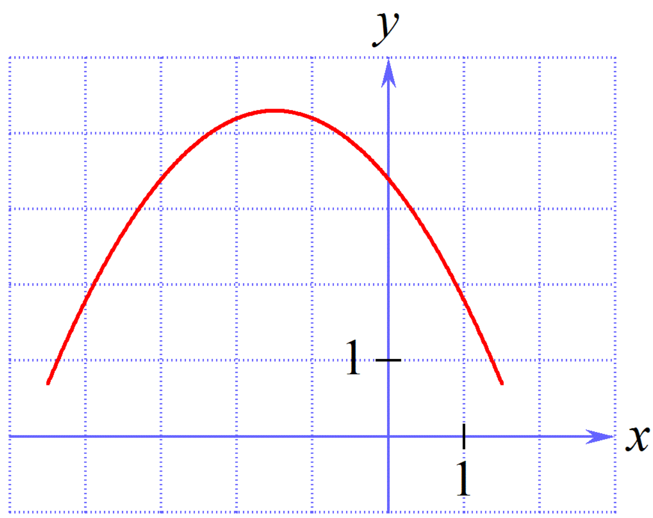
Grundlæggende funktioner

for B-niveau i hf



2013 Karsten Juul

Grundlæggende funktioner for B-niveau i hf

 5/3-2013

Procent

1. Procenter på en ny måde.

$\underline{T \text{ er } 34\% \textbf{ af } 600}$

$$
\begin{aligned}
T &= 34\% \text{ af } 600 \\
&= 600 \cdot 0{,}34 \qquad \longleftarrow \text{da } 34\% = \frac{34}{100} = 0{,}34 \\
&= 204
\end{aligned}
$$

Du plejer nok at udregne 34 % ved at dividere med 100 og gange med 34.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,34 for at udregne 34 %.

$\underline{S \text{ er } 34\% \textbf{ større end } 600}$

$$
\begin{aligned}
S &= 134\% \text{ af } 600 \qquad \longleftarrow \text{da } 100\% + 34\% = 134\% \\
&= 600 \cdot 1{,}34 \qquad \longleftarrow \text{da } 134\% = \frac{134}{100} = 1{,}34 \\
&= 804
\end{aligned}
$$

Når du udregner det der er 34 % større end et tal, så plejer du nok at udregne 34 % af tallet og lægge til tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 1,34 for at udregne det der er 34 % større.

$\underline{R \text{ er } 34\% \textbf{ mindre end } 600}$

$$
\begin{aligned}
R &= 66\% \text{ af } 600 \qquad \longleftarrow \text{da } 100\% - 34\% = 66\% \\
&= 600 \cdot 0{,}66 \qquad \longleftarrow \text{da } 66\% = \frac{66}{100} = 0{,}66 \\
&= 396
\end{aligned}
$$

Når du udregner det der er 34 % mindre end et tal, så plejer du nok at udregne 34 % af tallet og trække fra tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,66 for at udregne det der er 34 % mindre.

Eksempel

Antal ansatte skal stige 10 % hvert år.

$100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1{,}10$

I år er antal ansatte	1000
Om 1 år er antal ansatte	$1000 \cdot 1{,}10 = 1100$
Om 2 år er antal ansatte	$1000 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1210$ $\quad\longleftarrow 1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1{,}10^2$
Om 16 år er antal ansatte	$1000 \cdot 1{,}10^{16} = 4595$
Om x år er antal ansatte	$\mathbf{1000 \cdot 1{,}10^{x}}$

Lineær vækst

2. Lineær funktion.

En funktion f er lineær hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = ax + b$$

a og b kan være alle tal.

Tallet a i en lineær forskrift $f(x) = ax + b$ kaldes <u>hældningskoefficienten</u>.

3. Lineær vækst.

3a. Reglen for lineær vækst (reglen for hvad a i lineær sammenhæng $y = ax + b$ fortæller):

Hver gang vi gør x én enhed større, bliver der lagt a til værdien af y.

3b. Reglen for hvad b i lineær sammenhæng $y = ax + b$ fortæller:

Når x er 0, er y lig b.

4. Skriv ligning ud fra beskrivelse af lineær vækst.

<u>Opgave</u>

Man skal betale 10 kr. for at starte på et computerspil, og herefter skal man betale 0,50 kr. pr. minut man spiller.

Skriv en ligning vi kan bruge til at udregne prisen for at spille når vi kender antal minutter vi spiller.

<u>Besvarelse</u>

Vi bruger x og y til at betegne følgende talstørrelser:

x = antal minutter
y = prisen i kr.

Så kan vi oversætte oplysningerne til følgende:

Når $x = 0$ er $y = 10$
Hver gang vi gør x én enhed større, bliver der lagt 0,50 til y.

Af reglerne for hvad a og b i $f(x) = ax + b$ fortæller, får vi:

$\underline{\underline{y \;=\; 0{,}50 \cdot x + 10}}$ når x = antal minutter og y = prisen i kr.

5. Skriv hvad *a* og *b* i lineær forskrift fortæller.

<u>Opgave</u>

For en cirkel på et elektronisk billede kan radius udregnes ved hjælp af formlen
$y = -2 \cdot x + 80$ hvor x er temperaturen i °C og y er radius i mm.

Hvad fortæller tallene 2 og 8 om radius?

<u>Besvarelse</u>

Af reglerne for hvad a og b i $y = ax + b$ fortæller, får vi:

-2 er det tal der bliver lagt til **radius *y*** hver gang vi gør **temperaturen *x*** en **grad** større .
Når **temperaturen *x*** er 0, er **radius *y*** lig 80 .

Dvs.:

<u>Radius er 80 mm ved 0 °C og bliver 2 mm mindre for hver grad temperaturen stiger .</u>

Eksponentiel vækst

6. Eksponentiel funktion.

En funktion f er eksponentiel hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = ba^x$$

hvor a og b er positive.

Tallet a i en eksponentiel forskrift $f(x) = ba^x$ kaldes <u>fremskrivningsfaktoren</u>.

7. Eksponentiel vækst.

7a. Reglen for eksponentiel vækst (reglen for hvad a i eksponentiel sammenhæng $y = ba^x$ fortæller):
Hver gang vi gør x én enhed større, bliver værdien af y ganget med a.

7b. Reglen for hvad b i en eksponentiel sammenhæng $y = ba^x$ fortæller:
Når x er 0, er y lig b.

8. Skriv ligning ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst.

Opgave

Kl. 9 er der 275 celler, og hver time bliver antal celler 20 % større.
Skriv en ligning vi kan bruge til at udregne antallet af celler når vi kender tidspunktet.

Besvarelse

Når

x = antal timer efter kl. 9
y = antal celler

gælder:

Når **antal timer *x*** bliver 1 større, vil **antal celler *y*** blive 20 % større, dvs.
antal celler *y* bliver ganget med 1,20 . (Start: 100%. Efter stigning: 120%=120:100=1,20).

Når **antal timer *x*** er 0 , er **antal celler *y*** lig 275 .

