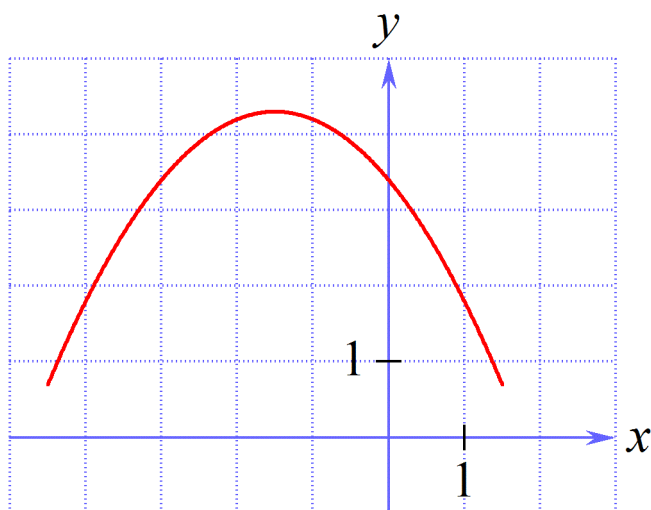


Grundlæggende funktioner

for B-niveau i hf

Udgave 2



2013 Karsten Juul

Grundlæggende funktioner for B-niveau i hf

Procent

| | |
|---------------------------------|---|
| 1. Procenter på en ny måde..... | 1 |
|---------------------------------|---|

Lineær vækst

| | |
|------------------------------------------------------------|---|
| 2. Lineær funktion..... | 2 |
| 3. Lineær vækst..... | 2 |
| 4. Skriv ligning ud fra beskrivelse af lineær vækst..... | 2 |
| 5. Skriv hvad a og b i lineær forskrift fortæller..... | 3 |

Eksponentiel vækst

| | |
|------------------------------------------------------------------|---|
| 6. Eksponentiel funktion..... | 3 |
| 7. Eksponentiel vækst..... | 3 |
| 8. Skriv ligning ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst..... | 4 |
| 9. Skriv hvad a og b i eksponentiel forskrift fortæller..... | 4 |

Potensvækst

| | |
|---------------------------------------------------|---|
| 10. Potensfunktion..... | 5 |
| 11. Potensvækst..... | 5 |
| 12. Udregn procentændring for potensfunktion..... | 5 |

Grafer

| | |
|-----------------------------------------|---|
| 13. Graf for lineær funktion..... | 6 |
| 14. Graf for eksponentiel funktion..... | 6 |
| 15. Graf for potensfunktion..... | 6 |

Regression

| | |
|----------------------------------|---|
| 16. Lineær regression..... | 7 |
| 17. Regression, årstal..... | 7 |
| 18. Eksponentiel regression..... | 8 |
| 19. Potensregression..... | 9 |

Bestem forskrift ud fra to punkter

| | |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 20. Bestem a og b i $y = ax + b$ ud fra to punkter..... | 10 |
| 21. Bestem a og b i $y = ax + b$ ud fra punkter givet ved tekst..... | 11 |
| 22. Bestem b i $f(x) = ax + b$ ud fra a og punkt..... | 11 |
| 23. Bestem a i $f(x) = ax + b$ ud fra b og punkt..... | 11 |
| 24. Udregn a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra to punkter..... | 12 |
| 25. $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{x \cdot k}$ | 13 |
| 26. Udregn a og b i $y = b \cdot x^a$ ud fra to punkter..... | 13 |

Fordoblings- og halveringskonstant

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 27. Fordoblingskonstant og halveringskonstant..... | 14 |
| 28. Aflæs fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf..... | 14 |
| 29. Udregn fordoblings- og halveringskonstant ud fra forskrift..... | 15 |
| 30. Skriv hvad fordoblings- og halveringskonstant fortæller..... | 15 |
| 31. Udregn funktionsværdier (y -værdier) med fordoblingskonstant og halveringskonstant..... | 16 |

Beviser

| | |
|-------------------------------------------------------------|----|
| 32. Bevis for hvad a og b i $y = ax + b$ fortæller..... | 16 |
| 33. Bevis for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller..... | 17 |
| 34. Bevis for reglen om potensvækst..... | 17 |

Proportionale og omvendt proportionale variable

| | |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 35. Proportionale variable..... | 18 |
| 36. Omvendt proportionale variable..... | 19 |
| 37. Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale..... | 20 |

Logaritmefunktioner

| | |
|-----------------------------------------------|----|
| 38. Naturlig logaritme og titallogaritme..... | 21 |
|-----------------------------------------------|----|

Polynomier

| | |
|-------------------------------|----|
| 39. Polynomier og rødder..... | 22 |
|-------------------------------|----|

Andengradspolynomier

| | |
|--------------------------------------------------------------|----|
| 40. Andengradspolynomium..... | 23 |
| 41. Toppunkt..... | 23 |
| 42. Diskriminant..... | 24 |
| 43. Betydning af a , b , c og d for grafen..... | 24 |
| 44. Nulpunkt..... | 25 |
| 45. Antal nulpunkter eller løsninger..... | 25 |
| 46. Løs andengradsligning..... | 26 |
| 47. Ligninger af typen $x^2 = r$ | 27 |
| 48. Bevis for formelen for løsning af andengradsligning..... | 28 |

En tidligere udgave af dette hæfte har skiftet adresse til

http://mat1.dk/grundlaeggende_funktioner_for_b_niveau_i_hf_udgave_1.pdf

Procent

1. Procenter på en ny måde.

1a. T er 34% af 600

$$\begin{aligned} T &= 34\% \text{ af } 600 \\ &= 600 \cdot 0,34 \quad \leftarrow \text{ da } 34\% = \frac{34}{100} = 0,34 \\ &= 204 \end{aligned}$$

Du plejer nok at udregne 34% ved at dividere med 100 og gange med 34.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,34 for at udregne 34%.

1b. S er 34% større end 600

$$\begin{aligned} S &= 134\% \text{ af } 600 \quad \leftarrow \text{ da } 100\% + 34\% = 134\% \\ &= 600 \cdot 1,34 \quad \leftarrow \text{ da } 134\% = \frac{134}{100} = 1,34 \\ &= 804 \end{aligned}$$

Når du udregner det der er 34% større end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og lægge til tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 1,34 for at udregne det der er 34% større.

1c. R er 34% mindre end 600

$$\begin{aligned} R &= 66\% \text{ af } 600 \quad \leftarrow \text{ da } 100\% - 34\% = 66\% \\ &= 600 \cdot 0,66 \quad \leftarrow \text{ da } 66\% = \frac{66}{100} = 0,66 \\ &= 396 \end{aligned}$$

Når du udregner det der er 34% mindre end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og trække fra tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,66 for at udregne det der er 34% mindre.

1d. Eksempel

Antal ansatte skal stige 10% hvert år.

I år er antal ansatte 1000

Om 1 år er antal ansatte $1000 \cdot 1,10 = 1100$

Om 2 år er antal ansatte $1000 \cdot 1,10 \cdot 1,10 = 1210$

Om 16 år er antal ansatte $1000 \cdot 1,10^{16} = 4595$

Om x år er antal ansatte $1000 \cdot 1,10^x$

$$100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1,10$$

$$1,10 \cdot 1,10 = 1,10^2$$

1e. Vækstrate

Hvis en størrelse stiger 18% om året, så siger vi at den årlige vækstrate er 18%.

Hvis den ugentlige vækstrate er 6%, så bliver størrelsen i løbet af 5 uger ganget med $1,06^5 = 1,33828$, dvs. den stiger med 33,8%.

Hvis den månedlige vækstrate er $r = 2\% = 0,02$, og antal måneder størrelsen vokser, er $n = 8$, så bliver den ganget med $(1+r)^n = 1,02^8 = 1,17166$, dvs. den vokser med 17,2%.

1f. Gennemsnitlig procent

En størrelse stiger fra A til B på n år. Hvis der havde været samme procentstigning r hvert år, så ville gælde $A \cdot (1+r)^n = B$. Denne procentstigning r kalder vi

den gennemsnitlige årlige procentvise stigning.

Hvis $A = 158$, $B = 221$ og $n = 10$, er $158 \cdot (1+r)^{10} = 221$.
Nspire løser denne ligning mht. r for $r > 0$ og får $r = 0,034126$,
dvs. Den gennemsnitlige årlige procentvise stigning er 3,41%.

