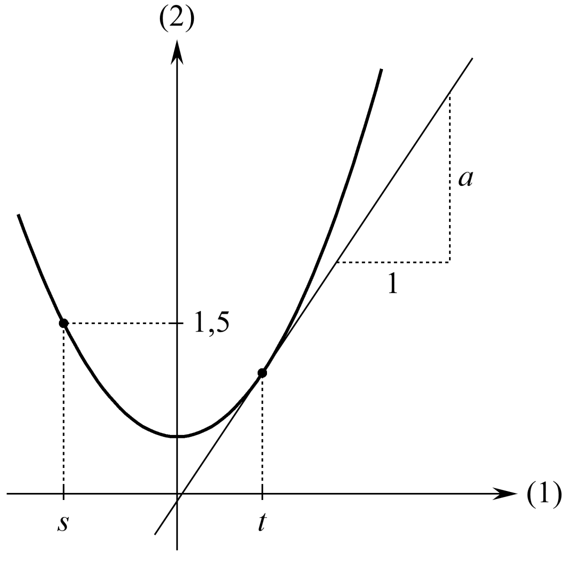
Kom i gang-opgaver
til
differentialregning



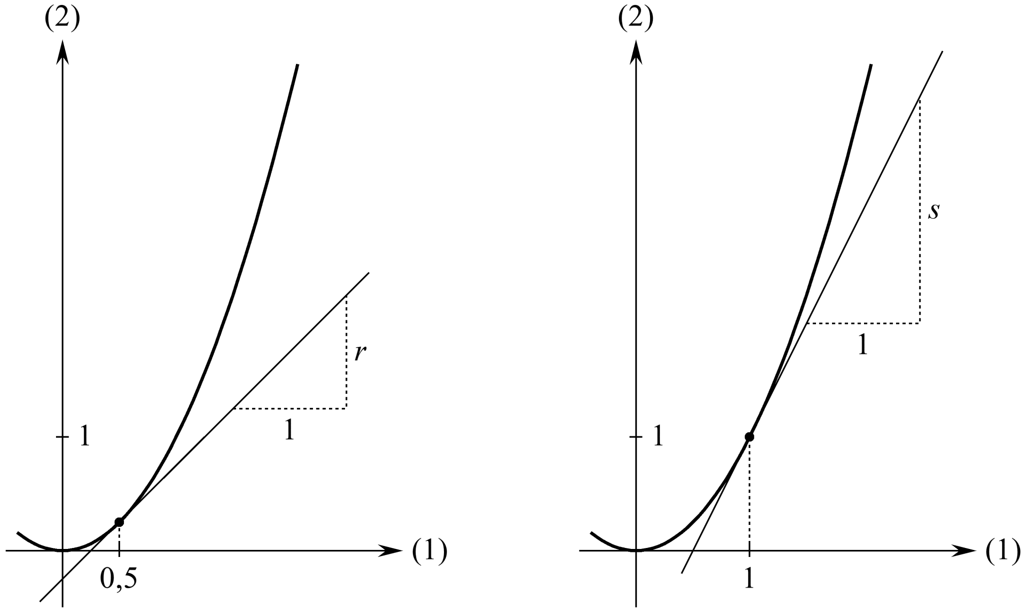
2004 Karsten Juul

Det er kortsigtet at løse en opgave ved blot at udskifte tallene i en besvarelse af en tilsvarende opgave. Dette skyldes at man så normalt ikke beskæftiger sig effektivt med de grundmetoder som besvarelsen er sammensat af.

Ved løsning af hjemmeopgaver i et nyt emne kan det virke uoverkommeligt at finde frem til de relevante grundmetoder, selv om disse har været gennemgået i timerne. I dette hæfte er grundmetoderne derfor skrevet i rammer som der henvises til i opgaverne.

I modsætning til hvad der ofte er tilfældet, beskriver dette hæfte grundmetoderne på sådan en måde at også en begynder i emnet vil opfatte det som metoder.

Opgave Diff 1



Begge billeder viser grafen for funktionen x^2. På hver af billederne er også tegnet en af grafens tangenter. Der er en smart metode til at udregne tangenters hældningskoefficienter: Man skal bruge noget som kaldes funktionens differentialkvotient. I mange formelsamlinger og lærebøger står at

funktionen x^2 har differentialkvotienten $2 \cdot x$.

Dette kan også skrives sådan

$$\left(x^2\right)' = 2 \cdot x$$

eller sådan

Hvis $f(x) = x^2$, så er $f'(x) = 2 \cdot x$.

Ramme 1 Udregning af hældningskoefficienten r for tangenten på billedet til venstre.

Da

1) x^2 har differentialkvotienten $2 \cdot x$ og
2) røringspunktet for tangenten har x-koordinaten $0{,}5$

så kan man finde hældningskoefficienten for tangenten ved at

indsætte $0{,}5$ for x i $2 \cdot x$.

Tangenten har altså hældningskoefficienten $r = 1$.

Brug metoden fra ramme 1 til at finde hældningskoefficienten s for tangenten på billedet til højre.

