dk/integration_uden_hjaelpemidler_for_stx-matB_og_hf-matB.pdf 10/9-11**

**http://mat1.dk/integralregning_for_gymnasiet_og_hf.pdf 1/5-11**

**http://mat1.dk/integralregn2del.pdf 7/1-7**

Integralregning 1. del, 1. udgave 2006, 
Dette hæfte kan downloades fra

www.mat1.dk

# 1. Stamfunktion

## 1.01 Øvelse

Bestem ved aflæsning på figur 1a:

(1) $g'(4)$ og $f(4)$.

(2) $g'(0)$ og $f(0)$.

## 1.02 Oplæg om stamfunktion

Figur 1a viser graferne for funktionerne $f(x)$ og $g(x)$.

Da $l$'s hældningskoefficient er 1, er

$$g'(2) = 1 \ .$$

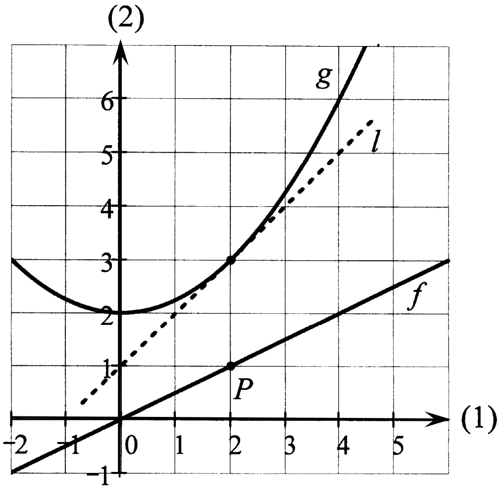
Da $P$'s andenkoordinat er 1, er

$$f(2) = 1 \ .$$

Når $x = 2$ gælder altså

$(*) \qquad g'(x) \ = \ f(x) .$

Hvis man foretager tilsvarende aflæsninger for en anden værdi af $x$, vil man finde at $(*)$ også gælder for denne værdi af $x$.



Figur 1a

## 1.03 Øvelse

(a) Angiv to funktioner hvis differentialkvotient er $2x$.

(b) Angiv to funktioner hvis differentialkvotient er $2x+1$.

# 1.04 Definition af stamfunktion

**(1b) Definition**

At

$F(x)$ er en **stamfunktion** til $f(x)$

betyder et

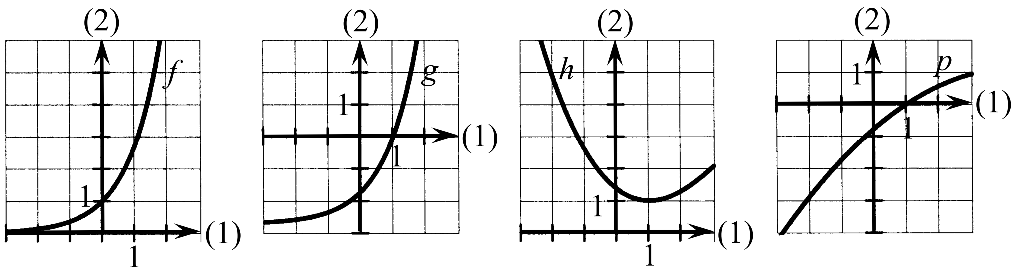
$F'(x) = f(x)$ .

**Eksempel**

Differentialkvotienten af $x^3$ er $3x^2$ , og
differentialkvotienten af $x^3 + 5$ er $3x^2$ , så
både $x^3$ og $x^3 + 5$ er stamfunktioner til $3x^2$ .

# 1.05 Øvelse

Figur 1c viser graferne for fire funktioner. Det oplyses at enhver af funktionerne $f$ , $g$ og $h$ er stamfunktion til en af funktionerne $f$ , $g$ , $h$ og $p$ . Afgør for hver af funktionerne $f$ , $g$ og $h$ hvilken funktion den er stamfunktion til.




Figur 1c

# 1.06 Kontrol af stamfunktion

Vi vil undersøge om $g(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 2x^3)$ er en stamfunktion til $f(x) = x - x^2$ .

Ifølge definition (1b) skal vi bestemme differentialkvotienten af $g(x)$ og se om resultatet er lig $f(x)$ :

$$g'(x) = \tfrac{1}{6}(3 \cdot 2x - 2 \cdot 3x^2) = \tfrac{1}{6}(6x - 6x^2) \ .$$

Ved at gange $\frac{1}{6}$ ind i parentesen ses at dette er lig $f(x)$ , så

$g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$ .

## 1.07 Øvelse

Brug metoden fra ramme 1.06 til at besvare følgende tre spørgsmål:

(a) Undersøg om $g(x) = \dfrac{x + e^{4x}}{4}$ er en stamfunktion til $f(x) = 1 + e^{4x}$ .

(b) Undersøg om $g(x) = \dfrac{1}{x} + x$ er en stamfunktion til $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ .

(c) Gør rede for at $g(x) = x + \ln x$ er en stamfunktion til $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ .

## 1.08 Øvelse

Gæt en stamfunktion til hver af følgende funktioner, og brug metoden fra ramme 1.06 til at kontrollere om du har gættet rigtigt:

$$f(x) = x^3 \;, \qquad g(x) = x^4 \qquad \text{og} \qquad h(x) = x^n \;.$$

## 1.09 Sætning om stamfunktionerne til en funktion

**(1c) Sætning**

Lad $F(x)$ og $f(x)$ være funktioner hvis definitionsmængde er et interval $I$ .

Hvis

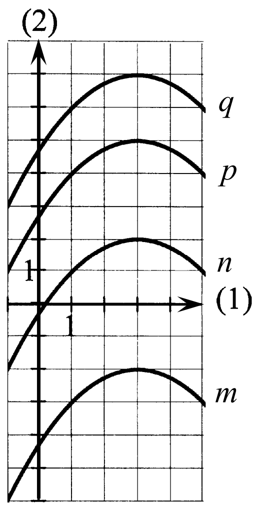
$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

gælder for enhver konstant $k$ at

$F(x) + k$ er en stamfunktion til $f(x)$

og

$f(x)$ har ikke andre stamfunktioner end disse.



Figur 1d

**Sætning (1c) kan også formuleres sådan:** Graferne for stamfunktionerne til en funktion er de grafer der kan fås ved lodret forskydning af én af stamfunktionernes grafer.

På figur 1d er vist graferne for nogle af stamfunktionerne til funktionen $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ .

## 1.10 Øvelse

Lad $m$ , $n$ , $p$ og $q$ være funktionerne fra ramme 1.09. Bestem uden at regne tallene

$$m(3) \;, \quad n(3) - m(3) \;, \quad n(8) - m(8) \quad \text{og} \quad p(\tfrac{17}{2}) - n(\tfrac{17}{2}) \;.$$

## 1.11 Definition af ubestemt integral

**(1e) Definition af ubestemt integral**

Stamfunktionerne til en funktion $f(x)$ betegnes

$$\int f(x)\ dx$$

og kaldes det ubestemte integral af $f(x)$. Funktionen der står mellem det lange s og $dx$ kaldes integranden.