Normalt er procentstigningen ikke den samme hvert år.

Vi kan udregne den gennemsnitlige procent r ved at bruge metoden der er vist her.

Lineær vækst

2. Lineær funktion.

En funktion f er lineær hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = ax + b$$

Både a og b kan være ethvert tal.

Definitionsmængden (dvs. de tal vi kan indsætte for x) er alle tal.

Tallet a i en lineær forskrift $f(x) = ax + b$ kaldes hældningskoefficienten.

3. Lineær vækst.

3a. Reglen for lineær vækst (reglen for hvad a i en lineær sammenhæng $y = ax + b$ fortæller):

Hver gang vi gør x én enhed større, bliver der lagt a til værdien af y .

3b. Reglen for hvad b i lineær sammenhæng $y = ax + b$ fortæller:

Når x er 0, er y lig b .

3c. Af 3b og 3a får vi: På grafen for $y = 3x + 5$ ligger punkterne (0,5), (1,8), (2,11), (3,14) osv.

3d. Hvis vi aflæser punkterne (0,7), (1,11), (2,15), (3,19) på en lineær graf, kan vi af 3a og 3b slutte at $y = 4x + 7$.

3e. For $y = 3x + 5$ gælder: Hvis vi 10 gange gør x en større, vil der 10 gange blive lagt 3 til y , så:

Hver gang vi gør x 10 enheder større, bliver der lagt 30 til værdien af y .

Dvs. på grafen ligger punkterne (0,5), (10,35), (20,65), (30,95) osv.

4. Skriv ligning ud fra beskrivelse af lineær vækst.

Opgave

Man skal betale 10 kr. for at starte på et computerspil, og herefter skal man betale 0,50 kr. pr. minut man spiller.

Skriv en ligning vi kan bruge til at udregne prisen for at spille når vi kender antal minutter vi spiller.

Besvarelse

Vi bruger x og y til at betegne følgende talstørrelser:

x = antal minutter

y = prisen i kr.

Så kan vi oversætte oplysningerne til følgende:

Når $x = 0$ er $y = 10$

Hver gang vi gør x én enhed større, bliver der lagt 0,50 til y .

Af reglerne for hvad a og b i $f(x) = ax + b$ fortæller, får vi:

$$\underline{\underline{y = 0,50 \cdot x + 10}} \text{ når } x = \text{antal minutter} \text{ og } y = \text{prisen i kr.}$$

5. Skriv hvad a og b i lineær forskrift fortæller.

Opgave

For en cirkel på et elektronisk billede kan radius udregnes ved hjælp af formlen $y = -2 \cdot x + 80$ hvor x er temperaturen i $^{\circ}\text{C}$ og y er radius i mm.

Hvad fortæller tallene -2 og 80 om radius?

Besvarelse

Af reglerne for hvad a og b i $y = ax + b$ fortæller, får vi:

-2 er det tal der bliver lagt til radius y hver gang vi gør temperaturen x en grad større .

Når temperaturen x er 0, er radius y lig 80 .

Dvs.:

Radius er 80 mm ved 0°C og bliver 2 mm mindre for hver grad temperaturen stiger .

Ekspontiel vækst

6. Ekspontiel funktion.

En funktion f er eksponentiel hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = ba^x$$

a og b skal være positive tal.

Definitionsmængden (dvs. de tal vi kan indsætte for x) er alle tal.

Tallet a i en eksponentiel forskrift $f(x) = ba^x$ kaldes fremskrivningsfaktoren.

7. Ekspontiel vækst.

7a. Reglen for eksponentiel vækst (reglen for hvad a i eksponentiel sammenhæng $y = ba^x$ fortæller):

Hver gang vi gør x én enhed større, bliver værdien af y ganget med a .

7b. Reglen for hvad b i en eksponentiel sammenhæng $y = ba^x$ fortæller:

Når x er 0, er y lig b .

7c. Af 7b og 7a får vi: På grafen for $y = 8 \cdot 1,5^x$ ligger punkterne (0,8), (1,12), (2,18) osv.

7d. Hvis vi aflæser punkterne (0,2), (1,6), (2,18) på en eksponentiel graf, kan vi af 7a og 7b slutte at $y = 2 \cdot 3^x$.

7e. For $y = 5,8 \cdot 1,043^x$ gælder: Hvis vi 8 gange gør x en større, vil y 8 gange blive ganget med 1,043, så: Hver gang vi gør x 8 enheder større, bliver y ganget med $1,043^8 = 1,40047$.
Dvs. Hver gang vi gør x 8 enheder større, bliver y 40 % større.

8. Skriv ligning ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst.

8a. Opgave Kl. 9 er der 275 celler, og hver time bliver antal celler 20 % større.
(voksende) Opstil en model der beskriver udviklingen i antallet af celler.

Svar Når $x =$ antal timer efter kl. 9 og $y =$ antal celler gælder:
Når antal timer x bliver 1 større, vil antal celler y blive 20 % større, dvs. antal celler y bliver ganget med 1,20. (Start: 100 %. Efter stigning: 120 % = 120:100 = 1,20).

Når antal timer x er 0, er antal celler y lig 275.

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi $y = 275 \cdot 1,20^x$

8b. Opgave Den 1. maj er afgiften 860 kr. Afgiften nedsættes med 2,5 % pr. uge
(aftagende) Opstil en model der beskriver udviklingen i størrelsen af afgiften.

Svar Når $x =$ antal uger efter 1. maj og $y =$ afgiften i kr. gælder:
Når antal uger x bliver 1 større, vil afgiften y blive 2,5 % mindre, dvs. afgiften y bliver ganget med 0,975. (Start: 100 %. Efter fald: 97,5 % = 97,5:100 = 0,975).

Når antal uger x er 0, er afgiften y lig 860.

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi $y = 860 \cdot 0,975^x$

9. Skriv hvad a og b i eksponentiel forskrift fortæller.

9a. Opgave Om en figur på skærmen gælder at $y = 300 \cdot 1,072^x$ hvor
(voksende) $x =$ temperaturen og $y =$ arealet

Hvad fortæller tallene 300 og 1,072 om figuren.

Svar Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi

Når temperaturen x bliver 1 grad større, bliver arealet y ganget med 1,072, dvs. arealet y bliver 7,2 % større. (Start: 100 %. 100 % · 1,072 = 107,2 %. 107,2 % - 100 % = 7,2 %)

Når temperaturen x er 0, er arealet y lig 300.

Dvs. Når temperaturen er 0 grader, er arealet 300, og
arealet bliver 7,2 % større for hver grad temperaturen stiger.

9b. Opgave Antallet af dyr ændres sådan at $y = 270 \cdot 0,90^x$ hvor
(aftagende) $x =$ antal dage efter 1. juni og $y =$ antal dyr

Hvad fortæller tallene 270 og 0,90 om antallet af dyr.

Svar Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi

Når antal dage x bliver 1 større, bliver antal dyr y ganget med 0,90, dvs. antal dyr y bliver 10 % mindre. (Start: 100 %. 100 % · 0,90 = 90 %. 90 % - 100 % = -10 %)

Når antal dage x er 0, er antal dyr y lig 270.

Dvs. Den 1. juni er antallet af dyr 270, og hver dag bliver antallet af dyr 10 % mindre.

Potensvækst

10. Potensfunktion.

En funktion f er en potensfunktion hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = bx^a$$

b skal være et positivt tal. a behøver ikke være positiv.

Definitionsmængden (dvs. de tal vi kan indsætte for x) er de positive tal.

Tallet a i potensforskriften $f(x) = bx^a$ kaldes eksponenten.

11. Potensvækst.

11a. Reglen for potensvækst: Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k :
Når x bliver ganget med k , så bliver y ganget med k^a .

12. Udregn procentændring for potensfunktion.

12a. Opgave (udregn ændring af y)

Et dyr vokser sådan at $y = 2,7 \cdot x^{1,6}$ hvor y er vægten i gram, og x er længden i cm.
Når dyret er blevet 40 % længere, hvor mange procent tungere er det så blevet?

Besvarelse

At x bliver 40% større, er det samme som
at x bliver ganget med 1,40. (Start: 100%. Efter stigning: 140%=140:100=1,40)

Når x bliver ganget med 1,40, så bliver y ganget med

$$1,40^{1,6} = 1,71319 \approx 1,71$$

At y bliver ganget med 1,71, er det samme som

at y bliver 71% større. (Start: 100%. 100%·1,71=171%. 171%–100%=71%)

Dyret bliver 71% tungere når det bliver 40% længere.