Find differentialkvotienten for $\frac{1}{x}$ i en formelsamling eller en lærebog. **Brug den** til for funktionen $\frac{1}{x}$ at finde hældningskoefficienten for tangenten til grafen i punktet med x-koordinat $2{,}5$.

Opgaven fortsætter på næste side!

Vi ser igen på grafen for x^2. **Find** hældningskoefficienten for den tangent hvis røringspunkt har x-koordinaten 2, og for den tangent hvis røringspunkt har x-koordinaten $2{,}3$. En af grafens tangenter har hældningskoefficienten 11. **Find** x-koordinaten til røringspunktet for denne tangent.

Opgave Diff 2

> **Ramme 2** — Differentialkvotient for x^n
>
> $\left(x^3\right)' = 3 \cdot x^2$, $\left(x^4\right)' = 4 \cdot x^3$, $\left(x^5\right)' = 5 \cdot x^4$ Osv.

Brug metoden fra ramme 2 til at finde differentialkvotienten af x^8.

Nu lader vi p være et bestemt tal, men du får ikke at vide hvad det er for et tal. **Skriv** et udtryk med x og p som er differentialkvotienten af x^p.

> **Ramme 3** — Differentialkvotient for "konstant gange funktion"
>
> $\left(7 \cdot x^3\right)' = 7 \cdot \left(x^3\right)'$, $\left(-x^4\right)' = \left((-1) \cdot x^4\right)' = (-1) \cdot \left(x^4\right)' = -\left(x^4\right)'$, Osv.
>
> De mellemregninger som er skrevet med småt, skrives normalt ikke.

Brug metoderne fra rammerne 2 og 3 til at finde differentialkvotienten for hver af funktionerne $2 \cdot x^3$ og $-x^4$.

> **Ramme 4** — Differentialkvotient for "konstant plus funktion"
>
> $\left(13 + 2 \cdot x^3\right)' = \left(2 \cdot x^3\right)'$, $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)' = \left(x^2\right)'$, $\left(7 - x^4\right)' = \left(7 + (-x^4)\right)' = \left(-x^4\right)'$,
>
> $\left(\sqrt{3} + x^4 - 7\right)' = \left(\sqrt{3} + x^4 + (-7)\right)' = \left(x^4\right)'$, Osv.
>
> De mellemregninger som er skrevet med småt, skrives normalt ikke.

Brug metoderne fra rammerne 2, 3 og 4 til at finde differentialkvotienten for hver af funktionerne $2 \cdot x^3 + 4$ og $1 - 2 \cdot x^4$.

> **Ramme 5** — Differentialkvotient for "funktion plus funktion"
>
> $\left(x^2 - x^3\right)' = \left(x^2\right)' - \left(x^3\right)'$, $\left(2 \cdot x^3 + \frac{1}{x}\right)' = \left(2 \cdot x^3\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)'$, Osv.

Brug metoden fra ramme 5 til at bestemme differentialkvotienten for hver af funktionerne $2 \cdot x^3 + \frac{1}{x}$ og $x^2 - 5 \cdot x^4$.

Opgave Diff 3

Ramme 6	Differentialkvotient for " x "
$(x)' = 1$	

Brug metoderne fra rammerne 3 og 6 til at finde differentialkvotienten for funktionen $\frac{2}{3} \cdot x$.

Ramme 7	Differentialkvotient for "konstant"
$(5{,}2)' = 0$, $\left(\sqrt{3}\right)' = 0$, Osv.	

Brug metoderne fra rammerne 5, 3, 6 og 7 til at finde differentialkvotienten for funktionen $\frac{2}{3} \cdot x + 4$.

Man får ikke differentialkvotienten af $\frac{2}{3} \cdot x$ hvis man differentierer på begge sider af gange-prikken. **Begrund** dette ved at udregne både $\left(\frac{2}{3} \cdot x\right)'$ og $\left(\frac{2}{3}\right)' \cdot (x)'$.

Slå op i en formelsamling eller en lærebog og find differentialkvotienten for $f(x) \cdot g(x)$. **Brug denne formel** til at finde differentialkvotienten for $\frac{2}{3} \cdot x$. Når resultatet reduceres, skulle det gerne give det samme som du fik før. **Kontrollér** dette.

Find differentialkvotienten for funktionen $0{,}2 \cdot x^3 - 4{,}6 \cdot x + 3{,}5$.

Opgave Diff 4

Slå op i en formelsamling eller en lærebog og find differentialkvotienten for $\frac{1}{x}$. Da $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$, er $\frac{6}{x} = 6 \cdot \frac{1}{x}$. **Brug dette og metoden fra ramme 3** til at finde differentialkvotienten for $\frac{6}{x}$.

Slå op i en formelsamling eller en lærebog og find differentialkvotienten for $\frac{f(x)}{g(x)}$. **Brug denne formel** til at finde differentialkvotienten for $\frac{6}{x}$. Når resultatet reduceres, skulle det gerne give det samme som du fik før. **Kontrollér** dette.