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi

$$\underline{\underline{y = 275 \cdot 1{,}20^x}}$$

9. Skriv hvad *a* og *b* i eksponentiel forskrift fortæller.

Opgave

Antallet af dyr ændres sådan at

$$y = 270 \cdot 0{,}90^x$$

hvor

x = antal dage efter 1. juni
y = antal dyr

Hvad fortæller tallene 270 og 0,90 om antallet af dyr.

Besvarelse

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi

Når **antal dage *x*** bliver 1 større, bliver **antal dyr *y*** ganget med 0,90 , dvs.
antal dyr *y* bliver 10 % mindre. (Start: 100%. 100%·0,90=90%. 90%–100%= –10%)

Når **antal dage *x*** er 0 , er **antal dyr *y*** lig 270 .

Dvs.

<u>Den 1. juni er antallet af dyr 270, og hver dag bliver antallet af dyr 10 % mindre.</u>

Potensvækst

10. Potensfunktion.

En funktion f er en potensfunktion hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = bx^a$$

hvor b er positiv og x kun kan være positive tal.

Tallet a i potensforskriften $f(x) = bx^a$ kaldes <u>eksponenten</u>.

11. Potensvækst.

10a. Reglen for potensvækst:

Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k:

Når $\boldsymbol{x}$ bliver ganget med $\boldsymbol{k}$, så bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{k^a}$.

12. Udregn procentændring for potensfunktion.

Opgave

Et dyr vokser sådan at $y = 2{,}7 \cdot x^{1{,}6}$ hvor y er vægten i gram, og x er længden i cm.
Når dyret er blevet 40 % længere, hvor mange procent tungere er det så blevet?

Besvarelse

At x bliver 40% større, er det samme som
at x bliver ganget med $1{,}40$. (Start: 100%. Efter stigning: 140%=140:100=1,40)

Når x bliver ganget med $1{,}40$, så bliver y ganget med

$$1{,}40^{1{,}6} = 1{,}71319 \approx 1{,}71$$

Bemærk at vi IKKE sætter 1,40 ind i ligningen. Vi bruger eksponenten fra ligningen.

At y bliver ganget med $1{,}71$, er det samme som
at y bliver 71% større. (Start: 100%. 100%·1,71=171%. 171%–100%=71%)

Dyret bliver $\underline{\underline{71\%}}$ tungere når det bliver 40% længere.

13. Udregn procentændring for potensfunktion.

Opgave

Der gælder

$$f(x) = 240 \cdot x^{-0{,}51}$$

hvor x er rutens længde i km, og $f(x)$ er antal deltagere.

Hvor mange procent falder antal deltagere hvis vi fordobler rutens længde?

Besvarelse

Når rutens længde x bliver ganget med 2, så bliver antallet af deltagere $f(x)$ ganget med

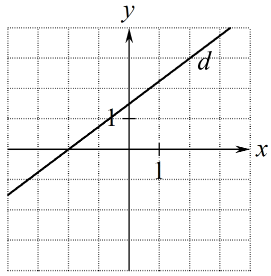
$$2^{-0{,}51} = 0{,}702222 \approx 0{,}70$$

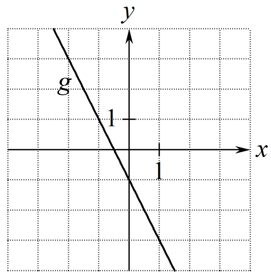
Dvs.:

Antal deltagere bliver $\underline{\underline{30\%}}$ mindre (Start: 100%. 100%·0,70=70%. 70%–100%= –30%)
hvis vi fordobler rutens længde.

Grafer

14. Graf for lineær funktion $f(x) = ax + b$





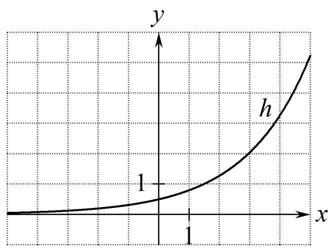
Grafen er en ret linje.

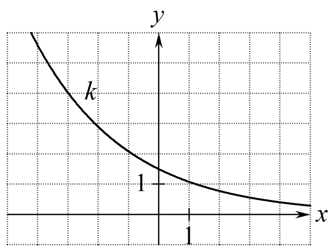
Definitionsmængde: Alle tal kan indsættes for x.
Værdimængde: Funktionsværdien y kan være alle tal
(hvis a ikke er 0).

Voksende: a positiv
Aftagende: a negativ

d : voksende lineær funktion.
g : aftagende lineær funktion.

15. Graf for eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ hvor a og b er positive





Definitionsmængde: Alle tal kan indsættes for x.
Værdimængde: Funktionsværdien y kan være alle positive tal
(hvis a ikke er 1).

Voksende: a større end 1
Aftagende: a mellem 0 og 1

h: eksponentielt voksende funktion.
k: eksponentielt aftagende funktion.

Grafen kommer vilkårlig tæt på x-aksen, men når den aldrig.

Bemærk at grafen krummer sådan: eller sådan:
IKKE sådan: , og IKKE sådan:

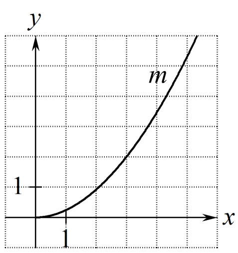
16. Graf for potensfunktion $f(x) = bx^a$ hvor b er positiv

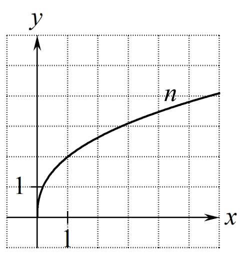
Definitionsmængde: Alle positive tal kan indsættes for x.
Værdimængde: Funktionsværdien y kan være alle positive tal
(hvis a ikke er 0).

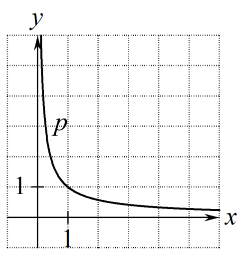
Voksende: a positiv
Aftagende: a negativ

Aftagende potensfunktion: grafen kommer vilkårlig tæt på x-aksen, men når den ikke.

m: voksende potensfunktion
n: voksende potensfunktion
p: aftagende potensfunktion







Regression

17. Lineær regression.

Opgave

Vi har målt længde og bredde for nogle komponenter:

længde i cm	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
bredde i cm	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6

Bredden $f(x)$, målt i cm, er med god tilnærmelse givet ved

$$f(x) = ax + b$$

hvor x er længden målt i cm.

Find tallene a og b.

Besvarelse

Vi indtaster tallene sådan at

længde kommer på den vandrette akse og
bredde kommer på den lodrette akse.

Nspire laver <u>lineær regression</u> på de indtastede tal og får

$$f(x) = 0{,}38x + 0{,}67 \ .$$

Dvs.

$$\underline{\underline{a = 0{,}38}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 0{,}67}}$$

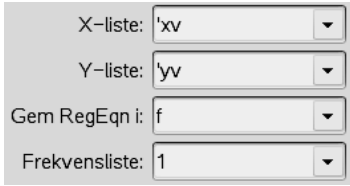
Sådan taster vi på Nspire

Vi vælger vindue af type "Lister og Regneark" og taster tabel sådan →
Lad ikke markør stå i sidste felt du ændrer.