Bemærk at vi IKKE sætter 1,40 ind i ligningen. Vi bruger eksponenten fra ligningen.

12b. Opgave (udregn ændring af x)

Der gælder $f(x) = 240 \cdot x^{-0,51}$ hvor x er rutens længde i km, og $f(x)$ er antal deltagere.
Hvis man vil fordoble antallet af deltagere, hvor mange procent kortere skal ruten så være?

Besvarelse

Når vi ganger x med k , bliver antallet $f(x)$ ganget med $k^{-0,51}$. Da vi vil gange $f(x)$ med 2, skal vi vælge k så $k^{-0,51} = 2$. Nspire løser denne ligning mht. k og får $k = 0,256889$.

At længden x skal ganges med 0,257, er det samme som at længden bliver 74,3% mindre.

(Start: 100%. 100%·0,257 = 25,7%. 25,7%–100% = –74,3%)

Ruten skal være 74,3% kortere for at antal deltagere fordobles.

12c. Forskellige formuleringer

Det er ikke altid at der står at x eller y ændres med en procent. I stedet kan der stå at x eller y ganges med et tal (tallet k i 11a ovenfor). Så slipper vi for at omsætte mellem procent og tal når vi bruger 11a ovenfor.

I 12b ovenfor blev y ganget med 2. Det er det samme som at y bliver 100% større.

Grafer

13. Graf for lineær funktion $f(x) = ax + b$

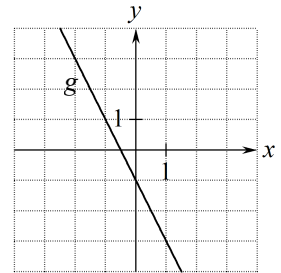
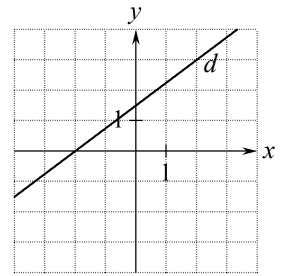
Grafen er en ret linje.

På grafen ser vi:

Definitionsmængde: alle tal dvs. alle tal kan indsættes for x .

Voksende: a positiv eksempel: d

Aftagende: a negativ eksempel: g



14. Graf for eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ hvor a og b er positive

På grafen ser vi:

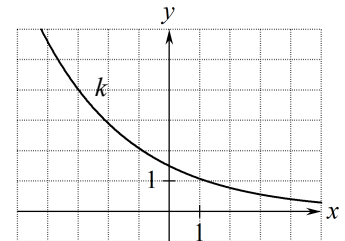
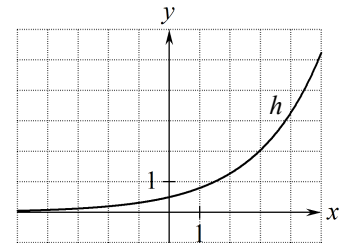
Definitionsmængde: alle tal dvs. alle tal kan indsættes for x .

Voksende: a større end 1 eksempel: h

Aftagende: a mellem 0 og 1 eksempel: k

Grafen kommer vilkårlig tæt på x -aksen, men når den aldrig.

Bemærk at grafen krummer sådan: \cup eller sådan: \cap
 IKKE sådan: \cup , og IKKE sådan: \cap



15. Graf for potensfunktion $f(x) = bx^a$ hvor b er positiv

På grafen ser vi:

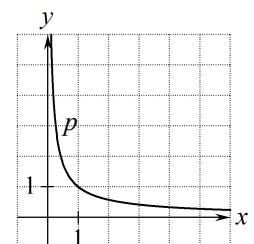
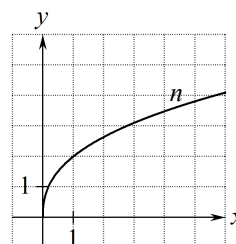
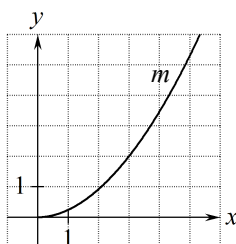
Definitionsmængde: de positive tal dvs. alle positive tal kan indsættes for x .

Voksende: a positiv

Aftagende: a negativ

Aftagende potensfunktion: grafen kommer vilkårlig tæt på x -aksen, men når den ikke.

- m : voksende potensfunktion
- n : voksende potensfunktion
- p : aftagende potensfunktion



Regression

16. Lineær regression.

Opgave

Vi har målt længde og bredde for nogle komponenter:

| | | | | | |
|-------------|------|------|------|------|------|
| længde i cm | 11,5 | 12,5 | 13,5 | 14,5 | 15,5 |
| bredde i cm | 5,1 | 5,3 | 5,9 | 6,1 | 6,6 |

Bredden $f(x)$, målt i cm, er med god tilnærmelse givet ved

$$f(x) = ax + b$$

hvor x er længden målt i cm.

Find tallene a og b .

Besvarelse

Vi indtaster tallene sådan at

længde kommer på den vandrette akse og bredde kommer på den lodrette akse.

Nspire laver lineær regression på de indtastede tal og får

$$f(x) = 0,38x + 0,67 .$$

Dvs.

$$\underline{a = 0,38} \quad \text{og} \quad \underline{b = 0,67}$$

Sådan taster vi på Nspire

Vi vælger vindue af type "Lister og Regneark" og taster tabel sådan →
Lad ikke markør stå i sidste felt du ændrer.

| | | | |
|---|------|---|-----|
| A | xv | B | yv |
| | | | |
| | 11.5 | | 5.1 |
| | 12.5 | | 5.3 |
| | 13.5 | | 5.9 |
| | 14.5 | | 6.1 |
| | 15.5 | | 6.6 |

I menuen vælger vi
Statistik/
Statistiske beregninger.../
Lineær regression (mx+b)...

Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nedenfor. I X-liste-feltet og Y-liste-feltet, skal du ikke taste navnet, du skal vælge det.

| | |
|----------------|-----|
| X-liste: | 'xv |
| Y-liste: | 'yv |
| Gem RegEqn i: | f |
| Frekvensliste: | 1 |

Når vi i et matematikfelt i et notevindue taster $f(x)$ og trykker på **(enter)** får vi

$$f(x) = 0.38 \cdot x + 0.67$$

17. Regression, årstal.

Opgave

Tabellen viser antallet af boliger i et bestemt område.

| | | | | | | |
|---------------|------|------|------|------|------|------|
| Årstal | 1998 | 2000 | 2002 | 2004 | 2006 | 2008 |
| Antal boliger | 133 | 170 | 186 | 218 | 232 | 247 |

Antallet af boliger kan med god tilnærmelse beskrives ved en ligning af typen $y = ax + b$ hvor y er antallet af boliger, og x er antal år efter 1998.

Find tallene a og b .

Besvarelse

Vi taster følgende tabel:

| | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| y | 133 | 170 | 186 | 218 | 232 | 247 |

← Vi taster ikke årstal da x ikke er årstallet.

Nspire laver lineær regression på hele denne tabel og får $y = 11,2571x + 141,381$

Dvs. $\underline{a = 11,3}$ og $\underline{b = 141}$

18. Eksponentiel regression.

Opgave

Tabellen viser antallet af indbyggere i et område i perioden 2000-2005.

| | | | | | | |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|
| År | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
| Antal (i tusinder) | 8,5 | 8,8 | 9,1 | 9,4 | 9,8 | 10,2 |

Udviklingen kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor $f(x)$ er antallet af indbyggere (målt i tusinder), og x er antal år efter 2000.

Find a og b .

Besvarelse

Ud fra den givne tabel laver vi tabellen nedenfor hvor årstallet er erstattet af værdien af x .

| | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 8,5 | 8,8 | 9,1 | 9,4 | 9,8 | 10,2 |

Denne tabel taster vi. Nspire laver eksponentiel regression på hele tabellen og får

$$f(x) = 8,47906 \cdot 1,03686^x$$

Dvs.

$$a = \underline{1,037} \quad \text{og} \quad b = \underline{8,48}$$

Bemærk

Hvis vi ikke bruger hele tabellen, så duer besvarelsen ikke.

Grafen for $y = 8,47906 \cdot 1,03686^x$ går ikke gennem tabel-punkterne, men det er den eksponentielle graf der afviger mindst fra punkterne.