Hvilken brøk skal man gange $\frac{1}{x}$ med hvis resultatet skal være lig $\frac{1}{2 \cdot x}$? **Brug dette og metoden fra ramme 3** til at finde differentialkvotienten for $\frac{1}{2 \cdot x}$.

Opgave Diff 5

Ramme 8	Udtrykket "differentialkvotienten i 4" og symbolet $f'(4)$

Hvis $f(x) = 2 \cdot x^3$, så er $f'(x) = 6 \cdot x^2$. Om funktionen $f(x)$ gælder

1) "**Differentialkvotienten i 4**" er "**det tal som $6 \cdot x^2$ bliver når 4 indsættes for x**".
2) $f'(4)$ er "**det tal som $6 \cdot x^2$ bliver når 4 indsættes for x**".
3) $f'(4)$ er "**Differentialkvotienten i 4**".
4) $f'(4)$ er "**hældningskoefficienten for tangenten til grafen i punktet med x-koordinat 4**".

Brug oplysningerne i ramme 8 til at løse følgende opgaver:

a) For funktionen $f(x) = x^2 + 3 \cdot x$ **skal du finde** differentialkvotienten i -2.

b) For funktionen $f(x) = 2 \cdot x^2 - 5$ **skal du finde** $f'(3)$.

c) For funktionen $f(x) = 11 - x^3$ **skal du finde** hældningskoefficienten for tangenten til grafen i punktet med x-koordinat $\frac{2}{3}$.

d) For funktionen $f(x) = 4 - \dfrac{3}{x}$ **skal du finde** $f'(2)$. **Find desuden** et tal k som ikke er 2, så $f'(k) = f'(2)$.

Opgave Diff 6

Brug metoder fra de foregående opgavers rammer til at løse følgende opgaver:

a) En funktion f er givet ved $f(x) = x^4 - 4x^2 + 15$.
Bestem $f'(x)$.

b) Bestem $f'(2)$ når $f(x) = \dfrac{x^3}{4}$.

c) Bestem $f'(-1)$ når $f(x) = \dfrac{2}{3 \cdot x} + \dfrac{2 \cdot x}{3}$.

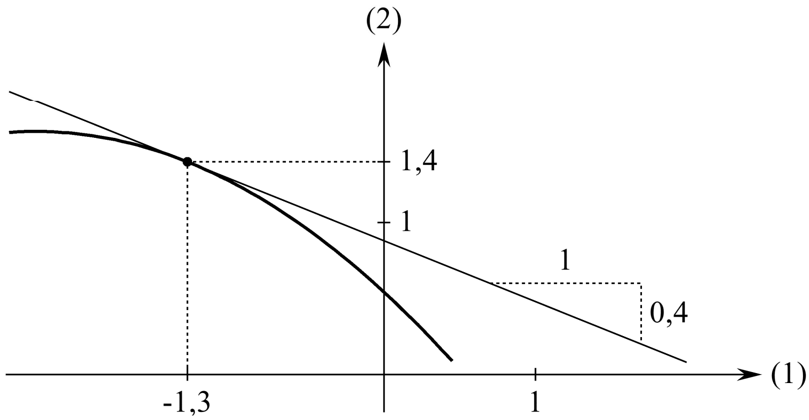
d) En funktion f er bestemt ved $f(x) = 2 \cdot x^2 - x$.
Bestem $f'(x)$.
Bestem $f'(3)$.
Hvilket tal skal indsættes for x hvis $f'(x)$ skal blive 3?

Opgave Diff 7

Tallene i rammen er tilfældige og har ikke noget at gøre med figuren.

Ramme 9 Givet: punkt på linjen og dennes hældningskoefficient. Find: ligning for linjen.

- **Hvis** en linje har hældningskoefficienten 3 og går gennem punktet $P(2,5)$, **så** er ligningen $y-5=3\cdot(x-2)$ en ligning for linjen.
- **Hvis** en linje har hældningskoefficienten -4 og går gennem punktet $P(\frac{1}{2},-1)$, **så** er ligningen $y-(-1)=-4\cdot(x-\frac{1}{2})$ en ligning for linjen.
- **Osv.**



Den krumme kurve på billedet er grafen for en funktion. Den rette linje er en af tangenterne til denne graf. **Brug metoden fra ramme 9** til at finde en ligning for denne tangent.

Brug den ligning du har fundet, til at finde ud af hvor tangenten skærer y-aksen. **Kontrollér** at dit svar passer med figuren.

På tangenten er der et punkt som har y-koordinaten 0. **Brug den ligning du har fundet**, til at finde dette punkts x-koordinat. **Kontrollér** at dit svar passer med figuren.