**Eksempler**

$$\int x^3\ dx \ = \ \tfrac{1}{4}x^4 + k \quad .$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx \ = \ \ln x + k \quad , \qquad x > 0 \ .$$

## 1.12 Øvelse (uden hjælpemidler)

Brug metoden fra ramme 1.06 og sætning (1c) til at gøre rede for at

$$\int (2x^3 - 4)\ dx \ = \ \tfrac{1}{2}x^4 - 4x + k \quad .$$

## 1.13 Kontrol af ubestemt integral

Vi vil undersøge om

$$(*) \qquad \int x \cdot (1+x)\ dx \ = \ \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + k \quad .$$

Ifølge metoden fra ramme 1.06 og sætning (1c) gælder $(*)$ hvis differentialkvotienten af højresiden er lig integranden. Af reglerne for at bestemme differentialkvotient fås at højresidens differentialkvotient er

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2x + \tfrac{1}{3} \cdot 3x^2 \ = \ x + x^2 \, .$$

Sættes heri $x$ uden for en parentes fås integranden, så $(*)$ gælder.

## 1.14 Øvelse

Brug metoden fra ramme 1.13 til at kontrollere om

$$\int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}\right) dx \ = \ 2\ln x + x^{-2} + k \quad , \qquad x > 0 \ .$$

# 2. Bestemme stamfunktion

## 2.01 Øvelse

(a) Bestem differentialkvotienten af $\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{3}{2}$ og af $-\frac{1}{0{,}2}e^{-0{,}2x}$ .

(b) I (a) har du vist at de to givne funktioner er stamfunktioner til to andre funktioner (se definition 1b). Ud fra dette skal du gætte og formulere en regel til at bestemme stamfunktioner til en bestemt type funktioner.

## 2.02 Oversigt over stamfunktioner

I skemaet er $k$ og $c$ konstanter.

| Funktion | Stamfunktionerne |
|---|---|
| $0$ | $c$ |
| $k$ | $k\cdot x + c$ |
| $x$ | $\frac{1}{2}x^2 + c$ |
| $\frac{1}{x}$ , $x>0$ | $\ln x + c$ |
| $\frac{1}{x}$ , $x<0$ | $\ln(-x) + c$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + c$ |
| $x^a$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1} + c$ |
| $a^x$ | $\frac{1}{\ln a}a^x + c$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ |
| $e^{kx}$ | $\frac{1}{k}e^{kx} + c$ |
| $\ln x$ | $x\ln x - x + c$ |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ |

## 2.03 Øvelse

Omskriv $\sqrt{x}$ til formen $x^a$ . Brug så reglen for stamfunktion til $x^a$ (se ramme 2.02) til at bestemme stamfunktionerne til $\sqrt{x}$ , og vis at de kan skrives på den form som er angivet i ramme 2.02.

## 2.04 Øvelse

Gør rede for hvordan reglerne i ramme 2.02 kan bruges til at bestemme stamfunktionerne til følgende tre funktioner:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{og} \qquad h(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \ .$$

## 2.05 Øvelse

(a) Som bekendt gælder at

$x^2$ er en stamfunktion til $2x$

og at

$x^3$ er en stamfunktion til $3x^2$ .

(b) Reducér $x^2 \cdot x^3$, og brug metoden fra 1.06 til at gøre rede for at der gælder

$x^2 \cdot x^3$ er IKKE en stamfunktion til $2x \cdot 3x^2$ .

(c) Brug metoden fra 1.06 til at gøre rede for

om $x^2 + x^3$ er en stamfunktion til $2x + 3x^2$ ?

(d) Brug metoden fra 1.06 til at gøre rede for

om $\dfrac{x^2}{x^3}$ er en stamfunktion til $\dfrac{2x}{3x^2}$ ?

(e) Brug metoden fra 1.06 til at gøre rede for

om $x^2 - x^3$ er en stamfunktion til $2x - 3x^2$ ?

## 2.06 Regneregler for stamfunktioner

**Sætning**

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ har stamfunktionerne $F(x)$ og $G(x)$, så gælder:

**(2a)** $f(x)+g(x)$ har stamfunktionen $F(x)+G(x)$.

**(2b)** $f(x)-g(x)$ har stamfunktionen $F(x)-G(x)$.

**(2c)** $k \cdot f(x)$ har stamfunktionen $k \cdot F(x)$.

**Advarsel:** Hvis man i (2a) erstatter plus med gange eller med dividere, så fås en regel der i de fleste tilfælde vil give et forkert resultat.

**Eksempel**

$$x^2 \text{ og } \mathrm{e}^{4x} \text{ har stamfunktionerne } \tfrac{1}{3}x^3 \text{ og } \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} \ ,$$

så af (2a) fås at

$$x^2+\mathrm{e}^{4x} \text{ har stamfunktionen } \tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} \ .$$

Af (2b) og (2c) fås:

$$6x^2-\mathrm{e}^{4x} \text{ har stamfunktionen } 6\cdot\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} = 2x^3-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} .$$

## 2.07 Øvelse

(a) Brug reglerne i 2.02 og 2.06 til at finde en af stamfunktionerne til hver af følgende funktioner:

(1) $x^2-\mathrm{e}^x$ (2) $4\mathrm{e}^x+9$ (3) $8x^2$ (4) $\tfrac{1}{2}x^2-2x+\tfrac{2}{3}$

(5) $1+3\mathrm{e}^{2x}$ (6) $x^2\cdot x^3$ (7) $\dfrac{x^2}{2}$ (8) $\dfrac{1}{x^3}$ .

(b) Brug reglerne i 2.02 og 2.06 til at finde alle stamfunktionerne til funktionen

$$f(x) = x+\frac{1}{x} \ , \quad x>0 \ .$$

## 2.08 Øvelse

(a) Brug reglerne i 2.02 og 2.06 til at finde en af stamfunktionerne til hver af følgende funktioner:

(1) $2\mathrm{e}^{3x}-x$ (2) $2x^3-\mathrm{e}^{-2x}+2$ (3) $4\mathrm{e}^x+x^{-4}-4x$ .

## 2.09 Øvelse (uden hjælpemidler)

(a) Bestem $\int (x^2 + 6x + 2)\, dx$ .

(b) Bestem $\int (4\mathrm{e}^{2x} - x)\, dx$ .

(c) Bestem $\int 2x^{-3}\, dx \quad , \qquad x > 0$ .

## 2.10 Øvelse (uden hjælpemidler)

(a) Bestem $\int (6x^2 - 3\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{2})\, dx$ .

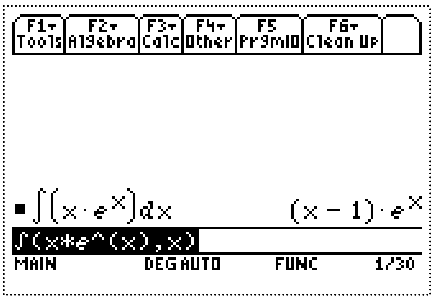
(b) Bestem $\int (\frac{1}{x} + \mathrm{e}^{-x})\, dx \quad , \qquad x > 0$ .