A xv	B yv
11.5	5.1
12.5	5.3
13.5	5.9
14.5	6.1
15.5	6.6

I menuen vælger vi
Statistik/
Statistiske beregninger.../
Lineær regression (mx+b)...

Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nedenfor. I X-liste-feltet og Y-liste-feltet, skal du ikke taste navnet, du skal vælge det.



Når vi i et <u>matematikfelt i et notevindue</u> taster $f(x)$ og trykker på (enter) får vi

$f(x) = 0.38 \cdot x + 0.67$

18. Regression, årstal.

Opgave

Tabellen viser antallet af boliger i et bestemt område.

Årstal	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger	133	170	186	218	232	247

Antallet af boliger kan med god tilnærmelse beskrives ved en ligning af typen $y = ax + b$ hvor y er antallet af boliger, og x er antal år efter 1998.

Find tallene a og b.

Besvarelse

Vi taster følgende tabel:

x	0	2	4	6	8	10
y	133	170	186	218	232	247

Vi taster ikke årstal da x ikke er årstallet.

Nspire laver <u>lineær regression på hele denne tabel</u> og får $y = 11{,}2571x + 141{,}381$

Dvs. $\underline{\underline{a = 11{,}3 \ \text{ og } \ b = 141}}$

19. Eksponentiel regression.

Opgave

Tabellen viser antallet af indbyggere i et område i perioden 2000-2005.

År	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Antal (i tusinder)	8,5	8,8	9,1	9,4	9,8	10,2

Udviklingen kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor $f(x)$ er antallet af indbyggere (målt i tusinder), og x er antal år efter 2000.

Find a og b.

Besvarelse

Ud fra den givne tabel laver vi tabellen nedenfor hvor årstallet er erstattet af værdien af x.

x	0	1	2	3	4	5
y	8,5	8,8	9,1	9,4	9,8	10,2

Denne tabel taster vi. Nspire laver eksponentiel regression på hele tabellen og får

$$f(x) = 8{,}47906 \cdot 1{,}03686^x$$

Dvs.

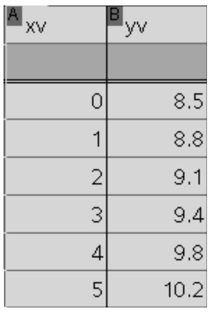
$$a = \underline{\underline{1{,}037}} \qquad \text{og} \qquad b = \underline{\underline{8{,}48}}$$

Bemærk

Hvis vi ikke bruger hele tabellen, så duer besvarelsen ikke.
Grafen for $y = 8{,}47906 \cdot 1{,}03686^x$ går ikke gennem tabel-punkterne, men det er den eksponentielle graf der afviger mindst fra punkterne.

Sådan taster vi på Nspire

Vi vælger et vindue af typen ”Lister og Regneark” og taster tabellen som vist til højre.



I menuen vælger vi

Statistik/Statistiske beregninger.../Eksponentiel regression...

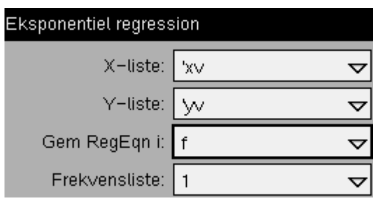
Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nederst til højre.
Du skal ikke taste det der står i X-liste-feltet og Y-liste-feltet, du skal vælge det.

Når vi i et matematikfelt i et notevindue

taster $f(x)$ og trykker på enter

får vi

$$f(x) = 8.47906 \cdot (1.03686)^x$$



20. Potensregression.

Opgave

De målte tal i tabellen viser for et bestemt dyr sammenhængen mellem <u>alder</u> og <u>længde</u> .

Alder i døgn	10	15	20	30	40	50
Længde i mm	43	60	74	105	132	155

Sammenhængen kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

hvor $f(x)$ er længde (målt i mm), og x er alder (målt i døgn).

Bestem a og b .

Besvarelse

Denne tabel taster vi så alder er i x-søjlen og længde er i y-søjlen . Nspire laver <u>potensregression på hele tabellen</u> og får

$$f(x) = 6{,}79203 \cdot x^{0{,}802027}$$

Dvs.

$$a \;=\; \underline{\underline{0{,}802}} \qquad \text{og} \qquad b \;=\; \underline{\underline{6{,}79}}$$

Bemærk

Hvis vi ikke bruger hele tabellen, så duer besvarelsen ikke.
Grafen for $f(x) = 6{,}79203 \cdot x^{0{,}802027}$ går ikke gennem tabel-punkterne, men det er den potensgraf der afviger mindst fra punkterne.

Sådan taster vi på Nspire

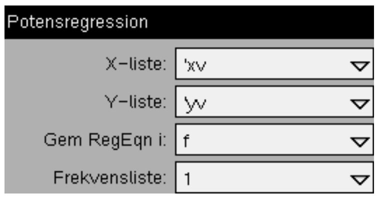
Vi vælger et vindue af typen "Lister og Regneark" og taster tabellen som vist til højre.

A xv	B yv
10	43
15	60
20	74
30	105
40	132
50	155

I menuen vælger vi

Statistik/Statistiske beregninger.../Potensregression...

Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nederst til højre.
Du skal ikke taste det der står i X-liste-feltet og Y-liste-feltet, du skal vælge det.



Når vi i et <u>matematikfelt i et notevindue</u>

taster $f(x)$ og trykker på enter

får vi

$$f(x) = 6.79203 \cdot x^{0.802027}$$

<u>Hvis potensfunktionen er aftagende</u>, skriver Nspire en brøk:

$$f(x) = \frac{31.9605}{x^{1.12554}}$$

Dette skal du selv skrive om til formen $b \cdot x^a$. Husk at **tilføje et minus** foran eksponenten:

$$f(x) = 31.9605 \cdot x^{-1.12554}$$

Bestem forskrift for lineær og eksponentiel funktion

21. Bestem a og b i $y = ax+b$ ud fra to punkter.

Opgave 1: Punkterne $(x, y) = (-7,\ 1)$ og $(x, y) = (8,\ 4)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = ax + b$. Find tallene a og b.