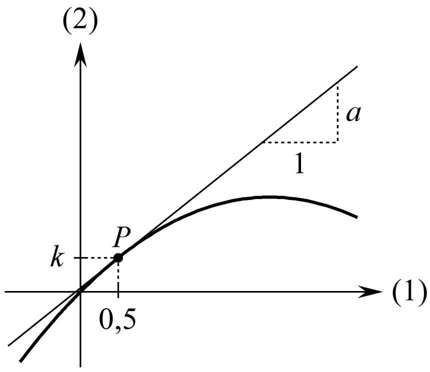
Reglen i ramme 9 er forklaret ved hjælp af to eksempler og et "osv.". Hvis man i et af disse eksempler

1) erstatter tallene med bogstaver og
2) skriver hvilke tal der må skrives på disse bogstavers pladser

så får man en abstrakt formulering af reglen. **Skriv** en abstrakt formulering af reglen.

Grafen skærer y-aksen i punktet $A(0, 0{,}542)$. Grafens tangent i dette punkt har hældningskoefficienten $-0{,}92$. **Skriv** en ligning for denne tangent.

Opgave Diff 8



Den krumme kurve på billedet er grafen for funktionen $-0{,}2 \cdot x^2 + x$.

Ramme 10	<u>Givet:</u> grafpunkts x-koordinat. <u>Find:</u> punktets y-koordinat.

Da

1) punktet P ligger på grafen for funktionen $-0{,}2 \cdot x^2 + x$ og
2) x-koordinaten for P er $0{,}5$

så kan man finde y-koordinaten for P ved at

udregne det tal som $-0{,}2 \cdot x^2 + x$ bliver når $0{,}5$ indsættes for x.

Altså er $k = -0{,}2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5 = 0{,}45$.

Ramme 11	<u>Givet:</u> røringspunkts x-koordinat. <u>Find:</u> tangents hældningskoefficient.

Da

1) den viste linje er tangent til grafen for funktionen $-0{,}2 \cdot x^2 + x$ og
2) røringspunktets x-koordinat er $0{,}5$

så kan man finde linjens hældningskoefficient ved at

1) differentiere: $\left(-0{,}2 \cdot x^2 + x\right)' = -0{,}4 \cdot x + 1$ og
2) udregne det tal som $-0{,}4 \cdot x + 1$ bliver når $0{,}5$ indsættes for x.

Altså er $a = -0{,}4 \cdot 0{,}5 + 1 = 0{,}8$.

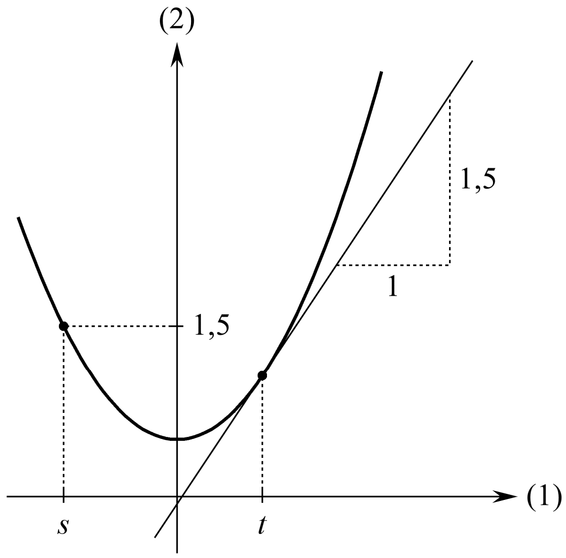
Et af punkterne på grafen har x-koordinaten 2. Dette punkt kalder vi Q. **Brug metoden fra ramme 10** til at finde y-koordinaten for Q.

Grafen har en tangent hvis røringspunkt er Q. Denne linje kalder vi m. **Brug metoden fra ramme 11** til at finde hældningskoefficienten for m.

Brug metoden fra ramme 9 til at bestemme en ligning for linjen m.

Brug metoderne fra rammerne 9, 10 og 11 til at bestemme en ligning for den tangent hvis røringspunkt har x-koordinaten 5.

Opgave Diff 9



Den krumme kurve på billedet er grafen for funktionen $x^2 + 0{,}5$.
På grafens venstre gren ligger et punkt P som har y-koordinaten $4{,}5$. (P er ikke vist).

Ramme 12 Givet: grafpunkts y-koordinat. Find: punktets x-koordinat.

Da

1) P ligger på grafen for funktionen $x^2 + 0{,}5$ og
2) P har y-koordinaten $4{,}5$

så kan man finde x-koordinaten for P ved at

finde de tal der, når de indsættes for x , får $x^2 + 0{,}5$ til at blive $4{,}5$.

Løsningerne til ligningen $x^2 + 0{,}5 = 4{,}5$ er -2 og 2 . Altså har P x-koordinaten -2 .

En af tangenterne til grafen har hældningskoefficienten $4{,}5$. Den rører grafen i et punkt som vi kalder Q . (Hverken Q eller tangenten i Q er vist på billedet).

Ramme 13 Givet: tangents hældningskoefficient. Find: røringspunktets x-koordinat.

Da

1) Q ligger på grafen for funktionen $x^2 + 0{,}5$ og
2) tangenten i Q har hældningskoefficienten $4{,}5$

så kan man finde x-koordinaten for Q ved at

1) differentiere: $\left(x^2 + 0{,}5\right)' = 2 \cdot x$
2) finde de tal der, når de indsættes for x , får $2 \cdot x$ til at blive $4{,}5$.