(c) Bestem $\int (2x^3 - x^2 - 1)\, dx$ .

## 2.11 Bestemme stamfunktion på TI-89's hovedskærm

På hovedskærmen, der fås frem ved at taste HOME, kan en stamfunktion bestemmes ved hjælp af det *integraltegn* der står over 7-tasten.

Fx kan en stamfunktion til $x \cdot \mathrm{e}^x$ bestemmes ved at taste som vist på figur 2d. Bemærk at man efter forskriften skal taste et komma efterfulgt af den uafhængige variabel.




Figur 2d

På figur 2d er bestemt én af stamfunktionerne til $x \cdot \mathrm{e}^x$. Det ses at

stamfunktionerne til $x \cdot \mathrm{e}^x$ er $(x-1) \cdot \mathrm{e}^x + k$ .

Dette kan også skrives sådan:

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \, dx = (x-1) \cdot \mathrm{e}^x + k \ .$$

## 2.12 Øvelse

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 2.09 .

(b) Bestem stamfunktionerne til $x^2 \cdot \ln x$ .

## 2.13 Finde en bestemt af stamfunktionerne til en funktion

**Opgave 1** (Punkt på stamfunktions graf er kendt)

Bestem den stamfunktion $F$ til $f(x) = 2x + 3$ hvis graf går gennem punktet $(-1, -6)$ .

**Besvarelse**

Da $F$ er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$ , findes en konstant $k$ så

$$F(x) = x^2 + 3x + k \quad .$$

Da grafen for $F$ går gennem punktet $(-1, -6)$ , må

$$(-1)^2 + 3\cdot(-1) + k = -6$$

så $k = -4$ , dvs.

$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 3x - 4}}$$

med alle reelle tal som definitionsmængde.

**Opgave 2** (Tangent til stamfunktions graf er kendt)

Bestem den stamfunktion $F$ til $f(x) = 2x + 3$ hvis graf har linjen med ligningen $y = x - 5$ som tangent.

**Besvarelse**

Da $F$ er en stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$ , findes en konstant $k$ så

$$F(x) = x^2 + 3x + k \quad .$$

Tangenten med ligningen $y = x - 5$ har hældningskoefficienten $a = 1$ .
Førstekoordinaten $x_0$ til røringspunktet for tangenten bestemmes:

$$F'(x_0) = a$$

$$2x_0 + 3 = 1$$

$$x_0 = -1$$

Da røringspunktet ligger på linjen med ligningen $y = x - 5$ , er dets andenkoordinat

$$y_0 = x_0 - 5 = (-1) - 5 = -6 \quad .$$

Da røringspunktet ligger på grafen for $F$ , kender vi nu et punkt på grafen for $F$ , så vi kan bestemme $F$ ved hjælp af metoden fra opgave 1.

## 2.14 Øvelse (Uden hjælpemidler)

En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 + 1 \ .$$

Bestem den stamfunktion $F$ til $f$ som opfylder $F(1) = 0$ .

## 2.15 Øvelse

En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = 4x - 8 \ .$$

Bestem den stamfunktion $F$ til $f$ hvis graf har linjen med ligningen $y = 3$ som tangent.

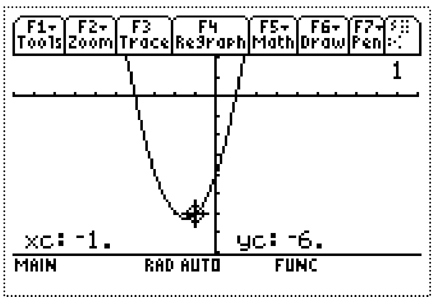
## 2.16 Kontrol på TI-89 af resultat fra ramme 2.13

I ramme 1 fandt vi at $F(x) = x^2 + 3x - 4$ var den stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$ hvis graf går gennem $(-1, -6)$ . Vi får tegnet grafen for $F$ på lommeregneren og anbringer markøren i grafpunktet med førstekoordinat $-1$ som vist på figur 2e. Det ses at punktets andenkoordinat er $-6$ , som det skulle være.

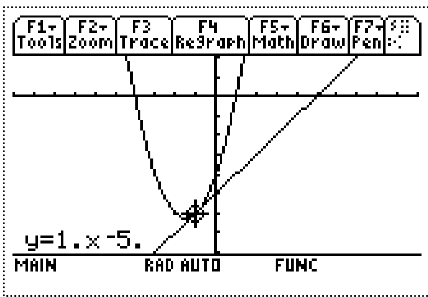
Man får anbragt markøren i grafpunktet med førstekoordinat -1 ved at vælge Math/Value og taste -1 ENTER .

I ramme 1 fandt vi at $F(x) = x^2 + 3x - 4$ var den stamfunktion til $f(x) = 2x + 3$ hvis graf har linjen med ligningen $y = x - 5$ som tangent. På lommeregneren tegner vi først grafen for $F$ . Da førstekoordinaten til tangentens røringspunkt viste sig at være $-1$, får vi tegnet tangenten i grafpunktet med førsteko1ordinat $-1$. Som vist på figur 2f ses at tangentens ligning er $y = x - 5$, som den skulle være.

Man får tangenten i grafpunktet med førstekoordinat -1 ved at vælge Math/Tangent og taste -1 ENTER .




Figur 2e




Figur 2f

## 2.17 Øvelse

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 2.16 .

(b) Kontrollér dine resultater i øvelserne 2.14 og 2.15 på den måde som er beskrevet i ramme 2.16 .

## 2.18 Øvelse (Uden hjælpemidler)

En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = x^3 \ .$$

Bestem den stamfunktion $F$ til $f$ hvis graf går gennem punktet $(2, 9)$ .

## 2.19 Øvelse

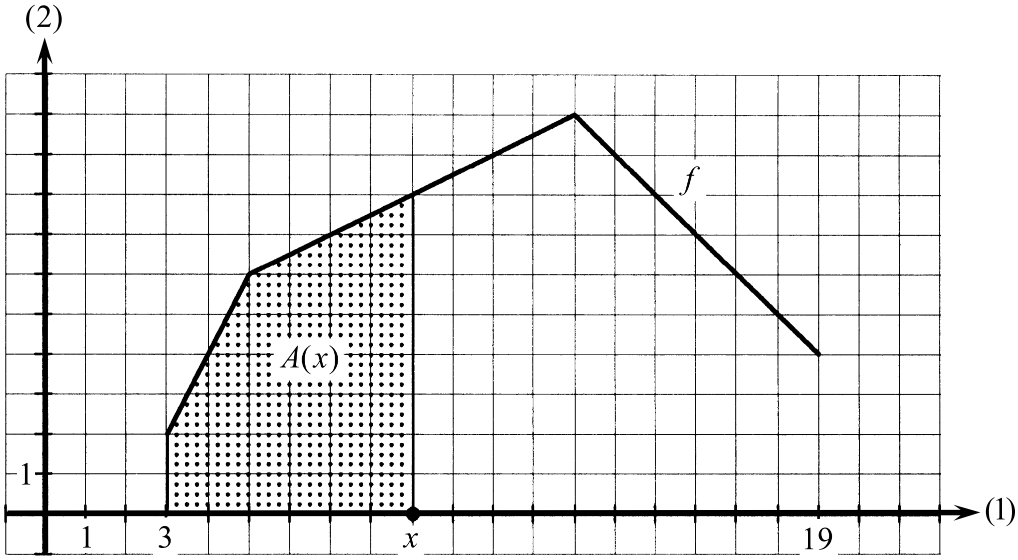
En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = -2x \ .$$

Bestem den stamfunktion $F$ til $f$ hvis graf har linjen med ligningen $y = 4x$ som tangent.

