Geometrisk algebra

Et matematik-historisk forløb

Hvad er geometisk algebra?

Algebra er regning med bogstavudtryk. I geometrisk algebra er disse regninger med bogstavudtryk erstattet med geometriske overvejelser.

Følgende ligning er rigtig uanset hvilket tal a står for:

$$5\cdot(a+2) \;=\; 5\cdot a+10$$

I oldtiden begrundede man ofte sådanne ligninger ved hjælp af nogle geometriske figurer. Dette foregik forskellige steder og over en lang periode.

I oldtiden skrev man ikke ligningen med symboler. Man formulerede den i ord.

Eksempel 1

Når vi påstår at ligningen

$$5\cdot(a+2) \;=\; 5\cdot a+10$$

gælder, hvad er det så vi mener? Det vil vi tydeliggøre nu:

Vi skriver hvad a skal være: a = 4

Vi udregner $5\cdot(a+2)$: Til a-tallet lægger vi 2 og får __________
Vi ganger 5 med dette resultat og får __________

Vi udregner $5\cdot a+10$: Vi ganger 5 med a-tallet og får __________
Til dette resultat lægger vi 10 og får __________

Vælg selv hvad a skal være.

Vi skriver hvad a skal være: a = __________

Vi udregner $5\cdot(a+2)$: Til a-tallet lægger vi 2 og får __________
Vi ganger 5 med dette resultat og får __________

Vi udregner $5\cdot a+10$: Vi ganger 5 med a-tallet og får __________
Til dette resultat lægger vi 10 og får __________

Uanset hvad vi skriver at a skal være, så vil vi få vi det samme når vi udregner $5\cdot(a+2)$ og $5\cdot a+10$. Dette vil vi nu bevise ved hjælp af geometriske figurer.

Eksempel 1 fortsætter på næste side.

I rektanglet til venstre er bredden

$a+2$

og højden er

5

så arealet er

$5\cdot(a+2)$

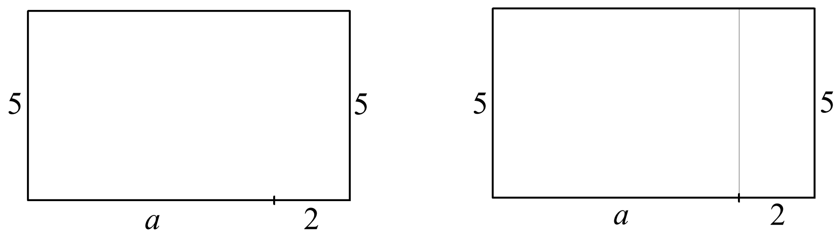
At bredden er $a+2$ betyder:

har vi skrevet at a er 4, er bredden 6,

har vi skrevet at a er $2{,}7$, er bredden $4{,}7$,

osv.

Til højre er rektanglet delt op i to delrektangler.



Venstre delrektangel har bredde a og højde 5, så arealet er

$5\cdot a$

Højre delrektangel har bredde 2 og højde 5, så arealet er $5\cdot 2$, altså

10

Når vi lægger de to delarealer $5\cdot a$ og 10 sammen, får vi hele arealet $5\cdot(a+2)$, så

$$5\cdot(a+2) \;=\; 5\cdot a+10$$

Nu har vi bevist at denne ligning passer uanset hvilket positivt tal a står for. (Den gælder også hvis a er nul eller negativ. I oldtiden havde man kun positive tal).

Eksempel 2

Uanset hvilket tal vi skriver at a skal være, så vil de to udregninger $(1+a)\cdot a$ og $a+a^2$ give samme resultat, dvs. der gælder

$$(1+a)\cdot a \;=\; a+a^2$$

Vi vil bevise at denne ligning gælder. Vi gør det ved hjælp af de to figurer nedenfor.

I rektanglet til venstre er bredden

____ + ____

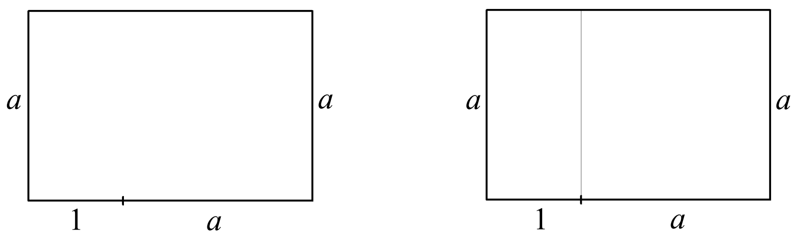
og højden er

____

så arealet er

_________ · ____

På figuren til højre er rektanglet delt op i to delrektangler.



Venstre delrektangel har bredde ____ og højde ____ , så arealet er

____ · ____ som er lig ____

I højre delrektangel (som er et kvadrat) er både bredde og højde ____ , så arealet er

____ · ____ som kort kan skrives ______

Når vi lægger de to delarealer ____ og ______ sammen, får vi hele arealet som vi ovenfor indså var ________________ , så

________________ = ____ + ______

Nu har vi bevist at denne ligning passer uanset hvilket positivt tal a står for. (Den gælder også hvis a er nul eller negativ. I oldtiden havde man kun positive tal).

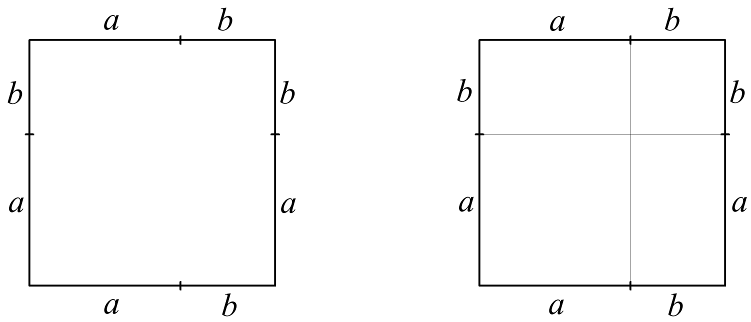
Eksempel 3

Figuren nedenfor til venstre er et kvadrat hvor enhver af siderne har længden

___ + ___

Kvadratets areal er altså

__________ · __________ som kort kan skrives _____________



På figuren til højre er kvadratet delt op i fire dele.

En af disse 4 dele er det kvadrat hvor siderne er a . Arealet af dette er

____ · ____ som kort kan skrives ______

En anden af de 4 dele er det kvadrat hvor siderne er b . Arealet af dette er

____ · ____ som kort kan skrives ______

De to sidste af de fire dele er rektangler. Tilsammen har de arealet

____ · ____ + ____ · ____ som kort kan skrives 2 · _______

Når vi lægger de fire delarealer sammen, får vi hele arealet, så

_____________ = ______ + ______ + __________

Nu har vi bevist at denne ligning passer uanset hvilke positive tal a og b står for. (Den gælder for alle tal, altså ikke kun for positive).