Løsningen til ligningen $2 \cdot x = 4{,}5$ er $2{,}25$. Altså har Q x-koordinaten $2{,}25$.

Opgaven fortsætter på næste side!

Brug metoderne fra rammerne 12 og 13 til at finde de to tal som på billedet er kaldt s og t.

På grafens venstre gren ligger et punkt R som har y-koordinaten $0{,}75$. **Brug metoderne i rammerne 12 og 11** til at finde hældningskoefficienten for grafens tangent i punktet R.

En linje med hældningskoefficient -6 er tangent til grafen i et punkt som vi kalder U. **Brug metoderne fra rammerne 13 og 10** til at finde koordinatsættet for U.

Opgave Diff 10

Ramme 14 Udtrykket "funktionsværdien i 4" og symbolet $f(4)$

Hvis vi kalder funktionen $x^2 - x$ for $f(x)$, så gælder

1) "**Funktionsværdien i 4**" er "**det tal som $x^2 - x$ bliver når 4 indsættes for x**".

2) $f(4)$ er "**det tal som $x^2 - x$ bliver når 4 indsættes for x**".

3) $f(4)$ er "**funktionsværdien i 4**".

4) $f(4)$ er "***y*-koordinaten til det punkt på grafen som har *x*-koordinaten 4**".

I det følgende står $***$ for et eller andet regneudtryk med x. Vi kalder dette regneudtryk for $g(x)$. **Brug oplysningerne i ramme 14** til at skrive følgende sætninger i en ny udgave hvor det understregede er oversat til matematisk symbolsprog.

> Hvis et punkt P ligger på grafen for $\underline{***}$ og P har x-koordinaten 2, så er y-koordinaten for P lig $\underline{\text{det tal som } *** \text{ bliver når 2 indsættes for } x}$.
>
> Hvis røringspunktet for en tangent til grafen for $\underline{***}$ har x-koordinaten -1, så er røringspunktets y-koordinat $\underline{\text{det tal som } *** \text{ bliver når } -1 \text{ indsættes for } x}$, da røringspunktet ligger på grafen.

Et punkt Q har x-koordinaten 8 og ligger på grafen for en funktion $h(x)$. **Skriv** med symboler koordinatsættet for Q.

Brug reglerne fra nogle af rammerne til for funktionen $f(x) = x^3 - 7$ at bestemme en ligning for tangenten til grafen i punktet $(2, f(2))$.

Brug computer til i samme koordinatsystem at få tegnet både

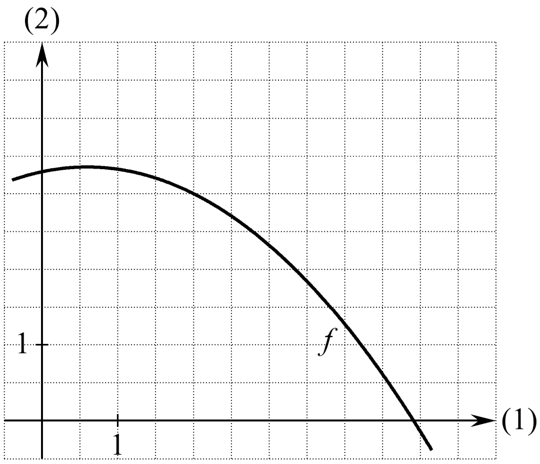
– grafen for f og

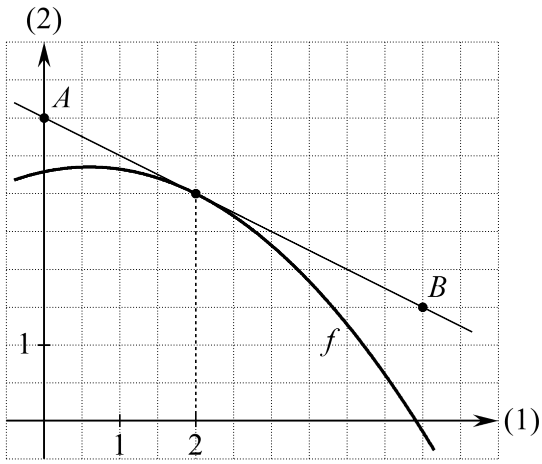
– linjen med den ligning du har fundet.

Kontrollér

– at linjen ser ud til at være tangent til grafen i det punkt hvis førstekoordinat er 2.

Opgave Diff 11





Ramme 15 Givet: Grafen for f (ovenfor til venstre). Find: $f'(2)$.

Vi skal finde differentialkvotienten $f'(2)$. Denne er lig hældningskoefficienten for tangenten i punktet med x-koordinat 2.

1) Denne tangent tegnes på øjemål så den passer bedst muligt med grafen omkring punktet med x-koordinat 2. (Se figuren ovenfor til højre).