# 3. Stamfunktion og areal

## 3.01 Øvelse




Figur 3a

På figur 3a vokser det skraverede areal $A(x)$ når værdien af $x$ øges ved at trække $x$-punktet mod højre.

(a) Hvad er $A(x)$ når $x$ er 8, og når $x$ er 10?

(b) Hvor meget øges $A(x)$ når $x$ øges fra 8 til 10, og hvilken væksthastighed (arealenheder $A(x)$ øges med pr. enhed $x$ øges) svarer dette til?

(c) Bestem væksthastigheden i hvert af intervallerne $[8{,}5\,;\,9{,}5]$ og $[8{,}9\,;\,9{,}1]$.

(d) Gæt væksthastigheden $A'(x)$ i $x = 9$.

(e) Hvad er $f(9)$?

(f) Gæt væksthastigheden $A'(18)$.

(g) Hvad er $f(18)$?

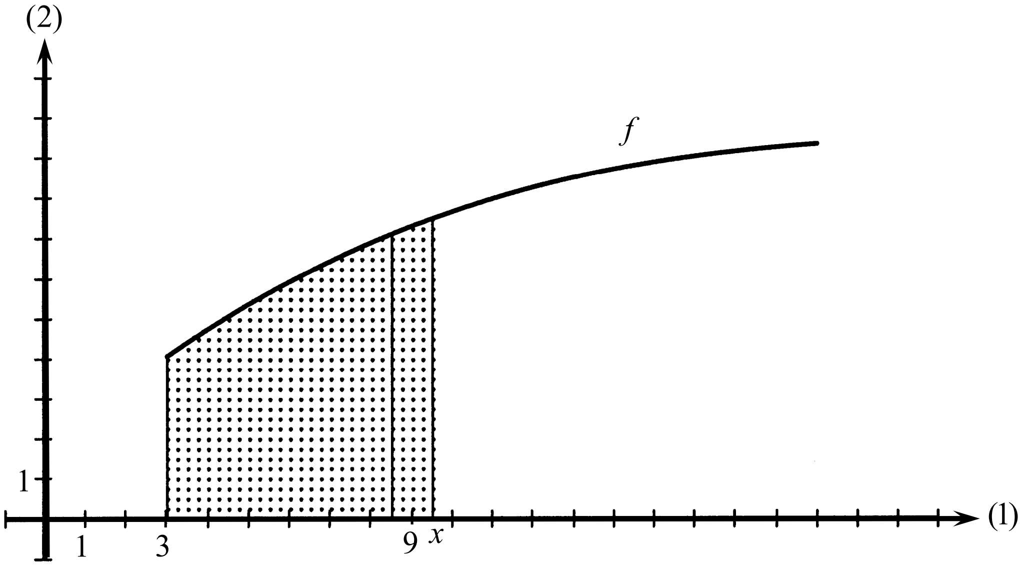
(h) Er $A(x)$ voksende, og er $A'(x)$ voksende?

(i) Tegn grafen for en funktion $g(x)$ i intervallet $[0;8]$ hvor den tilhørende arealfunktion $A(x)$ opfylder følgende:

(1) $A'(2) = 3$ .

(2) $A'(x)$ er voksende.

## 3.02 Arealfunktion. Definition og sætning




Lad $A(x)$ betegne arealet under *f*-grafen svarende til intervallet $[3; x]$ på førsteaksen. $A(x)$ kaldes **arealfunktionen**. (Hvis grafen fx var tegnet i et interval der startede i 5, så ville $A(x)$ betegne arealet under *f*-grafen svarende til intervallet $[5; x]$).

Den skraverede strimmel ved $x = 9$ har ca. samme areal som et rektangel med grundlinje 1 og højde $f(9)$, så omkring $x = 9$ vokser arealet $A(x)$ med en hastighed på ca. $f(9)$ enheder pr. *x*-enhed:

$$(\text{væksthastigheden for } A(x) \text{ i } 9) \;\approx\; f(9) \ .$$

Med symboler kan dette skrives

$$A'(9) \;\approx\; f(9) \ .$$

Vi vil senere bevise følgende sætning:

**(3b) Sætning om arealfunktion**

Om arealfunktionen $A(x)$ for en funktion $f(x)$ gælder:

$$A'(x) \;=\; f(x) \ .$$

## 3.03 Bestemme areal med stamfunktion

**(3c) Sætning om areal og stamfunktion**

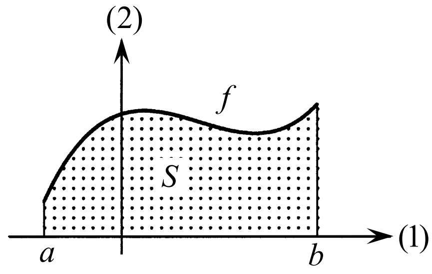
Hvis

$f(x) \geq 0$ for alle $x$ i $[a;b]$ og

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$,

så kan arealet $S$ mellem 1.aksen og grafen i intervallet $[a;b]$ (se figur 3d) beregnes sådan:

$$S = F(b) - F(a) \ .$$



Figur 3d

**Bevis for (3c)**

Lad $A(x)$ være arealfunktionen for $f(x)$.

Da $A(x)$ og $F(x)$ er stamfunktion til samme funktion, findes en konstant $k$ så

$(*) \quad A(x) = F(x) + k$ .

Nu fås

| | |
|---|---|
| $S = A(b)$ | Ifølge definitionen på arealfunktion. |
| $= A(b) - A(a)$ | Da $A(a) = 0$. |
| $= \big(F(b)+k\big) - \big(F(a)+k\big)$ | Ifølge $(*)$. |
| $= F(b) - F(a)$ | |

Hermed er sætning (3c) bevist.

## 3.04 Øvelse

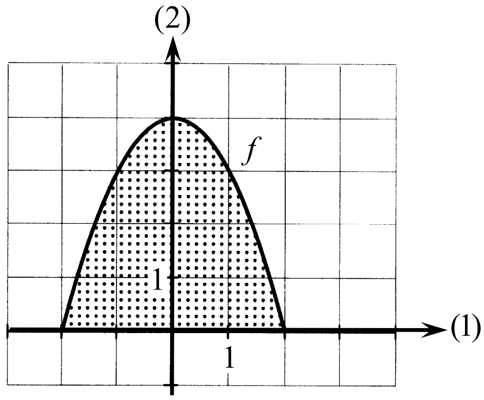
Figur 3e viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - x^2 \ , \quad -2 \leq x \leq 2 \ .$$

(a) Bestem en stamfunktion til $f(x)$.