Metode 1: Vi indsætter i formler for a og b:

Af $(x_1, y_1) = (-7,\ 1)$ og $(x_2, y_2) = (8,\ 4)$ får vi

$$\boldsymbol{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = \frac{4-1}{8-(-7)} = \frac{3}{15} = 0{,}2$$

$$\boldsymbol{b = y_1 - a \cdot x_1} = 1 - 0{,}2 \cdot (-7) = 2{,}4$$

Metode 2: Nspire løser ligningssystem:

Da $(x, y) = (-7,\ 1)$ og $(x, y) = (8,\ 4)$ ligger på grafen, er

$$1 = a \cdot (-7) + b$$
$$4 = a \cdot 8 + b$$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får

$$a = 0{,}2 \quad \text{og} \quad b = 2{,}4$$

Sådan tastede vi på Nspire:

```
solve(1=a·-7+b and 4=a·8+b,a,b)
                    a=0.2 and b=2.4
```

Metode 3: Vi løser ligningssystem uden hjælpemidler:

Da $(x, y) = (-7,\ 1)$ og $(x, y) = (8,\ 4)$ ligger på grafen, er

(1) $1 = a \cdot (-7) + b$

(2) $4 = a \cdot 8 + b$

Af (1) får vi

(3) $1 + 7a = b$

Vi indsætter dette i (2) og får

$$4 = 8a + (1 + 7a)$$

hvoraf

$$3 = 15a$$
$$\frac{3}{15} = \frac{15a}{15}$$
$$0{,}2 = a$$

Dette indsætter vi i (3) og får

$$1 + 7 \cdot 0{,}2 = b$$

hvoraf

$$2{,}4 = b$$

Metode 4: Nspire laver lineær regression:

Nspire laver lineær regression på punkterne $(x, y) = (-7,\ 1)$ og $(x, y) = (8,\ 4)$ og får $y = 0{,}2x + 2{,}4$

Konklusion: $a = 0{,}2$ og $b = 2{,}4$

Dette er konklusionen i **Opgave 1** uanset om vi bruger Metode 1, 2, 3 eller 4.

Opgave 2: Punkterne $(x, y) = (-7,\ 1)$ og $(x, y) = (8,\ 4)$ ligger på grafen for en lineær funktion f. Find en forskrift for f.

Metoder er ens for opgave 1 og 2.

Konklusion: $f(x) = 0{,}2x + 2{,}4$

22. Bestem a og b i $y = ax+b$ ud fra punkter givet ved tekst.

Opgave

Der er en lineær sammenhæng mellem temperatur og overskud.

Når temperaturen er $-3\,°C$, er overskuddet 12 mio. kr.
Når temperaturen er $5\,°C$, er overskuddet 28 mio. kr.

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem temperatur og overskud.

Besvarelse

Vi sætter

x = temperatur (målt i °C)
y = overskud (målt i mio. kr.)

Det er nødvendigt at fortælle læseren dette da det ikke står i opgaven.

Der er oplyst to x-værdier og tilhørende y-værdier:

Til $x_1 = -3$ svarer $y_1 = 12$.
Til $x_2 = 5$ svarer $y_2 = 28$.

Da sammenhængen er lineær, er den søgte ligning på formen $y = ax + b$, og

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{28-12}{5-(-3)} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 12 - 2 \cdot (-3) = 18$$

Alle fire metoder fra ramme 20 kan bruges her.

Dvs.:

Ligningen $\underline{\underline{y = 2x + 18}}$ viser sammenhængen mellem

temperaturen x i °C og overskuddet y i mio. kr.

23. Bestem b i $f(x) = ax+b$ ud fra a og punkt.

Opgave

Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $f(x) = 8x + b$. Find tallet b.

Besvarelse

Vi indsætter 4 for x og 35 for $f(x)$ i $f(x) = 8x + b$ og får $35 = 8 \cdot 4 + b$.
Vi løser denne ligning mht. b og får $b = 3$.

Dvs. $\underline{\underline{b = 3}}$

24. Bestem a i $f(x) = ax+b$ ud fra b og punkt.

Opgave

Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for sammenhængen $f(x) = ax + 18$. Find tallet a.

Besvarelse

Vi indsætter 5 for x og 8 for $f(x)$ i $f(x) = ax + 18$ og får $8 = a \cdot 5 + 18$.
Vi løser denne ligning mht. a og får $a = -2$.

Dvs. $\underline{\underline{a = -2}}$

25. Udregn a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra to punkter på grafen.

<u>Opgave:</u> Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = b \cdot a^x$. Udregn tallene a og b .

<u>**Metode 1:** Vi sætter ind i formler for a og b</u>

Af $(x_1, y_1) = (4, 3)$ og $(x_2, y_2) = (7, 24)$ får vi

$$\boldsymbol{a} = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[7-4]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{3}{2^4} = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

<u>**Metode 2:** Vi løser ligningssystem med elektronisk hjælpemiddel</u>

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så

$3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får

$a = \underline{\underline{2}}$ og $b = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$

<u>**Metode 3:** Vi løser ligningssystem uden hjælpemidler</u>

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så

$3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Vi dividerer højre ligning med venstre:

$$\frac{24}{3} = \frac{b \cdot a^7}{b \cdot a^4} \qquad \frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} \quad \text{da} \quad \frac{a^7}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}$$

Når vi forkorter de to brøker, får vi

$8 = a^3$

så $a = \sqrt[3]{8}$

dvs. $a = \underline{\underline{2}}$

Vi indsætter denne værdi af a i ligningen $3 = b \cdot a^4$ og får $3 = b \cdot 2^4$

Ved at dividere begge sider med 2^4 får vi $\frac{3}{2^4} = b$

så $b = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$

<u>**Metode 4:** Vi bruger eksponentiel regression</u>

Nspire laver eksponentiel regression på punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ og får

$a = \underline{\underline{2}}$ og $b = \underline{\underline{0{,}1875}}$

26. $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{x \cdot k}$.

Regel

Forskriften $f(x) = b \cdot a^x$ for en eksponentiel funktion kan skrives på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ hvor $a = e^k$.

Opgave

Skriv $f(x) = 20 \cdot 0{,}76^x$ på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$.

Besvarelse

$0{,}76 = e^k$

Nspire løser denne ligning mht. k og får $k = -0{,}274437$.

$\underline{\underline{f(x) = 20 \cdot e^{-0{,}274x}}}$

Opgave

Skriv $f(x) = 3{,}8 \cdot e^{1{,}4x}$ på formen $f(x) = b \cdot a^x$.

Besvarelse

$a = e^{1{,}4}$

Nspire udregner højre side og får $a = 4{,}0552$.

$\underline{\underline{f(x) = 3{,}8 \cdot 4{,}06^x}}$

Fordoblings- og halveringskonstant

27. Fordoblingskonstant og halveringskonstant.

Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

Antal uger efter køb:	0	1	2	3	4	5	6
Højde i cm:	12	15	19	24	30	38	48

I tabellen ser vi:

1 uge efter købet er højden 15 cm.
3 uger senere er højden 30 cm, som er det dobbelte af 15 cm.

2 uger efter købet er højden 19 cm.
3 uger senere er højden 38 cm, som er det dobbelte af 19 cm.

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet.

Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

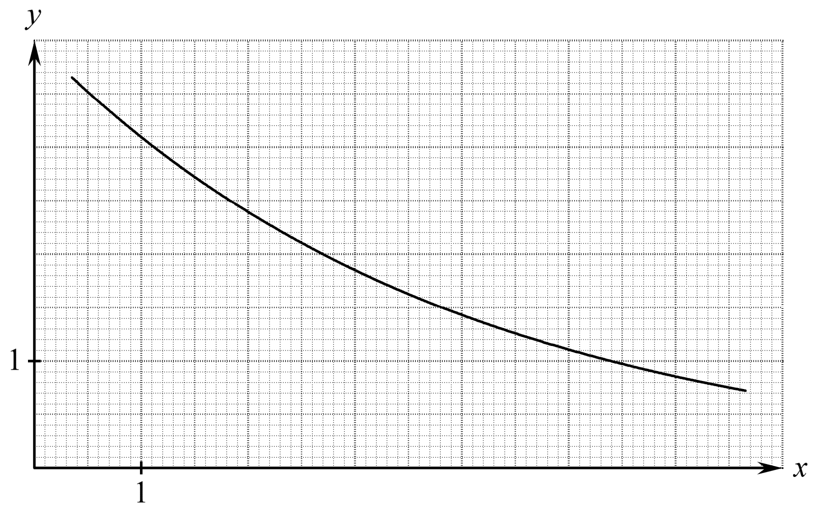
27a En eksponentielt voksende sammenhæng har en fordoblingskonstant T_2 .
Når x-værdien bliver T_2 enheder større, så bliver y-værdien fordoblet.

27b En eksponentielt aftagende sammenhæng har en halveringskonstant $T_{\frac{1}{2}}$.
Når x-værdien bliver $T_{\frac{1}{2}}$ enheder større, så bliver y-værdien halveret.

28. Aflæs fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf.

Opgave

Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.
Hvad er halveringskonstanten for denne sammenhæng?



Besvarelse

Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan fx starte med $x=1$:

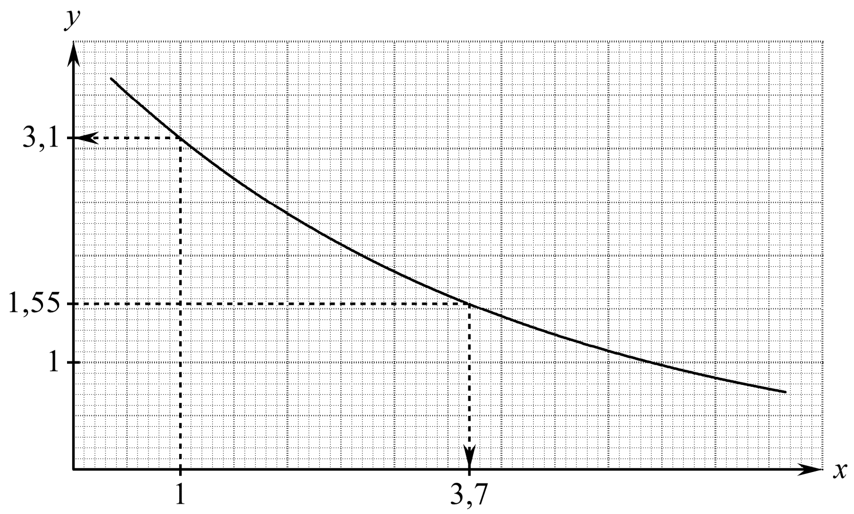
Som vist på figuren nedenfor aflæser vi at når $x=1$ er $y=3{,}1$.

Det halve af 3,1 er $\frac{3{,}1}{2}=1{,}55$.

Som vist på figuren nedenfor aflæser vi at når $y=1{,}55$ er $x=3{,}7$.

For at halvere y skal vi altså øge x med $3{,}7-1=2{,}7$ så

halveringskonstanten er $\underline{\underline{2{,}7}}$.



Bemærkning

Hvis funktionen er eksponentielt voksende, kan fordoblingskonstanten aflæses på næsten samme måde: Vi finder to grafpunkter hvor y-koordinaten til det ene er 2 gang y-koordinaten til det andet. Forskellen på de to punkters x-koordinater er fordoblingskonstanten.

29. Udregn fordoblings- og halveringskonstant ud fra forskrift.

Regler

For funktionen $f(x)=b\cdot a^x$ gælder

Hvis f er voksende ($a>1$), er $T_2=\dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$

Hvis f er aftagende ($0<a<1$), er $T_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$

For funktionen $f(x)=b\cdot e^{kx}$ gælder

Hvis f er voksende ($k>0$), er $T_2=\dfrac{\ln(2)}{k}$

Hvis f er aftagende ($k<0$), er $T_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$

Eksempler

Hvis $f(x)=12{,}5\cdot 1{,}063^x$ er $T_2=\dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}063)}=11{,}3454\approx 11{,}3$

Hvis $f(x)=30\cdot e^{-1{,}3x}$ er $T_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln(\frac{1}{2})}{-1{,}3}=0{,}53319\approx 0{,}53$

30. Skriv hvad fordoblings- og halveringskonstant fortæller.

Opgave

Der er en eksponentiel sammenhæng $y=b\cdot a^x$ mellem de variable

x = længden (i cm)
y = omkredsen (i cm)

Vi har fået at vide at

fordoblingskonstanten er 7 .

Hvad fortæller dette om længde og omkreds.

Besvarelse

At fordoblingskonstanten er 7 betyder:

Når ***x*-værdien** bliver 7 enheder større, så bliver ***y*-værdien** fordoblet.

Dvs:

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** fordoblet.

Hvis vi i stedet havde fået at vide at

halveringskonstanten er 7

ville svaret være

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** halveret.

31. Udregn funktionsværdier (y-værdier) med fordoblingskonstant og halveringskonstant.

Opgave

Om en eksponentiel funktion f er oplyst at $f(4)=9$ og at fordoblingskonstanten er 3.
Udregn $f(10)$.

Besvarelse

Når vi lægger 3 til 4, får vi 7, så $f(7)=2\cdot 9=18$.
Når vi lægger 3 til 7, får vi 10, så $f(10)=2\cdot 18=36$.

$\underline{\underline{f(10)=36}}$

Opgave

Om en eksponentiel funktion f er oplyst at $f(0)=12$ og at halveringskonstanten er 1.
Udregn $f(3)$.

Besvarelse

$f(1)=\frac{1}{2}\cdot 12=6$, $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ og $f(3)=\frac{1}{2}\cdot 3=1{,}5$.

$\underline{\underline{f(3)=1{,}5}}$

Beviser

32. Bevis for hvad a og b i $y=ax+b$ fortæller.

Sætning

For en lineær sammenhæng $y=ax+b$ gælder:

32a. Når vi gør x én enhed større, bliver der lagt a til værdien af y.
32b. Når x er 0, er y lig b.

Bevis

Vi udregner værdien af y når x er t, og når x er $t+1$:

Når $x=t$ er $y\ =\ at+b$ (Vi har indsat t for x i $y=ax+b$)

Når $x=t+1$ er $y\ =\ a(t+1)+b$ (Vi har indsat $t+1$ for x i $y=ax+b$)

Følgende viser at når vi lægger a til første værdi af y, så får vi den anden værdi af y :

$at+b\ +\ a\ =\ at+a\ +\ b\ =\ a(t+1)+b$ (Vi har sat a uden for parentes)

Dvs. når x ændres fra t til $t+1$, så lægges a til værdien af y.