Sådan taster vi på Nspire

Vi vælger et vindue af typen "Lister og Regneark" og taster tabellen som vist til højre.

I menuen vælger vi

Statistik/Statistiske beregninger.../Eksponentiel regression...

Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nederst til højre.

Du skal ikke taste det der står i X-liste-feltet og Y-liste-feltet, du skal vælge det.

Når vi i et matematikfelt i et notevindue

taster $f(x)$ og trykker på **enter**

får vi

$$f(x) = 8.47906 \cdot \{1.03686\}^x$$

| | | | |
|---|----|---|------|
| A | xv | B | yv |
| | | | |
| | 0 | | 8.5 |
| | 1 | | 8.8 |
| | 2 | | 9.1 |
| | 3 | | 9.4 |
| | 4 | | 9.8 |
| | 5 | | 10.2 |

| Eksponentiel regression | |
|-------------------------|--------|
| X-liste: | 'xv' ▾ |
| Y-liste: | yv ▾ |
| Gem RegEqn i: | f ▾ |
| Frekvensliste: | 1 ▾ |

19. Potensregression.

Opgave

De målte tal i tabellen viser for et bestemt dyr sammenhængen mellem alder og længde.

| | | | | | | |
|--------------|----|----|----|-----|-----|-----|
| Alder i døgn | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| Længde i mm | 43 | 60 | 74 | 105 | 132 | 155 |

Sammenhængen kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor $f(x)$ er længde (målt i mm), og x er alder (målt i døgn).

Bestem a og b .

Besvarelse

Denne tabel taster vi så alder er i x -søjlen og længde er i y -søjlen. Nspire laver potensregression på hele tabellen og får

$$f(x) = 6,79203 \cdot x^{0,802027}$$

Dvs.

$$a = \underline{\underline{0,802}} \quad \text{og} \quad b = \underline{\underline{6,79}}$$

Bemærk

Hvis vi ikke bruger hele tabellen, så duer besvarelsen ikke.

Grafen for $f(x) = 6,79203 \cdot x^{0,802027}$ går ikke gennem tabel-punkterne, men det er den potensgraf der afviger mindst fra punkterne.

Sådan taster vi på Nspire

Vi vælger et vindue af typen ”Lister og Regneark” og taster tabellen som vist til højre.

I menuen vælger vi

Statistik/Statistiske beregninger.../Potensregression...

Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nederst til højre.

Du skal ikke taste det der står i X-liste-feltet og Y-liste-feltet, du skal vælge det.

Når vi i et matematikfelt i et notevindue

taster $f(x)$ og trykker på **(enter)**

får vi

$$f(x) = 6.79203 \cdot x^{0.802027}$$

| A | xv | B | yv |
|---|----|---|-----|
| | | | |
| | 10 | | 43 |
| | 15 | | 60 |
| | 20 | | 74 |
| | 30 | | 105 |
| | 40 | | 132 |
| | 50 | | 155 |

| Potensregression | |
|------------------|--------|
| X-liste: | 'xv' ▾ |
| Y-liste: | 'yv' ▾ |
| Gem RegEqn i: | f ▾ |
| Frekvensliste: | 1 ▾ |

Hvis potensfunktionen er aftagende, skriver Nspire en brøk:

$$f(x) = \frac{31.9605}{x^{1.12554}}$$

Dette skal du selv skrive om til formen $b \cdot x^a$. Husk at **tilføje et minus** foran eksponenten:

$$f(x) = 31.9605 \cdot x^{-1.12554}$$

Bestem forskrift ud fra to punkter

20. Bestem a og b i $y = ax + b$ ud fra to punkter.

20a. Opgave Punkterne $(x, y) = (-7, 1)$ og $(x, y) = (8, 4)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = ax + b$. Find tallene a og b .

Metode 1: Vi indsætter i formler for a og b :

Af $(x_1, y_1) = (-7, 1)$ og $(x_2, y_2) = (8, 4)$ får vi

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{8 - (-7)} = \frac{3}{15} = 0,2$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 1 - 0,2 \cdot (-7) = 2,4$$

Metode 2: Nspire løser ligningssystem:

Da $(x, y) = (-7, 1)$ og $(x, y) = (8, 4)$ ligger på grafen, er

$$1 = a \cdot (-7) + b$$

$$4 = a \cdot 8 + b$$

Nspire løser dette ligningssystem

mht. a og b og får

$$a = 0,2 \quad \text{og} \quad b = 2,4$$

$$\text{Nspire: } \text{solve}(1 = a \cdot -7 + b \text{ and } 4 = a \cdot 8 + b, a, b)$$

Metode 3: Vi løser ligningssystem uden hjælpemidler:

Da $(x, y) = (-7, 1)$ og $(x, y) = (8, 4)$ ligger på grafen, er

$$(1) \quad 1 = a \cdot (-7) + b$$

$$(2) \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

Af (1) får vi

$$(3) \quad 1 + 7a = b$$

Vi indsætter dette i (2) og får

$$4 = 8a + (1 + 7a)$$

hvoraf

$$3 = 15a$$

$$\frac{3}{15} = \frac{15a}{15}$$

$$0,2 = a$$

Dette indsætter vi i (3) og får

$$1 + 7 \cdot 0,2 = b$$

hvoraf

$$2,4 = b$$

Metode 4: Nspire laver lineær regression:

Nspire laver lineær regression på punkterne $(x, y) = (-7, 1)$ og $(x, y) = (8, 4)$ og får $y = 0,2x + 2,4$

20b. Konklusion

Hvis der står at vi skal **finde a og b** , så skal vi skrive konklusionen sådan:

$$\underline{\underline{a = 0,2}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 2,4}}$$

Hvis der står at vi skal **finde forskriften** for f , så skal vi skrive konklusionen sådan:

$$\underline{\underline{f(x) = 0,2x + 2,4}}$$

21. Bestem a og b i $y = ax + b$ ud fra punkter givet ved tekst.

Opgave

Der er en lineær sammenhæng mellem temperatur og overskud.

Når temperaturen er -3°C , er overskuddet 12 mio. kr.

Når temperaturen er 5°C , er overskuddet 28 mio. kr.

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem temperatur og overskud.

Besvarelse

Vi sætter

x = temperatur (målt i $^\circ\text{C}$)

y = overskud (målt i mio. kr.)

Der er oplyst to x -værdier og tilhørende y -værdier:

Til $x_1 = -3$ svarer $y_1 = 12$.

Til $x_2 = 5$ svarer $y_2 = 28$.

Da sammenhængen er lineær, er den søgte ligning på formen $y = ax + b$, og

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{28 - 12}{5 - (-3)} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 12 - 2 \cdot (-3) = 18$$

Dvs.:

Ligningen $y = 2x + 18$ viser sammenhængen mellem temperaturen x i $^\circ\text{C}$ og overskuddet y i mio. kr.

Det er nødvendigt at fortælle læseren dette da det ikke står i opgaven.

Alle fire metoder fra ramme 20 kan bruges her.

22. Bestem b i $f(x) = ax + b$ ud fra a og punkt.

Opgave

Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $f(x) = 8x + b$. Find tallet b .

Besvarelse

Vi indsætter 4 for x og 35 for $f(x)$ i $f(x) = 8x + b$ og får $35 = 8 \cdot 4 + b$.

Vi løser denne ligning mht. b og får $b = 3$.

Dvs. $b = 3$

23. Bestem a i $f(x) = ax + b$ ud fra b og punkt.

Opgave

Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for sammenhængen $f(x) = ax + 18$. Find tallet a .

Besvarelse

Vi indsætter 5 for x og 8 for $f(x)$ i $f(x) = ax + 18$ og får $8 = a \cdot 5 + 18$.

Vi løser denne ligning mht. a og får $a = -2$.

Dvs. $a = -2$

24. Udregn a og b i $y=b \cdot a^x$ ud fra to punkter.

24a. Opgave Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = b \cdot a^x$. Udregn tallene a og b .