(b) Brug sætning 3c til at bestemme arealet af punktmængden der begrænses af grafen for $f(x)$ og førsteaksen.

(c) Brug sætning 3c til at bestemme arealet af punktmængden der begrænses af grafen for $g(x) = 1 - x^2$ og førsteaksen.



Figur 3e

# 4. Bestemt integral

## 4.01 Bestemt integral. Definition og geometrisk fortolkning

**(4a) Definition** af bestemt integral

Antag at $f(x)$ er defineret i $[a;b]$ og har stamfunktionen $F(x)$.

Tallet

$$F(b)-F(a)$$

kaldes

integralet fra $a$ til $b$ af $f(x)$

og betegnes med symbolet

$$\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

$f(x)$ kaldes *integranden*.

BEMÆRK: Det er ikke krævet at $f(x) \geq 0$ .

**(4b) Sætning** om areal og bestemt integral

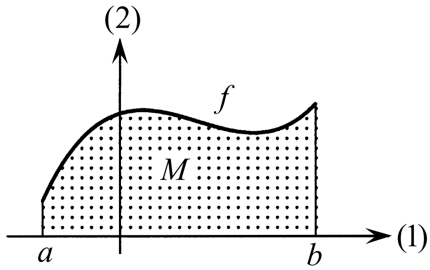
Hvis $f(x)$ har en stamfunktion og

$f(x) \geq 0$ for alle $x$ i $[a;b]$

så gælder

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \text{arealet af } M$$

hvor $M$ er området mellem førsteaksen og $f$-grafen i intervallet $[a;b]$ (se figur 4c).



Figur 4c

**Bevis** for sætning (4b)

Da

areal af $M = F(b)-F(a)$ ifølge sætning (3c)

og

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ ifølge definition (4a)

må $(*)$ gælde da de to tal der påstås at være ens, begge er lig $F(b)-F(a)$.

## 4.02 Beregne bestemt integral

**Bestemme integral ved hjælp af definitionen** $\int_a^b f(x)dx \;=\; F(b)-F(a)$

Vi vil beregne tallet

$$(*) \qquad \int_{-1}^{4} (6x^2-5)\,dx \;.$$

Da integranden har stamfunktionen

$$2x^3-5x$$

fås af definitionen på bestemt integral at $(*)$ er

$$\left(2\cdot 4^3-5\cdot 4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right) \;=\; \underline{\underline{105}} \;.$$

**Skrive ovenstående ved hjælp af symbolet** $[F(x)]_a^b \;=\; F(b)-F(a)$

Ovenstående kan skrives mere overskueligt ved at bruge symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ som betegner differensen $F(b)-F(a)$. Så kan udregningen skrives sådan:

$$\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx \;=\; \left[2x^3-5x\right]_{-1}^{4} \;=\; \left(2\cdot 4^3-5\cdot 4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right) \;=\; \underline{\underline{105}} \;.$$

Man kan evt. indføje to **linjeskift** i ovenstående formellinje så den kommer til at se sådan ud:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}(6x^2-5)\,dx \;&=\; \left[2x^3-5x\right]_{-1}^{4}\\ &=\; \left(2\cdot 4^3-5\cdot 4\right)-\left(2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)\right)\\ &=\; \underline{\underline{105}} \;.\end{aligned}$$

## 4.03 Øvelse

Brug metoden fra ramme 4.02 til at bestemme følgende tal:

$$(1)\;\int_{1}^{2}(2x-\tfrac{1}{x})\,dx \qquad (2)\;\int_{0}^{1} 6\,\mathrm{e}^{2x}\,dx \qquad (3)\;\int_{0}^{1}(x^3+3x^2+\tfrac{3}{4})\,dx \;.$$

## 4.04 Øvelse (uden hjælpemidler)

Bestem følgende tre tal:

$$(1)\;\int_{0}^{2}(3-\mathrm{e}^{-x})\,dx \qquad (2)\;\int_{0}^{1}(6x^2+4x-1)\,dx \qquad (3)\;\int_{1}^{2} x^{-2}\,dx \;.$$

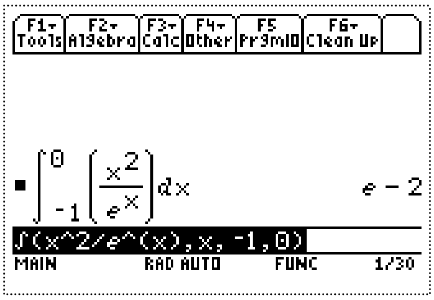
# 4.05 Udregne bestemt integral på TI-89's hovedskærm

På hovedskærmen, der fås frem ved at taste <u>HOME</u>, kan en stamfunktion bestemmes ved hjælp af det *integraltegn* der står over 7-tasten.

På figur 4d er vist hvordan man kan taste for at få bestemt tallet

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{e^x}\, dx \ .$$

Det ses at dette tal er $e-2$ .




Figur 4d

# 4.06 Øvelse

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 4.05 .

(b) Bestem tallet $\int_{1}^{\sqrt{e}} x \cdot \ln(x)\, dx$ .

# 4.07 Besvare opgave med fortolkning af integral

**Opgave**

Bestem integralet $\int_{-1}^{0} (-3x - x^2)\, dx$ , og <u>giv en geometrisk fortolkning af resultatet</u>.

**Besvarelse**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} (-3x - x^2)\, dx &= \left[-\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} \\ &= \left(-\tfrac{3}{2}\cdot 0^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3\right) - \left(-\tfrac{3}{2}\cdot(-1)^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(-1)^3\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{7}{6}}} \ .\end{aligned}$$

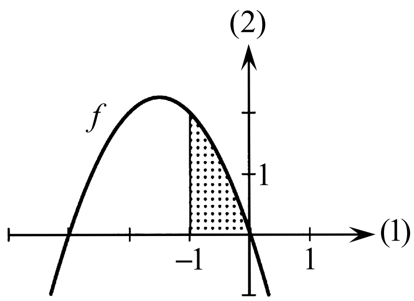
På figuren er skitseret grafen for funktionen

$f(x) = -3x - x^2$ .

Da $f(x) \geq 0$ for alle tal $x$ i $[-1, 0]$, gælder:

Resultatet $\frac{7}{6}$ er lig

<u><u>arealet af det skraverede område</u></u> .



## 4.08 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem integralet $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$, og giv en geometrisk fortolkning af resultatet.

## 4.09 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem integralet $\int_{0}^{2} (4-x^2)\,dx$, og giv en geometrisk fortolkning af resultatet.

## 4.10 Bestemme integral ud fra arealer

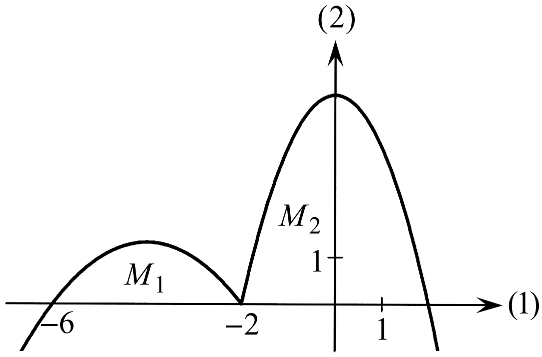
**Opgave**

På figur 4e ses grafen for en funktion $f$ der har nulpunkter $-6$, $-2$ og $2$.