2) Derefter bestemmes tangentens hældningskoefficient:

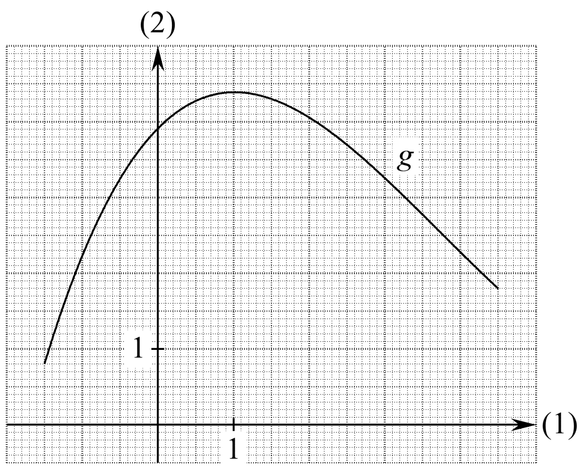
Koordinaterne til to punkter på tangenten aflæses: $A(0,4)$ og $B(5,1{,}5)$.

Tangentens hældningskoefficient er $\dfrac{1{,}5-4}{5-0} = -0{,}5$.

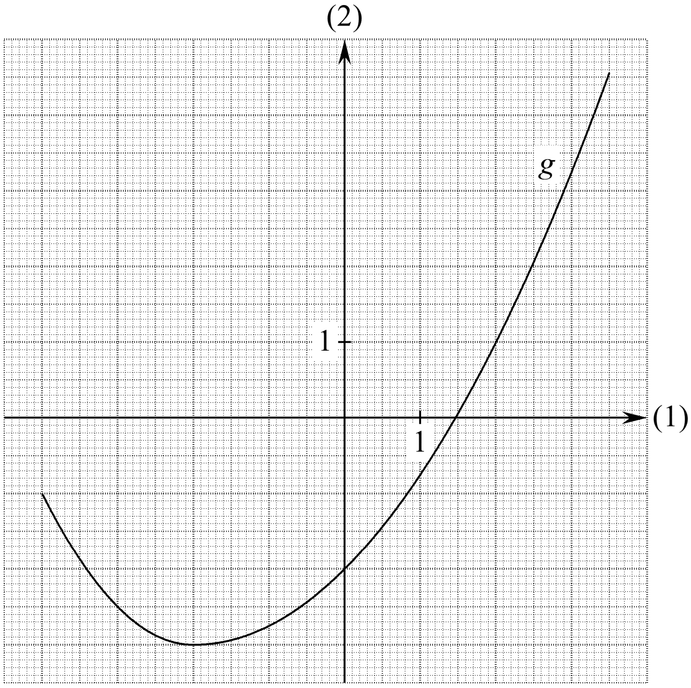
Altså er $f'(2) = -0{,}5$.

En funktion g er givet ved grafen nedenfor. **Brug metoden fra ramme 15** til at finde $g'(0)$. **Find** det tal der skal indsættes for x hvis $g'(x)$ skal blive 0. **Brug en af oplysningerne i ramme 14** til at finde tallet $g(0)$.

Definitionsmængden for g er intervallet $]-1{,}5\,;\ 4{,}5[$. **Brug punkt 4) i ramme 8** til at finde ud af hvilke tal man kan indsættes for x hvis der skal gælde at $g'(x) < 0$?



Opgave Diff 12



Billedet viser grafen for en funktion $g(x)$ hvis definitionsmængde er $]-4;3{,}5[$.

Brug punkt 4) i ramme 14 til at finde tallet $g(1)$, og til at finde ud af hvilke tal der kan indsættes for x når der skal gælde at $g(x) < 0$.

Brug punkt 4) i ramme 8 til at finde tallet $g'(0)$, og til at finde ud af hvilke tal der kan indsættes for x når der skal gælde at $g'(x) < 0$.

Funktionen $g(x)$ er differentialkvotienten for en anden funktion som vi kalder $h(x)$. **Find ud af** hvilke tal der kan indsættes for x når der skal gælde at $h'(x) > 0$.

Tegn grafen for en eller anden funktion $f(x)$ som opfylder alle følgende betingelser:

1) $f'(2) = 1$
2) For ethvert tal mindre end 2 gælder at når det indsættes for x er $f'(x) > 1$.
3) For ethvert tal større end 2 gælder at når det indsættes for x er $f'(x) < 1$.

Opgave Diff 13

Ramme 16 <u>Givet:</u> $f'(x)$ <u>Gør rede for</u>: $f(x)$ er voksende eller aftagende i et interval

Når en funktions differentialkvotient er positiv i et interval, så er funktionen voksende i intervallet, og når funktionens differentialkvotient er negativ i et interval, så er funktionen aftagende i intervallet. Her er to eksempler:

Da

1) x^2-2x har differentialkvotienten $2x-2$, og
2) $]-\infty;1[$ er et interval, og
3) $2x-2$ bliver et negativt tal uanset hvilket tal fra $]-\infty;1[$ der indsættes for x,

kan sluttes at

4) x^2-2x er aftagende i $]-\infty;1[$.