Nu har vi bevist 32a (**reglen om lineær vækst**).

Når $x=0$ er $y\ =\ a\cdot 0+b\ =\ b$

Nu har vi bevist 32b.

33. Bevis for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller.

Sætning

For en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ gælder:

33a. Når vi gør x én enhed større, bliver værdien af y ganget med a .

33b. Når x er 0, er y lig b.

Bevis

Vi udregner værdien af y når x er t , og når x er $t+1$:

Når $x = t$ er $y = b \cdot a^t$ (Vi har indsat t for x i $y = b \cdot a^x$)

Når $x = t+1$ er $y = b \cdot a^{t+1}$ (Vi har indsat $t+1$ for x i $y = b \cdot a^x$)

Følgende viser at når vi ganger første værdi af y med a, så får vi den anden værdi af y :

$b \cdot a^t \cdot a = b \cdot a^t \cdot a^1 = b \cdot a^{t+1}$ ifølge potensreglen $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

Dvs. når x ændres fra t til $t+1$, så bliver værdien af y ganget med a .

Nu har vi bevist 33a (**reglen om eksponentiel vækst**).

....

Når $x = 0$ er $y = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

Nu har vi bevist 33b.

34. Bevis for reglen om potensvækst.

Sætning

Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k:

Når $\boldsymbol{x}$ bliver ganget med $\boldsymbol{k}$, så bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{k^a}$.

Bevis

Vi udregner værdien af y når x er t , og når x er $k \cdot t$:

Når $x = t$ er $y = b \cdot t^a$ (Vi har indsat t for x i $y = b \cdot x^a$)

Når $x = k \cdot t$ er $y = b \cdot (k \cdot t)^a$ (Vi har indsat $k \cdot t$ for x i $y = b \cdot x^a$)

Følgende viser at når vi ganger første værdi af y med k^a , så får vi den anden værdi af y :

$b \cdot t^a \cdot k^a = b \cdot (t \cdot k)^a$ ifølge potensreglen $p^r \cdot q^r = (p \cdot q)^r$

Dvs. når værdien af x bliver ganget med k, så bliver værdien af y ganget med k^a .

Det var dette vi ville bevise.

Proportionale og omvendt proportionale variable

35. Proportionale variable.

Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er proportional med x

hvis

$y = k \cdot x$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

Opgave

De to variable x og y er proportionale.
Tabellen viser nogle sammenhørende værdier af x og y.
Hvad er y når x er 10?
Hvad er x når y er 15?

x	24	36	92
y	18	27	69

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

Besvarelse

Udregne k :

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

I tabellen ser vi at når $x = 24$ er $y = 18$.

Dette indsætter vi i (1):

$$18 = k \cdot 24$$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 24.

Denne ligning løser vi mht. k og får

$$0{,}75 = k$$

dvs.

(2) $\underline{y = 0{,}75 \cdot x}$

Udregne y :

For at finde y når x er 10, sætter vi x til 10 i (2):

$$y = 0{,}75 \cdot 10$$

Heraf får vi $y = 7{,}5$ så

y er $\underline{\underline{7{,}5}}$ når x er 10

Udregne x :

For at finde x når y er 15, sætter vi y til 15 i (2):

$$15 = 0{,}75 \cdot x$$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 0,75.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$20 = x$$

så

x er $\underline{\underline{20}}$ når y er 15

36. Omvendt proportionale variable.

Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er omvendt proportional med x

hvis

$y = \frac{k}{x}$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

Opgave

De to variable x og y er omvendt proportionale.
Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

x		12	36
y	9	6	

Besvarelse

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

Udregne k :

Da x og y er omvendt proportionale, er der et tal k så

(1) $y = \frac{k}{x}$.

I tabellen ser vi at når $x = 12$ er $y = 6$. Dette indsætter vi i (1):

$$6 = \frac{k}{12}$$

Vi kan løse ligningen ved at gange begge sider med 12.

Vi løser denne ligning mht. k og får

$$72 = k$$

Der gælder altså:

(2) $\underline{y = \frac{72}{x}}$

Udregne y :

For at finde y når x er 36, sætter vi x til 36 i (2):

$$y = \frac{72}{36}$$

Heraf får vi $y = 2$ så

y er $\underline{\underline{2}}$ når x er 36

Udregne x :

For at finde x når y er 9, sætter vi y til 9 i (2):

$$9 = \frac{72}{x}$$

Vi kan løse ligningen ved først at gange begge sider med x og derefter at dividere begge sider med 9.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$x = 8$$

så

x er $\underline{\underline{8}}$ når y er 9

37. Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale.

Opgave

På en skærm er et rektangel som vi kan ændre ved at trække med musen.
Højde og bredde er omvendt proportionale.
Højden er 2,5 når bredden er 8

Hvad er højden når bredden er 3,2 ?

Besvarelse

Vi kalder højden for h og bredden for b.

Udregne k :

Da h er omvendt proportional med b, findes et tal k så

$$h = \frac{k}{b}$$

Da $h = 2{,}5$ når $b = 8$ må

$$2{,}5 = \frac{k}{8}$$

Vi ganger begge sider med 8 og får $k = 20$, dvs.

$$(1) \qquad h = \frac{20}{b}$$

Udregne h :

Vi sætter $b = 3{,}2$ i (1):

$$h = \frac{20}{3{,}2}$$

Heraf får vi $h = 6{,}25$ så

højden er $\underline{\underline{6{,}25}}$ når bredden er 3,2

Logaritmefunktioner

38. Naturlig logaritme og titalslogaritme.

Funktionen $\ln(x)$ hedder den naturlige logaritmefunktion.
Funktionen $\log(x)$ hedder titalslogaritmefunktionen.
Funktionerne $\ln(x)$ og $\log(x)$ er på Nspire.

Logaritmereglerne:

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\qquad$ $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

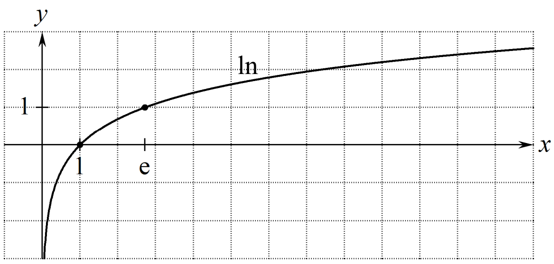
$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ $\qquad$ $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$

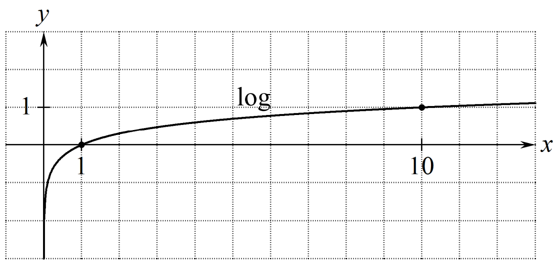
$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$ $\qquad$ $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

$\ln(1) = 0$ $\qquad$ $\log(1) = 0$

$\ln(\mathrm{e}) = 1$ $\qquad$ $\log(10) = 1$

Grafer:





Definitionsmængde: Alle positive tal kan indsættes for x.
Værdimængde: Funktionsværdien y kan være alle tal.