Sammen med 1.aksen afgrænser grafen en punktmængde $M_1$ der har arealet $\frac{7}{2}$.

Sammen med 1.aksen og 2.aksen afgrænser grafen i 2. kvadrant en punktmængde $M_2$ som har arealet $6$.

Bestem $\int_{-6}^{0} f(x)\,dx$ .




Figur 4e

**Besvarelse**

Da $f(x) \geq 0$ for alle tal $x$ i $[-6;0]$, gælder

$$\int_{-6}^{0} f(x)\,dx \quad \text{er lig} \quad \text{arealet mellem 1.aksen og grafen i } [-6;0].$$

Dette areal er summen af arealerne af $M_1$ og $M_2$, dvs.

$$\tfrac{7}{2}+6=\tfrac{19}{2}$$

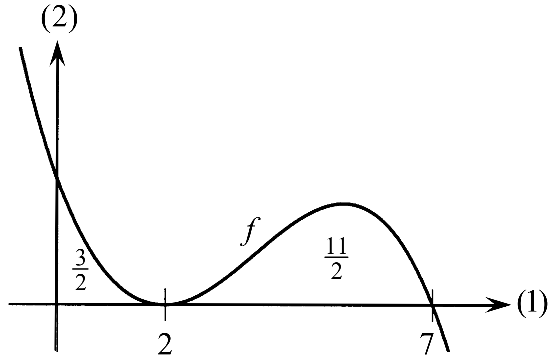
så

$$\int_{-6}^{0} f(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{19}{2}}} \ .$$

## 4.11 Øvelse

På figur 4f ses grafen for en funktion $f$ der har nulpunkterne $2$ og $7$. Sammen med akserne afgrænser grafen to områder hvis arealer er hhv. $\frac{3}{2}$ og $\frac{11}{2}$.

Bestem $\int_2^7 f(x)\,dx$ og $\int_0^7 f(x)\,dx$ .



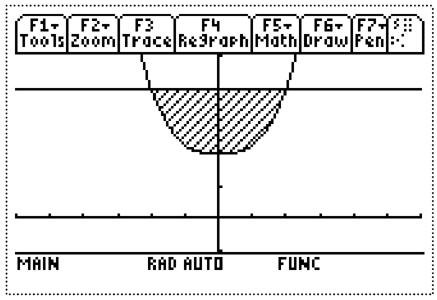

Figur 4f

## 4.12 Øvelse

Grafregnervinduet på figur 4g viser grafen for en funktion $f$ og en linje $l$ der skærer grafen i punkterne $(-2, 4)$ og $(2, 4)$ .

Grafen for $f$ afgrænser sammen med linjen $l$ den skraverede punktmængde der har arealet 6.

Bestem $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ .

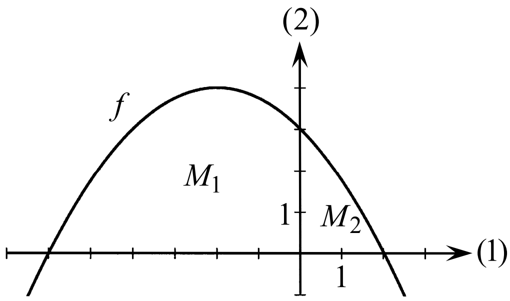



Figur 4g

## 4.13 Øvelse

Figur 4h viser grafen for en funktion $f$ hvis nulpunkter er $-6$ og $2$. Grafen afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde der har arealet $\frac{64}{3}$.
Andenaksen deler denne punktmængde i to punktmængder $M_1$ og $M_2$. Det oplyses at $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{10}{3}$ .

Bestem $\int_{-6}^{0} f(x)\,dx$ .




Figur 4h

# 5. Bestemme areal

## 5.01 Areal mellem graf og 1.akse. Graf vist, grænser oplyst

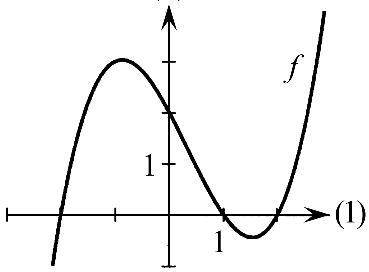
**Opgave**

På figur 5a ses grafen for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2 .$$

Grafen skærer førsteaksen i punkterne $P(-2, 0)$, $Q(1, 0)$ og $R(2, 0)$. I første og anden kvadrant afgrænser grafen for funktionen sammen med førsteaksen en punktmængde $M$ som har et areal.

Bestem arealet af $M$.



Figur 5a

**Besvarelse**

Man skal finde arealet af området $M$ mellem førsteaksen og grafen for $f$ i intervallet $[-2;1]$. Da $f(x) \geq 0$ for alle $x$ i dette interval, er arealet lig

$$\int_{-2}^{1} \left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2\right)dx \;=\; \left[\tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{8}\cdot 1^4 - \tfrac{1}{6}\cdot 1^3 - 1^2 + 2\cdot 1\right) - \left(\tfrac{1}{8}\cdot(-2)^4 - \tfrac{1}{6}\cdot(-2)^3 - (-2)^2 + 2\cdot(-2)\right)$$

$$= \tfrac{45}{8} .$$

Arealet af $M$ er $\underline{\underline{\tfrac{45}{8}}}$ .

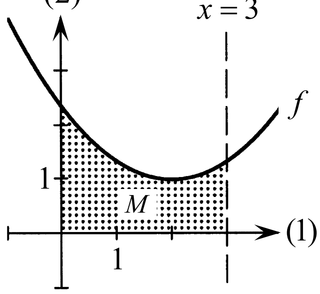
## 5.02 Øvelse (Uden hjælpemidler)

En funktion er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{7}{3} .$$

En punktmængde $M$ begrænses af grafen, førsteaksen, andenaksen og linjen med ligningen $x = 3$ (se figur 5b).

Bestem arealet af $M$.



Figur 5b

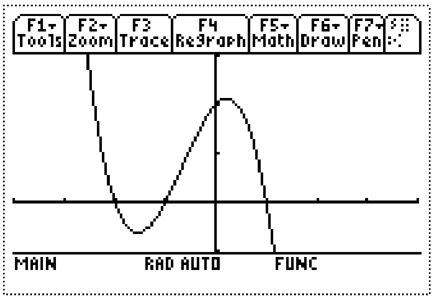
## 5.03 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Funktionen $f(x)$ er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2 \ .$$

På figur 5c ses grafen for $f(x)$. Grafen skærer førsteaksen i punkterne $P(-2, 0)$, $Q(-1, 0)$ og $R(1, 0)$. Sammen med førsteaksen afgrænser grafen i første og anden kvadrant en punktmængde $M$ som har et areal.

Bestem arealet af denne punktmængde.