Da

1) $\frac{1}{3}x^3+2x$ har differentialkvotienten x^2+2 , og
2) **R** er et interval, og
3) x^2+2 bliver et positivt tal uanset hvilket tal fra **R** der indsættes for x ,

kan sluttes at

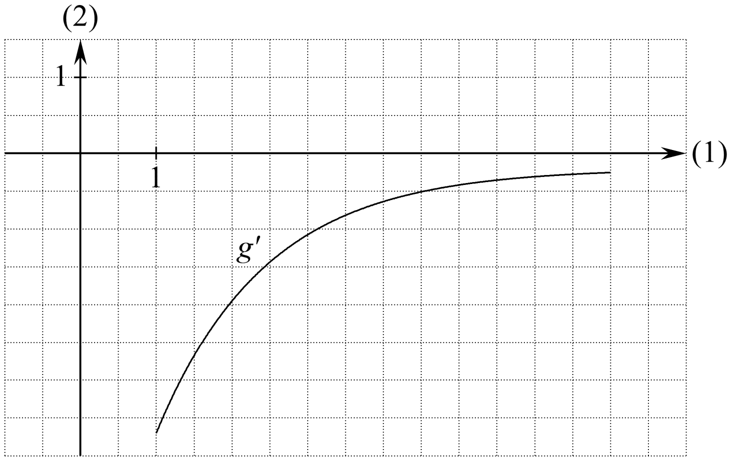
4) $\frac{1}{3}x^3+2x$ er voksende i **R**.

Brug nogle af metoderne fra rammerne 2-7 til at finde differentialkvotienten for funktionen x^3-3x . **Brug metoden fra ramme 16** til at gøre rede for at x^3-3x er voksende i $]1;-\infty[$.

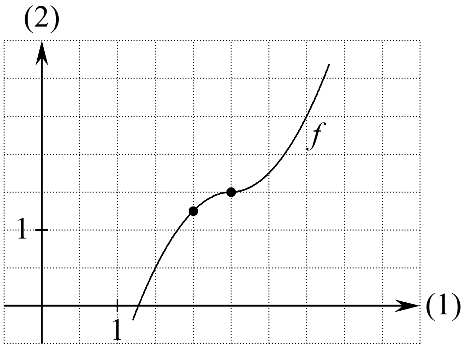
Brug nogle af metoderne fra rammerne 2-7 til at finde differentialkvotienten for funktionen $1-x-x^3$. **Brug metoden fra ramme 16** til at gøre rede for at $1-x-x^3$ er aftagende i **R**.

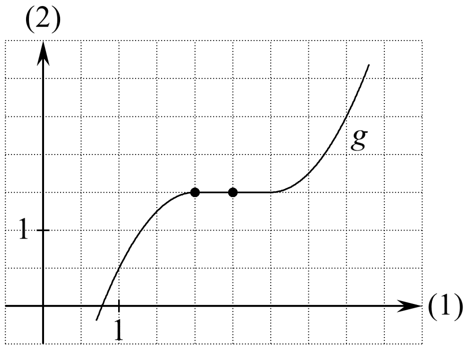
Når $f(x)$ er funktionen $2x^5+34x$, skal du **bruge nogle af metoderne fra rammerne 2-7** til at finde finde $f'(x)$. **Brug metoden fra ramme 16** til at gøre rede for at $f(x)$ er voksende i **R**.

Vi vil nu undersøge en funktion som vi kalder $g(x)$. Billedet nedenfor viser grafen for $g'(x)$. Da billedet ikke viser grafen for $g(x)$, kan metoden fra ramme 15 ikke bruges til at finde en differentialkvotient for $g(x)$. **Find** differentialkvotienten $g'(4{,}5)$. **Brug metoden fra ramme 16** til at gøre rede for at $g(x)$ er aftagende i intervallet $]1;7[$.



Opgave Diff 14





Som bekendt er betingelsen for at en funktion er voksende, at uanset hvilke to punkter man vælger på grafen, så gælder at

(∗) det af punkterne der har den største *x*-koordinat,
har også den største *y*-koordinat.

På grafen for f er vist to punkter. Vi ser at for disse to punkter gælder $(*)$. Og vi ser at hvis vi vælger to andre punkter på grafen, så vil $(*)$ også gælde for dem. Altså er $f(x)$ en voksende funktion selv om $f'(x)$ ikke er et positivt tal for enhver værdi af x. **Brug punkt 4) i ramme 8** til at finde det tal man skal indsætte for x for at $f'(x)$ bliver 0.

På grafen for g er vist to punkter. Disse to punkter har samme *y*-koordinat, så $g(x)$ er ikke en voksende funktion. Da $g'(x)$ er 0 for alle tal i et interval, er $g(x)$ ikke voksende. **Brug punkt 4) i ramme 8** til at finde ud af hvilke tal man kan indsætte for x når $g'(x)$ skal blive 0.

Brug reglen i ramme 18 til at gøre rede for at funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$ er aftagende i intervallet $]-\infty; 5]$.