Metode 1: Vi sætter ind i formler for a og b

Af $(x_1, y_1) = (4, 3)$ og $(x_2, y_2) = (7, 24)$ får vi

$$a = \frac{x_2 - x_1 \sqrt[y_2]{y_1}}{\sqrt[y_1]{y_2}} = \frac{7 - 4 \sqrt[24]{3}}{\sqrt[3]{24}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$$

Metode 2: Vi løser ligningssystem med elektronisk hjælpemiddel

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så
 $3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får

$$a = 2 \quad \text{og} \quad b = \frac{3}{16}$$

Nspire: solve($3=b \cdot a^4$ and $24=b \cdot a^7, a, b$)

Metode 3: Vi løser ligningssystem uden hjælpemidler

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så
 $3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Vi dividerer højre ligning med venstre:

$$\frac{24}{3} = \frac{b \cdot a^7}{b \cdot a^4} \quad \frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} \quad \text{da} \quad \frac{a^7}{a^4} = \frac{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}}{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a}}$$

Når vi forkorter de to brøker, får vi

$$8 = a^3$$

så $a = \sqrt[3]{8}$

dvs. $a = 2$

Vi indsætter denne værdi af a i ligningen $3 = b \cdot a^4$ og får

$$3 = b \cdot 2^4$$

Ved at dividere begge sider med 2^4 får vi

$$\frac{3}{2^4} = b$$

så

$$b = \frac{3}{16}$$

Metode 4: Vi bruger eksponentiel regression

Nspire laver eksponentiel regression på punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ og får $a = 2$ og $b = 0,1875$

24b. Konklusion

Hvis der står at vi skal **finde a og b** , så skal vi skrive konklusionen sådan:

$$\underline{a = 2} \quad \text{og} \quad \underline{b = 0,1875} \quad \text{eller sådan:} \quad \underline{a = 2} \quad \text{og} \quad \underline{b = \frac{3}{16}}$$

Hvis der står at vi skal **finde forskriften** for f , så skal vi skrive konklusionen sådan:

$$\underline{f(x) = 0,1875 \cdot 2^x} \quad \text{eller sådan:} \quad \underline{f(x) = \frac{3}{16} \cdot 2^x}$$

25. $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{x \cdot k}$.

25a. Regel

Vi kan skrive en eksponentiel forskrift på to måder: $f(x) = b \cdot a^x$ og $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$

Vi kan omskrive fra den ene måde til den anden ved hjælp af formlen: $a = e^k$

25b. Opgave Skriv $f(x) = 20 \cdot 0,76^x$ på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$.

Svar $a = e^k$

$$0,76 = e^k$$

Nspire løser denne ligning mht. k og får $k = -0,274437$.

$$\underline{\underline{f(x) = 20 \cdot e^{-0,274x}}}$$

25c. Opgave Skriv $f(x) = 3,8 \cdot e^{1,4x}$ på formen $f(x) = b \cdot a^x$.

Svar $a = e^k$

$$a = e^{1,4}$$

Nspire udregner højre side og får $a = 4,0552$.

$$\underline{\underline{f(x) = 3,8 \cdot 4,06^x}}$$

26. Udregn a og b i $y = b \cdot x^a$ ud fra to punkter.

26a. Opgave Punkterne $(x, y) = (2, 5)$ og $(x, y) = (3, 7)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = b \cdot x^a$. Udregn tallene a og b .

Metode 1: Vi løser ligningssystem med elektronisk hjælpemiddel

Punkterne $(x, y) = (2, 5)$ og $(x, y) = (3, 7)$ ligger på grafen for $y = b \cdot x^a$, så

$$5 = b \cdot 2^a \quad \text{og} \quad 7 = b \cdot 3^a$$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får

$$a = \underline{\underline{0,829843}} \quad \text{og} \quad b = \underline{\underline{2,81295}}$$

Nspire: solve($5=b \cdot 2^a$ and $7=b \cdot 3^a, a, b$)

Metode 2: Vi bruger potensregression

Nspire laver potensregression på punkterne $(x, y) = (2, 5)$ og $(x, y) = (3, 7)$ og får

$$a = \underline{\underline{0,829843}} \quad \text{og} \quad b = \underline{\underline{2,81295}}$$

26b. Konklusion

Hvis der står at vi skal **finde a og b** , så skal vi skrive konklusionen sådan:

$$a = \underline{\underline{0,829843}} \quad \text{og} \quad b = \underline{\underline{2,81295}}$$

Hvis der står at vi skal **finde forskriften** for f , så skal vi skrive konklusionen sådan:

$$\underline{\underline{f(x) = 2,81295 \cdot x^{0,829843}}}$$

Fordoblings- og halveringskonstant

27. Fordoblingskonstant og halveringskonstant.

Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

| | | | | | | | |
|-----------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| Antal uger efter køb: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Højde i cm: | 12 | 15 | 19 | 24 | 30 | 38 | 48 |

I tabellen ser vi:

1 uge efter købet er højden 15 cm.

3 uger senere er højden 30 cm, som er det dobbelte af 15 cm.

2 uger efter købet er højden 19 cm.

3 uger senere er højden 38 cm, som er det dobbelte af 19 cm.

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet.

Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

27a En eksponentielt voksende sammenhæng har en fordoblingskonstant T_2 .

Når x -værdien bliver T_2 enheder større, så bliver y -værdien fordoblet.

27b En eksponentielt aftagende sammenhæng har en halveringskonstant $T_{\frac{1}{2}}$.

Når x -værdien bliver $T_{\frac{1}{2}}$ enheder større, så bliver y -værdien halveret.

28. Aflæs fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf.

Opgave (halvering)

Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.

Hvad er halveringskonstanten for denne sammenhæng?

Besvarelse

Resultatet bliver det samme uanset hvilken x -værdi vi starter med. Vi kan f.eks. starte med $x = 1$:

Når $x = 1$ er $y = 3,1$ (se figur)

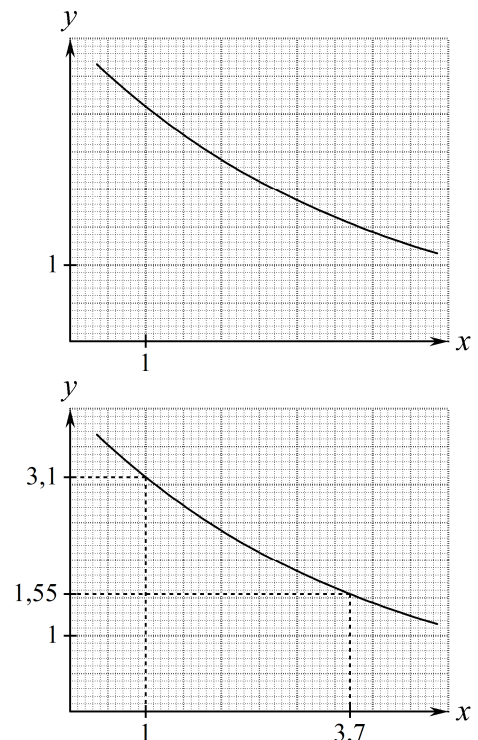
Det halve af 3,1 er $\frac{3,1}{2} = 1,55$.

Når $y = 1,55$ er $x = 3,7$ (se figur)

For at halvere y skal vi altså øge x med $3,7 - 1 = 2,7$ så halveringskonstanten er 2,7.

Bemærkning (fordobling)

Hvis funktionen er eksponentielt voksende, kan fordoblingskonstanten aflæses på næsten samme måde: Vi finder to grafpunkter hvor y -koordinaten til det ene er 2 gange y -koordinaten til det andet. Forskellen på de to punkters x -koordinater er fordoblingskonstanten.



29. Udregn fordoblings- og halveringskonstant ud fra forskrift.

Regler

For funktionen $f(x) = b \cdot a^x$ gælder

29a. Hvis f er voksende ($a > 1$), er $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$

29b. Hvis f er aftagende ($0 < a < 1$), er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$

For funktionen $f(x) = b \cdot e^{kx}$ gælder

29c. Hvis f er voksende ($k > 0$), er $T_2 = \frac{\ln(2)}{k}$

29d. Hvis f er aftagende ($k < 0$), er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$

Eksempler

29e. Hvis $f(x) = 12,5 \cdot 1,063^x$ er $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1,063)} = 11,3454 \approx 11,3$

29f. Hvis $f(x) = 30 \cdot e^{-1,3x}$ er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-1,3} = 0,53319 \approx 0,53$

30. Skriv hvad fordoblings- og halveringskonstant fortæller.

Opgave

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = længden (i cm)

y = omkredsen (i cm)

Vi har fået at vide at

fordoblingskonstanten er 7.

Hvad fortæller dette om længde og omkreds.