Polynomier

39. Polynomier og rødder.

Polynomier

Et førstegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax + b$ hvor $a \neq 0$.

Et andengradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hvor $a \neq 0$.

Et tredjegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hvor $a \neq 0$.

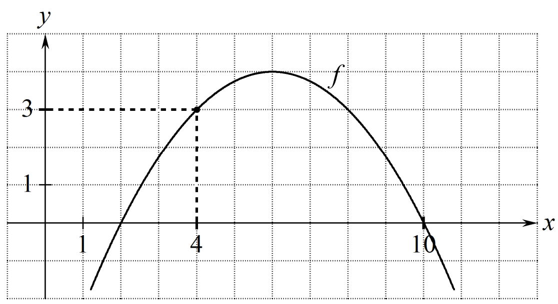
Osv.

Nulpunkter og rødder

Hvis vi i $f(x) = ax^2 + bx + c$ sætter $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$ og $c = -5$, får vi andengradspolynomiet

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x^2 + 3x - 5$$

Til højre har vi tegnet grafen for dette andengradspolynomium.



På grafen ser vi at hvis vi sætter 4 ind for x i forskriften og regner ud, så får vi y-værdien 3.

På grafen ser vi også at hvis vi sætter 10 ind for x og regner y-værdien ud, så får vi 0.

Et tal kaldes et nulpunkt for f hvis vi får 0 når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud. Et nulpunkt kaldes også en rod. At finde rødderne er det samme som at løse ligningen $f(x) = 0$.

På grafen ser vi at rødderne er 2 og 10. Hvis vi løser ligningen $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$, så får vi altså løsningerne 2 og 10.

Opgave

Vis at 10 er rod i polynomiet $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$.

Besvarelse

$f(10) = -\frac{1}{4}\cdot 10^2 + 3\cdot 10 - 5 = -\frac{1}{4}\cdot 100 + 30 - 5 = -25 + 25 = 0$

Da $f(10) = 0$, er 10 rod.

Regel om antal rødder, antal fællespunkter med *x*-akse og antal løsninger

Et polynomium af grad n kan højst have n rødder.

Eksempel

Et tredjegradspolynomium kan ikke have mere end 3 rødder.

Grafen for et tredjegradspolynomium kan højst have 3 punkter fælles med x-aksen.

En tredjegradsligning kan højst have 3 løsninger.

Andengradspolynomier

40. Andengradspolynomium.

Et andengradspolynomium er er en funktion af typen

(1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hvor $a \neq 0$

Hvis vi skriver 0 på a's plads, så bliver det ikke et andengrads-polynomium da x^2 forsvinder.

Eksempel *Hvilke tal er a, b og c lig?*

Vi sætter $a = 1$ $b = -2$ $c = 0$

i $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

og får $f(x) = 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 0$

så $f(x) = x^2 - 2x$

er et andengradspolynomium.

I dette og andre andengradspolynomier skal vi kunne se hvad a, b og c er for at kunne indsætte i formler med a, b og c.

41. Toppunkt.

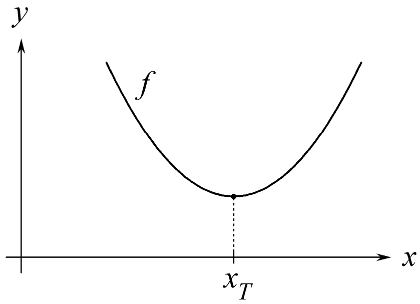
Grafen for et andengradspolynomium

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

er en parabel.

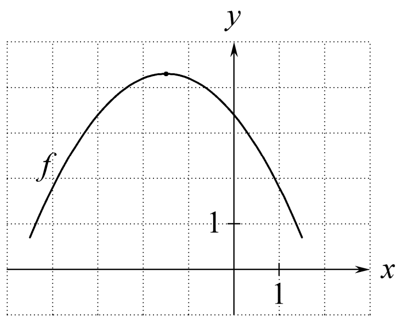
Grafens toppunkt har x-koordinaten

$$x_T = \frac{-b}{2a}$$



Eksempel *Udregn toppunkt*

$f(x) = -0{,}4x^2 - 1{,}2x + 3{,}4$



Vi ser at $f(x) = ax^2 + bx + c$

og $a = -0{,}4$ $b = -1{,}2$ $c = 3{,}4$

Toppunktets x-koordinat er

$$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1{,}2)}{2 \cdot (-0{,}4)} = -1{,}5$$

Toppunktet ligger på grafen og har x-koordinaten $-1{,}5$ så y-koordinaten er

$y_T = -0{,}4 \cdot (-1{,}5)^2 - 1{,}2 \cdot (-1{,}5) + 3{,}4$

Vi udregner højresiden og får

$y_T = 4{,}3$

Toppunktet er $T = \underline{\underline{(-1{,}5\ ,\ 4{,}3)}}$

42. Diskriminant.

Diskriminanten for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

er tallet

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Eksempel *Udregn diskriminanten*

$$f(x) = 3x^2 - x + 5$$

Vi ser at $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$

og $\quad a = 3 \qquad b = -1 \qquad c = 5$

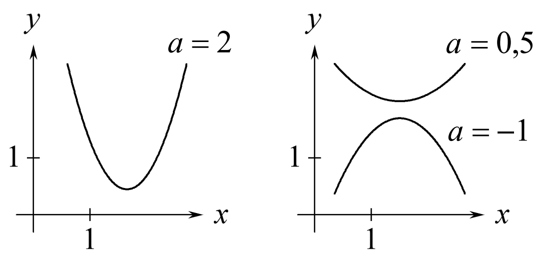
Diskriminanten er

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{-59}}$$

43. Betydning af *a*, *b*, *c* og *d* for grafen.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

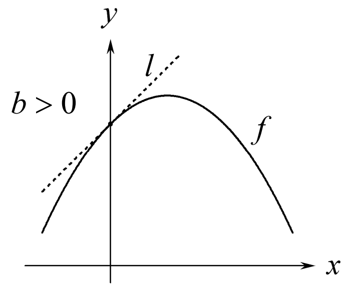
d er diskriminanten



a : *a* positiv: grene vender op
a negativ: grene vender ned
parablen er bredere når *a* er tættere på nul

b : *b* er hældningskoefficient for tangent til graf i skæringspunkt med *y*-akse

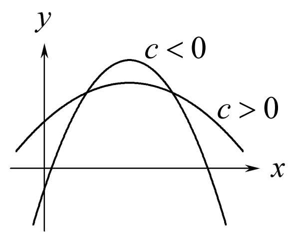
b positiv: graf går op mod højre i skæring med *y*-akse
b nul: grafs toppunkt er på *y*-akse
b negativ: graf går ned mod højre i skæring med *y*-akse