Figur 5c

## 5.04 Areal mellem graf og 1.akse. Graf vist, grænse ej oplyst

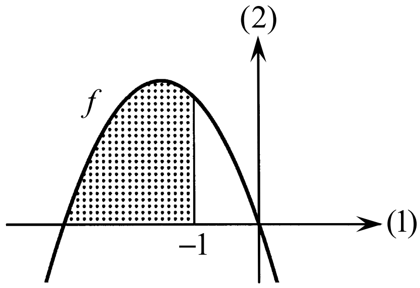
**Opgave**

På figur 5d er vist grafen for funktionen

$$f(x) = -x^2 - 3x \ .$$

En punktmængde $M$ er på figuren angivet som et prikket område der begrænses af grafen, førsteaksen og linjen med ligningen $x = -1$ .

Bestem arealet af $M$ .




Figur 5d

**Besvarelse**

Da ligningen $f(x) = 0$ har løsningerne $-3$ og $0$, er $-3$ førstekoordinat til det venstre af grafens skæringspunkter med førsteaksen.

Her skal indføjes en redegørelse for hvordan løsningerne er bestemt.

Da $f(x) \geq 0$ for alle $x$ i $[-3; -1]$, er arealet af $M$ lig

$$\int_{-3}^{-1} (-x^2 - 3x)\, dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}(-1)^3 - \tfrac{3}{2}(-1)^2\right) - \left(-\tfrac{1}{3}(-3)^3 - \tfrac{3}{2}(-3)^2\right)$$

$$= \tfrac{10}{3}$$

Arealet af $M$ er $\underline{\underline{\tfrac{10}{3}}}$ .

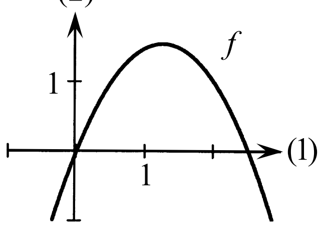
## 5.05 Øvelse

Figur 5e viser grafen for funktionen

$$f(x) = \tfrac{5}{2}x - x^2 \ .$$

Grafen og førsteaksen afgrænser en punktmængde $M$ som har et areal.

Bestem arealet af $M$ .




Figur 5e

## 5.06 Areal mellem graf og 1.akse. Graf ej vist, grænser ej oplyst

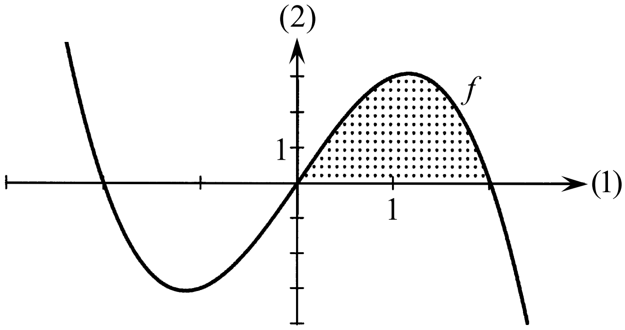
**Opgave**

Grafen for funktionen $f(x) = 4x - x^3$ afgrænser sammen med 1.aksen i første kvadrant en punktmængde som har et areal.

Bestem arealet af denne punktmængde.

**Besvarelse**

Skitse af lommeregnerens grafvindue:




Figur 5f

Da forskriften er et 3.gradspolynomium kan grafen ikke have flere sving end de viste, så det er det prikkede område vi skal finde arealet af.

For at bestemme nøjagtigt hvor grafen skærer førsteaksen, løser vi ligningen

$$f(x) = 0 \ .$$

Løsningerne er $-2$ , $0$ og $2$ .

Her skal indføjes en redegørelse for hvordan løsningerne er bestemt.

Vi skal altså finde arealet af området mellem førsteaksen og grafen i $[0;2]$ .
Da $f(x) \geq 0$ for alle $x$ i dette interval, er arealet

$$\int_0^2 (4x - x^3)\,dx \;=\; \left[2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 \;=\; \left(2\cdot 2^2 - \tfrac{1}{4}\cdot 2^4\right) - \left(2\cdot 0^2 - \tfrac{1}{4}\cdot 0^4\right) \;=\; 4 \ .$$

Punktmængden der afgrænses af 1.aksen og grafen i første kvadrant har arealet $\underline{\underline{4}}$ .

## 5.07 Øvelse

Grafen for $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 4$ afgrænser sammen med førsteaksen og andenaksen i anden kvadrant en punktmængde der har et areal.

Bestem arealet af denne punktmængde.

## 5.08 Øvelse

Grafen for funktionen $f(x) = \frac{4}{9} - x^2$ afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde $M$ der har et areal.

Bestem arealet af $M$ .

## 5.09 Areal mellem to grafer. Beskrivelse af metoden

På de tre figurer nedenfor er vist graferne for to funktioner $f$ og $g$ samt tre arealer $A$, $A_1$ og $A_2$:

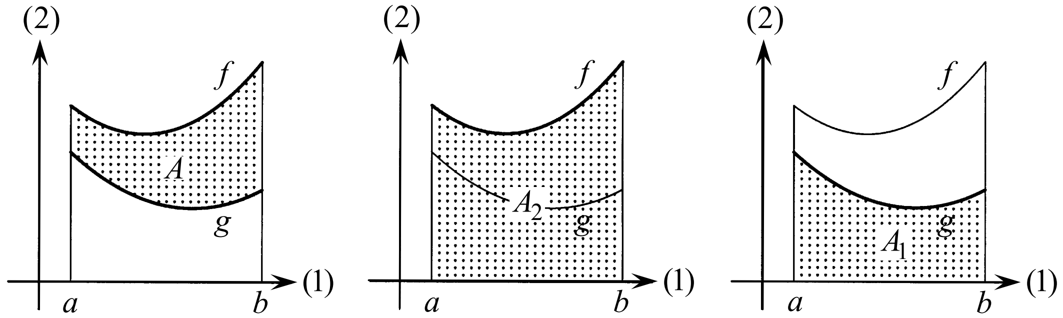
Vi vil angive en metode til at bestemme $A$.

Det ses at vi kan få $A$ ved at trække $A_1$ fra $A_2$:

$$A = A_2 - A_1 .$$

Hvert af arealerne $A_1$ og $A_2$ er arealet mellem førsteaksen og en graf over førsteaksen, så de kan bestemmes ved hjælp af sætning (4b) :

$$A_1 = \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{og} \quad A_2 = \int_a^b f(x)\,dx .$$

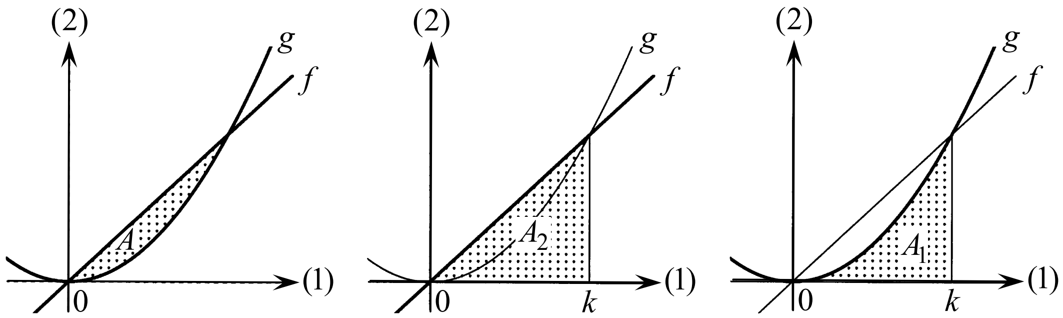



På de tre figurer nedenfor er vist graferne for to funktioner $f$ og $g$ samt tre arealer $A$, $A_1$ og $A_2$.