Besvarelse

At fordoblingskonstanten er 7 betyder:

Når **x -værdien** bliver 7 enheder større, så bliver **y -værdien** fordoblet.

Dvs:

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** fordoblet.

Hvis vi i stedet havde fået at vide at

halveringskonstanten er 7

ville svaret være

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** halveret.

31. Udregn funktionsværdier (y -værdier) med fordoblingskonstant og halveringskonstant.

31a. Opgave

Om en eksponentiel funktion f er oplyst at $f(4) = 9$ og at fordoblingskonstanten er 3.
Udregn $f(10)$.

Besvarelse

Når vi lægger 3 til 4, får vi 7, så $f(7) = 2 \cdot 9 = 18$.

Når vi lægger 3 til 7, får vi 10, så $f(10) = 2 \cdot 18 = 36$.

$$\underline{\underline{f(10) = 36}}$$

31b. Opgave

Om en eksponentiel funktion f er oplyst at $f(0) = 12$ og at halveringskonstanten er 1.
Udregn $f(3)$.

Besvarelse

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6, \quad f(2) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \quad \text{og} \quad f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5.$$

$$\underline{\underline{f(3) = 1,5}}$$

Beviser

32. Bevis for hvad a og b i $y = ax + b$ fortæller.

Sætning

For en lineær sammenhæng $y = ax + b$ gælder:

32a. Når vi gør x én enhed større, bliver der lagt a til værdien af y .

32b. Når x er 0, er y lig b .

Bevis

Vi udregner værdien af y når x er t , og når x er $t+1$:

$$\text{Når } x = t \quad \text{er} \quad y = at + b \quad (\text{Vi har indsat } t \text{ for } x \text{ i } y = ax + b)$$

$$\text{Når } x = t+1 \quad \text{er} \quad y = a(t+1) + b \quad (\text{Vi har indsat } t+1 \text{ for } x \text{ i } y = ax + b)$$

Følgende viser at når vi lægger a til første værdi af y , så får vi den anden værdi af y :

$$at + b + a = at + a + b = a(t+1) + b \quad (\text{Vi har sat } a \text{ uden for parentes)}$$

Dvs. når x ændres fra t til $t+1$, så lægges a til værdien af y .

Nu har vi bevist 32a (**reglen om lineær vækst**).

$$\text{Når } x = 0 \quad \text{er} \quad y = a \cdot 0 + b = b$$

Nu har vi bevist 32b.

33. Bevis for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller.

Sætning

For en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ gælder:

33a. Når vi gør x én enhed større, bliver værdien af y ganget med a .

33b. Når x er 0, er y lig b .

Bevis

Vi udregner værdien af y når x er t , og når x er $t+1$:

Når $x = t$ er $y = b \cdot a^t$ (Vi har indsat t for x i $y = b \cdot a^x$)

Når $x = t+1$ er $y = b \cdot a^{t+1}$ (Vi har indsat $t+1$ for x i $y = b \cdot a^x$)

Følgende viser at når vi ganger første værdi af y med a , så får vi den anden værdi af y :

$$b \cdot a^t \cdot a = b \cdot a^t \cdot a^1 = b \cdot a^{t+1} \quad \text{ifølge potensreglen } a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Dvs. når x ændres fra t til $t+1$, så bliver værdien af y ganget med a .

Nu har vi bevist 33a (**reglen om eksponentiel vækst**).

.....
Når $x = 0$ er $y = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Nu har vi bevist 33b.

34. Bevis for reglen om potensvækst.

Sætning

Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k :

Når x bliver ganget med k , så bliver y ganget med k^a .

Bevis

Vi udregner værdien af y når x er t , og når x er $k \cdot t$:

Når $x = t$ er $y = b \cdot t^a$ (Vi har indsat t for x i $y = b \cdot x^a$)

Når $x = k \cdot t$ er $y = b \cdot (k \cdot t)^a$ (Vi har indsat $k \cdot t$ for x i $y = b \cdot x^a$)

Følgende viser at når vi ganger første værdi af y med k^a , så får vi den anden værdi af y :

$$b \cdot t^a \cdot k^a = b \cdot (t \cdot k)^a \quad \text{ifølge potensreglen } p^r \cdot q^r = (p \cdot q)^r$$

Dvs. når værdien af x bliver ganget med k , så bliver værdien af y ganget med k^a .

Det var dette vi ville bevise.

Proportionale og omvendt proportionale variable

35. Proportionale variable.

35a. Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er proportional med x

hvis

$$y = k \cdot x \quad \text{og} \quad k \text{ er det samme tal for alle værdier af } x .$$

35b. Opgave

De to variable x og y er proportionale.

Tabellen viser nogle sammenhørende værdier af x og y .

Hvad er y når x er 10?

Hvad er x når y er 15?

| | | | |
|-----|----|----|----|
| x | 24 | 36 | 92 |
| y | 18 | 27 | 69 |

Besvarelse

Udregn k :

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

$$(1) \quad y = k \cdot x .$$

I tabellen ser vi at når $x = 24$ er $y = 18$.

Dette indsætter vi i (1):

$$18 = k \cdot 24$$

Denne ligning løser vi mht. k og får

$$0,75 = k$$

Dette tal indsætter vi i (1) og får ligningen for sammenhængen mellem x og y :

$$(2) \quad \underline{y = 0,75 \cdot x}$$

Udregn y :

For at finde y når x er 10, sætter vi x til 10 i (2):

$$y = 0,75 \cdot 10$$

Heraf får vi $y = 7,5$ så

$$y \text{ er } \underline{7,5} \text{ når } x \text{ er } 10$$

Udregn x :

For at finde x når y er 15, sætter vi y til 15 i (2):

$$15 = 0,75 \cdot x$$

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$20 = x$$

så

$$x \text{ er } \underline{20} \text{ når } y \text{ er } 15$$

I opgaven står ikke at vi skal udregne k .
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 24.

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 0,75.

36. Omvendt proportionale variable.

36a. Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er omvendt proportional med x

hvis

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{og} \quad k \text{ er det samme tal for alle værdier af } x .$$

36b. Opgave

De to variable x og y er omvendt proportionale.

Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

| | | | |
|-----|---|----|----|
| x | | 12 | 36 |
| y | 9 | 6 | |

Besvarelse

Udregne k :

Da x og y er omvendt proportionale, er der et tal k så

$$(1) \quad y = \frac{k}{x} .$$

I tabellen ser vi at når $x = 12$ er $y = 6$. Dette indsætter vi i (1):

$$6 = \frac{k}{12}$$

Vi løser denne ligning mht. k og får

$$72 = k$$

Dette tal indsætter vi i (1) og får ligningen for sammenhængen mellem x og y :

$$(2) \quad y = \frac{72}{x}$$

Udregne y :

For at finde y når x er 36, sætter vi x til 36 i (2):

$$y = \frac{72}{36}$$

Heraf får vi $y = 2$ så

$$y \text{ er } \underline{\underline{2}} \text{ når } x \text{ er } 36$$

Udregne x :

For at finde x når y er 9, sætter vi y til 9 i (2):

$$9 = \frac{72}{x}$$

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$x = 8$$

så

$$x \text{ er } \underline{\underline{8}} \text{ når } y \text{ er } 9$$

I opgaven står ikke at vi skal udregne k .
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

Vi kan løse ligningen ved at
gange begge sider med 12.

Vi kan løse ligningen ved
først at gange begge sider
med x og derefter at
dividere begge sider med 9.

37. Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale.

Opgave

På en skærm er et rektangel som vi kan ændre ved at trække med musen.

Højde og bredde er omvendt proportionale.

Højden er 2,5 når bredden er 8

Hvad er højden når bredden er 3,2 ?

Besvarelse

Vi kalder højden for h og bredden for b .

Udregne k :

Da h er omvendt proportional med b , findes et tal k så

$$h = \frac{k}{b}$$

Da $h = 2,5$ når $b = 8$ må

$$2,5 = \frac{k}{8}$$

Vi ganger begge sider med 8 og får $k = 20$, dvs.

$$(1) \quad h = \frac{20}{b}$$

Udregne h :

Vi sætter $b = 3,2$ i (1):

$$h = \frac{20}{3,2}$$

Heraf får vi $h = 6,25$ så

højden er 6,25 når bredden er 3,2

Logaritmefunktioner

38. Naturlig logaritme og titalslogaritme.

Funktionen $\ln(x)$ hedder den naturlige logaritmefunktion.