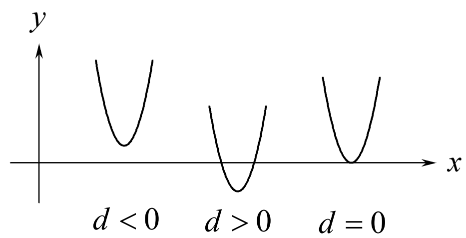
l er tangent til *f*-grafen i dennes skæringspunkt med *y*-aksen.
b er lig *l* 's hældningskoefficient.

c : Graf skærer *y*-akse i punktet $(0\,,\,c)$

c positiv: graf skærer *y*-akse over *x*-akse
c nul: graf går gennem punktet $(0\,,\,0)$
c negativ: graf skærer *y*-akse under *x*-akse



d : *d* positiv: graf har to punkter på *x*-akse
d nul: graf har ét punkt på *x*-akse
d negativ: graf har ingen punkter på *x*-akse



44. Nulpunkt.

At

et tal er <u>nulpunkt</u> for en funktion

betyder at

når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud,
så får vi nul.

Ordet nul<u>punkt</u> er <u>misvisende</u>.
Et nul<u>punkt</u> er <u>IKKE</u> et <u>punkt</u>.
Et nul<u>punkt</u> er et <u>tal</u>.

<u>Eksempel</u> *Nulpunkt*

At

$1{,}5$ er nulpunkt for $f(x) = 2x^2 - 3x$

betyder at

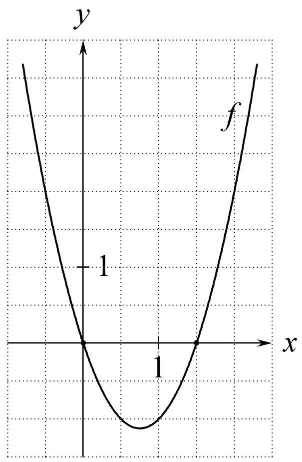
$2 \cdot 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 \ = \ 0$

Dette er det samme som at

$1{,}5$ er løsning til ligningen $2x^2 - 3x \ = \ 0$

og det samme som at

grafpunktet med x-koordinat $1{,}5$ ligger på x-aksen.



0 og 1,5 er nulpunkter for f

45. Antal nulpunkter eller løsninger.

$f(x) \ = \ ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$

d er diskriminanten

Der gælder at

antallet af <u>nulpunkter</u> for andengrads<u>polynomiet</u> $\quad ax^2 + bx + c$

dvs.

antallet af <u>løsninger</u> til andengrads<u>ligningen</u> $\quad ax^2 + bx + c \ = \ 0$

er

2 hvis $d > 0$

1 hvis $d = 0$

0 hvis $d < 0$

<u>Eksempel</u> *Antal nulpunkter eller løsninger*

Vi vil bestemme tallet k så andengradsligningen

$kx^2 - 2x + 3 \ = \ 0$

har netop én løsning.

Ligningen er på formen $\quad ax^2 + bx + c \ = \ 0 \quad$ med $\quad a = k \ , \ b = -2 \ , \ c = 3 \ ,$

så diskriminanten er $\quad d \ = \ b^2 - 4ac \ = \ (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 3 \ = \ \underline{4 - 12k}$

Vi vil finde ud af hvornår der er én løsning, dvs. vi vil finde ud af hvornår d er 0:

$4 - 12k \ = \ 0$ er ensbetydende med at $k = \frac{1}{3}$

Ligningen $kx^2 - 2x + 3 \ = \ 0$ har netop én løsning når $k = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

46. Løs andengradsligning.

En andengradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \qquad a \neq 0$$

kan vi løse sådan:

Først udregner vi diskriminanten:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Så bruger vi følgende regel:

Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger.

Hvis $d = 0$ har ligningen løsningen $\dfrac{-b}{2a}$

Hvis $d > 0$ har ligningen løsningerne $\dfrac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ og $\dfrac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Bemærkning

Både når $d = 0$ og $d > 0$ er løsningerne

$$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Formlen for at løse andengradsligninger.

Eksempel *Løs andengradsligning*

Ligningen

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

er af typen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

med

$$a = 3 \ , \ \ b = -2 \ \text{ og } \ c = -1$$

Diskriminanten er

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$$

Da $d > 0$ har ligningen løsningerne

$$\frac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2+4}{6} = 1$$

Konklusion:

Ligningen $3x^2 - 2x - 1 = 0$ har løsningerne $\underline{\underline{-\frac{1}{3} \text{ og } 1}}$

47. Ligninger af typen $x^2 = r$.

Oplæg *Ligninger af typen* $x^2 = r$

Når $x=3$ er $x^2 = x \cdot x = 3 \cdot 3 = 9$

Når $x=-3$ er $x^2 = x \cdot x = (-3) \cdot (-3) = 9$

$x^2 = 9$ netop når $x = -3$ eller $x = 3$

47a. Regel *Ligninger af typen* $x^2 = r$

Når n er negativ: $x^2 = n$ er falsk uanset hvilket tal der indsættes for x

$x^2 = 0$ netop når $x = 0$

Når p er positv: $x^2 = p$ netop når $x = -\sqrt{p}$ eller $x = \sqrt{p}$

Eksempel *Ligninger af typen* $(\,udtryk\,)^2 = r$

Vi vil løse ligningen

$$(x+2)^2 = 9$$

Af regel 47a får vi

$$x+2 = -\sqrt{9} \quad \text{eller} \quad x+2 = \sqrt{9}$$

$$x+2 = -3 \quad \text{eller} \quad x+2 = 3$$

dvs.

$$\underline{\underline{x = -5 \quad \text{eller} \quad x = 1}}$$

Eksempel *Andengradsligning uden x-led*

Når en andengradsligning ikke har noget x-led, kan vi løse den ved at omskrive og bruge regel 47a:

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$\underline{\underline{x = -\sqrt{3} \quad \text{eller} \quad x = \sqrt{3}}}$$

48. Bevis for formlen for løsning af andengradsligninger.

Ved udregning får vi

$(2ax+b)^2 = (2ax)^2 + b^2 + 2\cdot 2ax \cdot b$ ifølge formlen $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$

Vi reducerer højre side:

(1) $(2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + b^2 + 4abx$

Vi omskriver andengradsligningen:

I ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \qquad a \neq 0$$

ganger vi begge sider med $4a$:

$$4a \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) = 4a \cdot 0$$

Vi ganger ind i parentesen:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi lægger diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ til begge sider:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = 0 + b^2 - 4ac$$

Vi reducerer:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

Af (1) får vi

$$(2ax+b)^2 = d$$

Vi bruger nu de tre dele af 47a:

Hvis $d < 0$:

$$(2ax+b)^2 = d$$

har ingen løsninger

Hvis $d = 0$:

$$(2ax+b)^2 = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis $d > 0$:

$$(2ax+b)^2 = d$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{d}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Nu har vi bevist alle tre dele af reglen i ramme 46.