Vi vil angive en metode til at bestemme $A$.

Det ses at $A = A_2 - A_1$, så

$$A = \int_0^k f(x)\,dx - \int_0^k g(x)\,dx .$$



## 5.10 Areal mellem to grafer. Graf vist, grænser oplyst

**Opgave**

Grafen for funktion

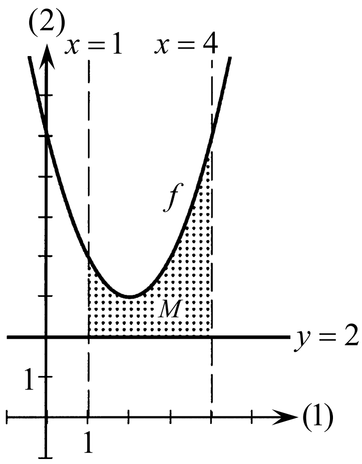
$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

afgrænser sammen med linjerne med ligningerne

$$x = 1 \;, \quad x = 4 \quad \text{og} \quad y = 2$$

en punktmængde $M$ som har et areal (se figur 5g).

Bestem arealet af $M$ .



Figur 5g

**Besvarelse**

Arealet mellem 1.aksen og grafen i $[1;4]$ er

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 7)\,dx \;=\; \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x\right]_1^4$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4^2 + 7\cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 7\cdot 1\right)$$

$$= 12 \;.$$

Arealet mellem 1.aksen og linjen med ligningen $y = 2$ er

$$\int_1^4 2\,dx \;=\; [2x]_1^4 \;=\; 2\cdot 4 - 2\cdot 1 \;=\; 6 \;.$$

Arealet af $M$ er $12 - 6 = \underline{\underline{6}}$ .

**Bemærkning**

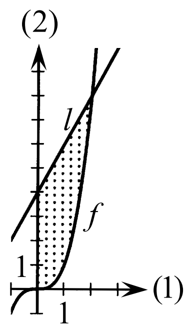
Arealet mellem 1.aksen og linjen med ligningen $y = 2$ kunne også være bestemt ved at bruge formlen for areal af rektangel: Areal lig højde gange grundlinje.

## 5.11 Øvelse

På figur 5h ses grafen for funktionen $f(x) = x^3$ og linjen $l$ med ligningen $y = 2x + 4$ . Grafen og linjen skærer hinanden i punktet $(2, 8)$ . Grafen og linjen afgrænser sammen med $y$-aksen en punktmængde der har et areal.

Bestem arealet af denne punktmængde.

Figur 5h



## 5.12 Areal mellem to grafer. Graf ej vist, grænser ej oplyst

**Opgave**

Grafen for $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ afgrænser sammen med linjen med ligningen $y = 2 + x$ en punktmængde $M$ som har et areal.

Bestem arealet af $M$ .

**Besvarelse**

Ud fra lommeregnerens vindue skitserer vi grafen for $f(x)$ og linjen $l$ med ligningen $y = 2 + x$, og vi skraverer punktmængden $M$ . (Se figur 5i).

Førstekoordinaterne til skæringspunkterne mellem grafen og linjen er løsningerne til ligningen

$$-x^2 + 2x + 4 \;=\; 2 + x \ .$$

Vi finder løsningerne $-1$ og $2$ .

Her skal indføjes en redegørelse for hvordan løsningerne er bestemt.

Disse tilføjer vi på skitsen (Se figur 5j).

Arealet mellem 1.aksen og grafen for $f(x)$ i $[-1; 2]$ er

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 4)\,dx \;=\; 12 \ .$$

Arealet mellem 1.aksen og linjen $y = 2 + x$ i $[-1; 2]$ er

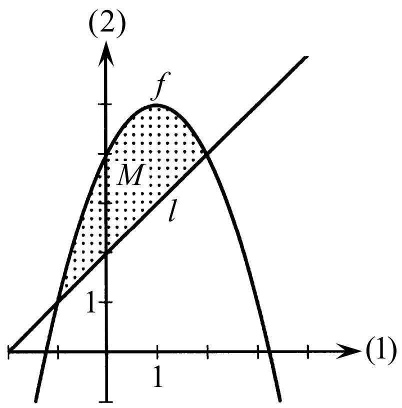
$$\int_{-1}^{2} (2 + x)\,dx \;=\; \frac{15}{2} \ .$$

Der skal indføjes redegørelser for hvordan integralerne er bestemt.

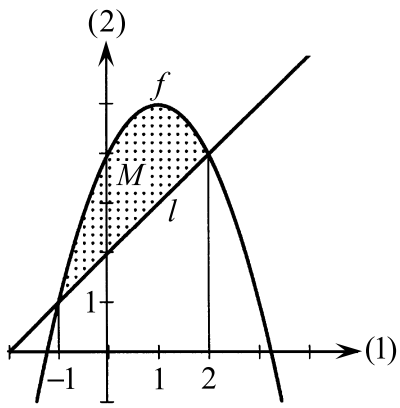
(Dette areal kunne også være bestemt ved at bruge formlen for areal af trapez).

Nu fås at

$$\text{areal}(M) \;=\; 12 - \frac{15}{2} \;=\; \underline{\underline{\frac{9}{2}}} \ .$$



Figur 5i



Figur 5j

## 5.13 Øvelse

Grafen for $f(x) = 3 - x^2$ afgrænser sammen med linjen med ligningen $y = -x + 3$ en punktmængde $M$ som har et areal.

Bestem arealet af $M$ .

## 5.14 Øvelse

En funktion $f(x)$ er bestemt ved $f(x) = x^2$ .

En ret linje $l$ skærer grafen for $f(x)$ i punkterne $S_1(-3, 9)$ og $S_2(2, 4)$ . Grafen for $f(x)$ afgrænser sammen med linjen $l$ en punktmængde $M$ som har et areal.

Bestem arealet af $M$ .

## 5.15 Øvelse

Grafen for funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 3$ afgrænser sammen med linjen med ligningen $y = 3$ et område der har et areal.

Bestem arealet.

## 5.16 Øvelse

Grafen for funktionen $f$ med forskriften $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ afgrænser sammen med linjerne med ligninger $y = x$ , $x = 0$ og $x = 1$ et område der har et areal.

Bestem dette areal.

## 5.17 Øvelse

Grafen for funktionen $f$ med forskriften $f(x) = \frac{1}{x}$ afgrænser sammen med linjerne med ligninger $y = 2x$ og $x = 2$ et område der har et areal.

Bestem arealet.