Funktionen $\log(x)$ hedder titalslogaritmefunktionen.

Funktionerne $\ln(x)$ og $\log(x)$ er på Nspire.

Logaritmereglerne:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$$

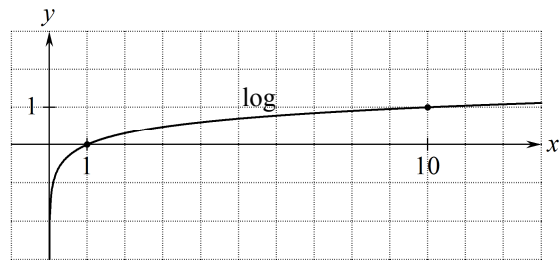
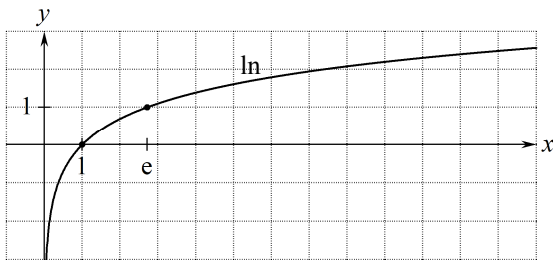
$$\ln(1) = 0$$

$$\log(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\log(10) = 1$$

Grafer:



Definitionsmængden for **ln** og **log** er de positive tal, dvs. alle positive tal kan indsættes for x .

Polynomier

39. Polynomier og rødder.

39a. Polynomier

Et førstegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax + b$ hvor $a \neq 0$.

Et andengradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hvor $a \neq 0$.

Et tredjegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hvor $a \neq 0$.

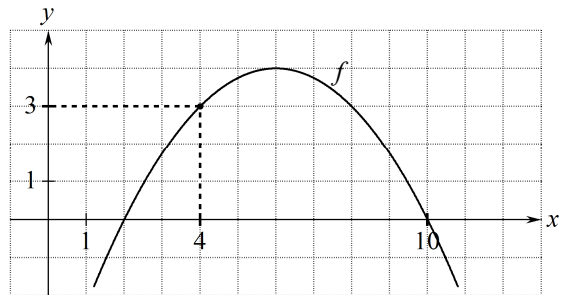
Osv.

39b. Nulpunkter og rødder

Hvis vi i $f(x) = ax^2 + bx + c$ sætter $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$ og $c = -5$, får vi andengradspolynomiet

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$$

Til højre har vi tegnet grafen for dette andengradspolynomium.



På grafen ser vi at hvis vi sætter 4 ind for x i forskriften og regner ud, så får vi y -værdien 3.

På grafen ser vi også at hvis vi sætter 10 ind for x og regner y -værdien ud, så får vi 0.

Et tal kaldes et nulpunkt for f hvis vi får 0 når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud. Et nulpunkt kaldes også en rod. At finde rødderne er det samme som at løse ligningen $f(x) = 0$.

På grafen ser vi at rødderne er 2 og 10. Hvis vi løser ligningen $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$, så får vi altså løsningerne 2 og 10.

39c. Opgave

Vis at 10 er rod i polynomiet $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$.

Besvarelse

$$f(10) = -\frac{1}{4} \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 5 = -\frac{1}{4} \cdot 100 + 30 - 5 = -25 + 25 = 0$$

Da $f(10) = 0$, er 10 rod.

39d. Regel om antal rødder, antal fællespunkter med x -akse og antal løsninger

Et polynomium af grad n kan højst have n rødder.

Eksempel

Et tredjegradspolynomium kan ikke have mere end 3 rødder.

Grafen for et tredjegradspolynomium kan højst have 3 punkter fælles med x -aksen.

En tredjegradslikning kan højst have 3 løsninger.

Andengradspolynomier

40. Andengradspolynomium.

40a. Et andengradspolynomium er en funktion af typen

$$(1) \quad f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{hvor } a \neq 0$$

Hvis vi skriver 0 på a 's plads, så bliver det ikke et andengradspolynomium da x^2 forsvinder.

40b. Eksempel Hvilke tal er a , b og c lig?

Vi sætter $a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0$

i $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

og får $f(x) = 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 0$

så $f(x) = x^2 - 2x$
er et andengradspolynomium.

I dette og andre andengradspolynomier skal vi kunne se hvad a , b og c er for at kunne indsætte i formler med a , b og c .

41. Topunkt.

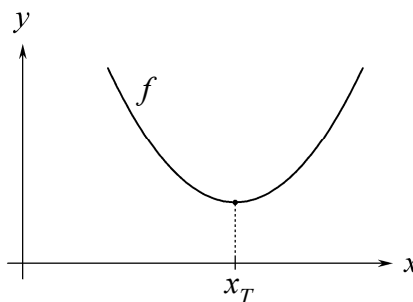
41a. Grafen for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

er en parabel.

Grafens toppunkt har x -koordinaten

$$x_T = \frac{-b}{2a}$$



41b. Eksempel Udregn toppunkt

$$f(x) = -0,4x^2 - 1,2x + 3,4$$

Vi ser at $f(x) = ax^2 + bx + c$

og $a = -0,4 \quad b = -1,2 \quad c = 3,4$

Toppunktets x -koordinat er

$$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1,2)}{2 \cdot (-0,4)} = -1,5$$

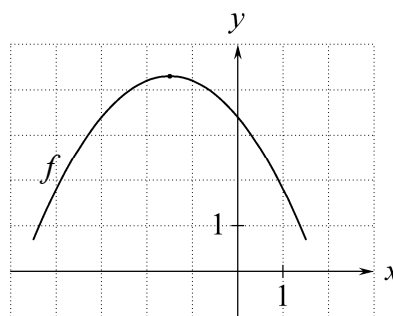
Topunktet ligger på grafen og har x -koordinaten $-1,5$ så y -koordinaten er

$$y_T = -0,4 \cdot (-1,5)^2 - 1,2 \cdot (-1,5) + 3,4$$

Vi udregner højresiden og får

$$y_T = 4,3$$

Topunktet er $T = \underline{\underline{(-1,5, 4,3)}}$



42. Diskriminant.

42a. Diskriminanten for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

er tallet

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

42b. Eksempel Udregn diskriminanten

$$f(x) = 3x^2 - x + 5$$

Vi ser at $f(x) = ax^2 + bx + c$

og $a = 3 \quad b = -1 \quad c = 5$

Diskriminanten er

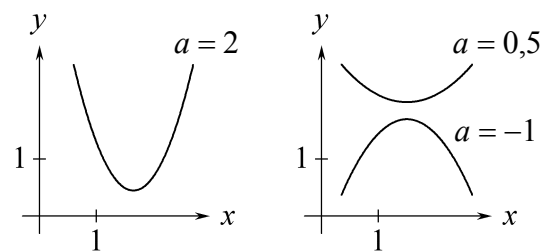
$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{-59}}$$

43. Betydning af a , b , c og d for grafen.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

d er diskriminanten

a : a positiv: grene vender op
 a negativ: grene vender ned
 parablen er bredere når a er tættere på nul

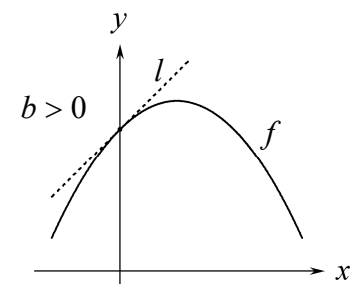


b : b er hældningskoefficient for tangent til graf i skæringspunkt med y -akse

b positiv: graf går op mod højre i skæring med y -akse

b nul: graf's toppunkt er på y -akse

b negativ: graf går ned mod højre i skæring med y -akse



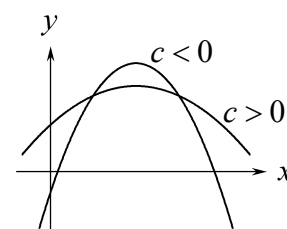
l er tangent til f -grafen i dennes skæringspunkt med y -aksen.
 b er lig l 's hældningskoefficient.

c : Graf skærer y -akse i punktet $(0, c)$

c positiv: graf skærer y -akse over x -akse

c nul: graf går gennem punktet $(0, 0)$

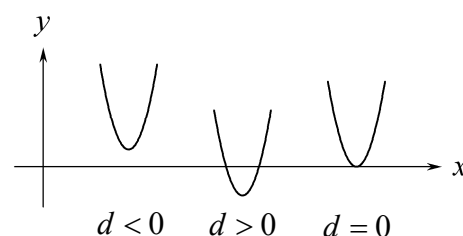
c negativ: graf skærer y -akse under x -akse



d : d positiv: graf har to punkter på x -akse

d nul: graf har ét punkt på x -akse

d negativ: graf har ingen punkter på x -akse



44. Nulpunkt.

44a. At

et tal er nulpunkt for en funktion

betyder at

når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud, så får vi nul.