Brug reglen i ramme 17 til at gøre rede for at funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ er voksende i intervallet **R**.

Ramme 17 <u>Givet</u>: $f'(x)$ <u>Gør rede for</u>: at $f(x)$ er voksende i et interval

Hvis

$f'(x)$ er et positivt tal eller 0 for enhver værdi af x i et interval I , og
$f'(x)$ er ikke 0 for alle tal i et interval der er en del af I ,

så gælder at

$f(x)$ er voksende i intervallet I .

Ramme 18 <u>Givet</u>: $f'(x)$ <u>Gør rede for</u>: at $f(x)$ er aftagende i et interval

Hvis

$f'(x)$ er et negativt tal eller 0 for enhver værdi af x i et interval I , og
$f'(x)$ er ikke 0 for alle tal i et interval der er en del af I ,

så gælder at

$f(x)$ er aftagende i intervallet I .

Opgave Diff 15

Ramme 19 <u>Givet</u>: $f'(x)$ <u>Gør rede for</u>: Fortegn for $f'(x)$

Funktionen $x^3 - 6x^2 + 9x$ har differentialkvotienten $3x^2 - 12x + 9$, og ligningen $3x^2 - 12x + 9 \ = \ 0$ har løsningerne 1 og 3.

Da differentialkvotienten $3x^2 - 12x + 9$ kun kan skifte fortegn ved en værdi af x hvor den er 0 eller ikke defineret, må den have samme fortegn for alle x-værdier i intervallet $]1;3[$, så da 2 ligger i $]1;3[$ og $3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9$ er -3 som er negativ, må $3x^2 - 12x + 9$ være negativ for enhver x-værdi i $]1;3[$.

I ramme 19 undersøges funktionen $x^3 - 6x^2 + 9x$. **Brug denne undersøgelse sammen med metoden fra ramme 18** at gøre rede for at funktionen $x^3 - 6x^2 + 9x$ er aftagende i intervallet $[1;3]$.

Som nævnt i ramme 19 har funktionen $x^3 - 6x^2 + 9x$ differentialkvotienten $3x^2 - 12x + 9$. **Brug metoden fra ramme 19** til at gøre rede for at differentialkvotienten $3x^2 - 12x + 9$ bliver et positivt tal uanset hvilket tal fra intervallet $]3;\infty[$ der indsættes for x.

Brug metoden fra ramme 17 til at gøre rede for at funktionen $x^3 - 6x^2 + 9x$ er voksende i intervallet $[3;\infty[$.

Brug metoden fra rammerne 19 og 17 til at gøre rede for at funktionen $x^3 - 6x^2 + 9x$ er voksende i intervallet $]-\infty;1]$.

Ramme 20 Monotoniforhold

Når der står at man skal finde <u>monotoniforholdene</u> for en funktion, så betyder det at man skal finde ud af hvor funktionen vokser, og hvor funktionen aftager.

Man kan bruge metoderne i rammerne 16-19 til at finde monotoniforholdene (og til at begrunde at de er som man påstår).

Facit kan skrives sådan:

$x^3 + 3x^2$ er voksende i $]-\infty;-2]$, aftagende i $[-2;0]$ og voksende i $[0;\infty[$.

Hvis en funktion $\frac{1}{x}$ er kaldt $f(x)$, kan facit skrives sådan:

f er aftagende i $]-\infty;0[$ og aftagende i $]0;\infty[$.

Opgave Diff 16

Lad $f(x)$ betegne funktionen $\frac{1}{4}x^4 - 8x$.

Brug metoderne fra rammerne 2-7 til at finde differentialkvotienten $f'(x)$.

Find løsningerne til ligningen $f'(x) = 0$.

Brug metoden fra ramme 19 til at finde de værdier af x hvor $f'(x)$ er positiv, og de værdier af x hvor $f'(x)$ er negativ.

Læs ramme 20, og **brug metoden fra rammerne 17 og 18** til at finde monotoniforholdene for $f(x)$.

Opgave Diff 17

Læs ramme 20, og **bestem** monotoniforholdene for funktionen

$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$.

Brug computer til at få tegnet grafen for $f(x)$.

Kontrollér at de monotoniforhold du har angivet, er i overensstemmelse med grafen.

Opgave Diff 18

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x\,.$$

Bestem monotoniforholdene for f .

Bestem en ligning for den linje l som er tangent til grafen for f i punktet $\left(3, f(3)\right)$.

Grafen for f har en anden tangent m der er parallel med l .

Bestem koordinatsættet til røringspunktet for tangenten m .

Brug computer til i samme koordinatsystem at få tegnet både

- grafen for f ,
- linjen med den ligning du har fundet, og
- punktet med det koordinatsæt du har fundet.

Kontrollér

- at de monotoniforhold du har fundet, er i overensstemmelse med figuren,
- at linjen ser ud til at være tangent til grafen i det punkt hvis førstekoordinat er 3, og
- at det fundne punkt ligger korrekt, herunder at det ser ud til at hvis man tegnede tangenten i punktet, ville den være parallel med l .