Ordet nulpunkt er misvisende.
Et nulpunkt er IKKE et punkt.
Et nulpunkt er et tal.

44b. Eksempel *Nulpunkt*

At

1,5 er nulpunkt for $f(x) = 2x^2 - 3x$

betyder at

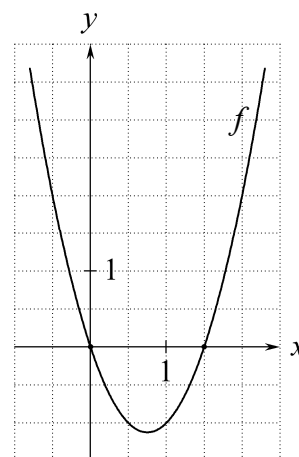
$$2 \cdot 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 = 0$$

Dette er det samme som at

1,5 er løsning til ligningen $2x^2 - 3x = 0$

og det samme som at

grafpunktet med x -koordinat 1,5 ligger på x -aksen.



0 og 1,5 er nulpunkter for f

45. Antal nulpunkter eller løsninger.

45a. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
 d er diskriminanten

Der gælder at

antallet af nulpunkter for andengradspolynomiet $ax^2 + bx + c$

dvs.

antallet af løsninger til andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$

er

2 hvis $d > 0$

1 hvis $d = 0$

0 hvis $d < 0$

45b. Eksempel *Antal nulpunkter eller løsninger*

Vi vil bestemme tallet k så andengradsligningen

$$kx^2 - 2x + 3 = 0$$

har netop én løsning.

Ligningen er på formen $ax^2 + bx + c = 0$ med $a = k$, $b = -2$, $c = 3$,

så diskriminanten er $d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = 4 - 12k$

Vi vil finde ud af hvornår der er én løsning, dvs. vi vil finde ud af hvornår d er 0:

$$4 - 12k = 0 \text{ er ensbetydende med at } k = \frac{1}{3}$$

Ligningen $kx^2 - 2x + 3 = 0$ har netop én løsning når $k = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

46. Løs andengradsligning.

46a. En andengradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

kan vi løse sådan:

Først udregner vi diskriminanten:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Så bruger vi følgende regel:

Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger.

Hvis $d = 0$ har ligningen løsningen $\frac{-b}{2a}$

Hvis $d > 0$ har ligningen løsningerne $\frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ og $\frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$

Bemærkning

Både når $d = 0$ og $d > 0$ er løsningerne

$$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Formlen for at løse andengradsligninger.

46b. Eksempel Løs andengradsligning

Ligningen

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

er af typen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

med

$$a = 3, \quad b = -2 \quad \text{og} \quad c = -1$$

Diskriminanten er

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$$

Da $d > 0$ har ligningen løsningerne

$$\frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 + 4}{6} = 1$$

Konklusion:

Ligningen $3x^2 - 2x - 1 = 0$ har løsningerne $-\frac{1}{3}$ og 1

47. Ligninger af typen $x^2 = r$.

47a. Oplæg *Ligninger af typen $x^2 = r$*

Når $x=3$ er $x^2 = x \cdot x = 3 \cdot 3 = 9$

Når $x=-3$ er $x^2 = x \cdot x = (-3) \cdot (-3) = 9$

$x^2 = 9$ netop når $x = -3$ eller $x = 3$

47b. Regel *Ligninger af typen $x^2 = r$*

Når n er negativ: $x^2 = n$ er falsk uanset hvilket tal der indsættes for x

$x^2 = 0$ netop når $x = 0$

Når p er positiv: $x^2 = p$ netop når $x = -\sqrt{p}$ eller $x = \sqrt{p}$

47c. Eksempel *Ligninger af typen $(\text{udtryk})^2 = r$*

Vi vil løse ligningen

$$(x+2)^2 = 9$$

Af regel 47b får vi

$$x+2 = -\sqrt{9} \quad \text{eller} \quad x+2 = \sqrt{9}$$

$$x+2 = -3 \quad \text{eller} \quad x+2 = 3$$

dvs.

$$\underline{\underline{x = -5 \quad \text{eller} \quad x = 1}}$$

47d. Eksempel *Andengradsligning uden x -led*

Når en andengradsligning ikke har noget x -led, kan vi løse den ved at omskrive og bruge regel 47b:

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$\underline{\underline{x = -\sqrt{3} \quad \text{eller} \quad x = \sqrt{3}}}$$

48. Bevis for formelen for løsning af andengradsligninger.

Ved udregning får vi

$$(2ax + b)^2 = (2ax)^2 + b^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b \quad \text{ifølge formelen } (u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$$

Vi reducerer højre side:

$$(1) \quad (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + b^2 + 4abx$$

Vi omskriver andengradsligningen:

I ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

ganger vi begge sider med $4a$:

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0$$

Vi ganger ind i parentesen:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi lægger diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ til begge sider:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = 0 + b^2 - 4ac$$

Vi reducerer:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

Af (1) får vi

$$(2ax + b)^2 = d$$

Vi bruger nu de tre dele af 47b:

Hvis $d < 0$:

$$(2ax + b)^2 = d$$

har ingen løsninger

Hvis $d = 0$:

$$(2ax + b)^2 = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis $d > 0$:

$$(2ax + b)^2 = d$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{d}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{d}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Nu har vi bevist alle tre dele af reglen i ramme 46a.

| | | | |
|---------------------------------------------|------------|---------------------------------------|-----------|
| A | | | |
| andengradsligning | 26 | lineær, bestem forskrift/ligning..... | 2, 10, 11 |
| andengradsligning uden x -led | 27 | lineær, fortæller..... | 3 |
| andengradsligning, bevis..... | 28 | logaritme | 21 |
| andengradsligning, løsninger | 26 | logaritmefunktion, graf..... | 21 |
| andengradspolynomium | 23 | logaritmeregler..... | 21 |
| andengradspolynomium, graf..... | 24 | løsning..... | 26 |
| B | | løsninger, antal..... | 22, 25 |
| bevis | 16, 17, 28 | N | |
| D | | naturlig logaritme..... | 21 |
| diskriminant | 24, 25, 26 | nulpunkt | 22, 25 |
| E | | nulpunkter, antal | 22, 25 |
| e | 13, 15, 21 | O | |
| eksponentiel funktion..... | 3 | omvendt proportional..... | 19, 20 |
| eksponentiel graf..... | 6 | P | |
| eksponentiel regression | 8 | polynomium | 22 |
| eksponentiel vækst | 3, 17 | potens, bestem forskrift/ligning..... | 13 |
| eksponentiel, bestem forskrift/ligning..... | 4, 12 | potensfunktion | 5 |
| eksponentiel, fortæller..... | 4 | potensfunktion, procentændring | 5, 17 |
| F | | potensgraf..... | 6 |
| fordoblingskonstant..... | 14, 16 | potensregression..... | 9 |
| fordoblingskonstant, aflæs | 14 | potensvækst..... | 5, 17 |
| fordoblingskonstant, fortæller..... | 15 | procent | 1, 4, 5 |
| fordoblingskonstant, udregn..... | 15 | proportional..... | 18 |
| G | | R | |
| gennemsnitlig procent | 1 | regression, eksponentiel..... | 8 |
| graf | 6, 21, 24 | regression, lineær | 7 |
| H | | regression, potens..... | 9 |
| halveringskonstant | 14, 16 | regression, årstal | 7, 8 |
| halveringskonstant, aflæs | 14 | rod | 22 |
| halveringskonstant, fortæller..... | 15 | rødder | 22 |
| halveringskonstant, udregn | 15 | rødder, antal | 22, 25 |
| L | | T | |
| lineær funktion | 2 | titalslogaritme | 21 |
| lineær graf | 6 | toppunkt | 23 |
| lineær regression | 7 | V | |
| lineær vækst | 2, 16 | vækstrate | 1 |