

Geometrisk algebra

I stx er der krav om historisk forløb i matematik.
Disse sider er et historisk forløb i matematik
der er træning i at omgås formler og argumentation.

1. Hvad er geometisk algebra?

Algebra: er regler for regning med tal .
Disse regler kan formuleres som regler om bogstavudtryk.
I oldtiden blev reglerne formuleret i ord uden brug af symboler.

Geometrisk algebra: er formulering i geometrisk sprog af regler for regning med tal.

Følgende ligning er rigtig uanset hvilket tal a står for:

$$5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$$

I oldtiden begrundede man ofte sådanne ligninger ved hjælp af nogle geometriske figurer.
Dette foregik forskellige steder og over en lang periode.

2. Øvelse: Hvad mener vi når vi siger at en formel gælder?

Når vi påstår at ligningen

$$5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$$

gælder, hvad er det så vi mener? Det vil vi tydeliggøre nu:

Vi skriver hvad a skal være: $a = \underline{\quad 4 \quad}$

Vi udregner $5 \cdot (a + 2)$: Til a -tallet lægger vi 2 og får _____
Vi ganger 5 med dette resultat og får _____

Vi udregner $5 \cdot a + 10$: Vi ganger 5 med a -tallet og får _____
Til dette resultat lægger vi 10 og får _____

Heraf ser vi: de to sider af ligningen $5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$ giver samme resultat når $a = \underline{\quad}$

Vi skriver hvad a skal være: $a = \underline{\quad}$  Vælg selv hvad a skal være.

Vi udregner $5 \cdot (a + 2)$: Til a -tallet lægger vi 2 og får _____
Vi ganger 5 med dette resultat og får _____

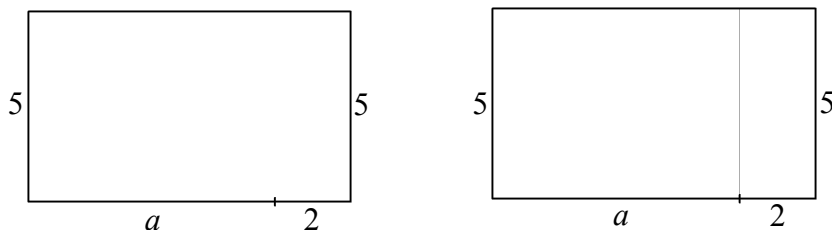
Vi udregner $5 \cdot a + 10$: Vi ganger 5 med a -tallet og får _____
Til dette resultat lægger vi 10 og får _____

Heraf ser vi: de to sider af ligningen $5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$ giver samme resultat når $a = \underline{\quad}$

Når vi siger: ligningen $5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$ gælder
mener vi: de to sider af ligningen giver samme resultat uanset hvilket tal vi indsætter for a

I næste øvelse: Ved hjælp af geometrisk figur beviser vi: ligningen $5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 10$ gælder

3. Øvelse: et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen



Hvilke af følgende påstande er sande for første rektangel ovenfor?

- (a) Højden er 10
- (b) Højden er 5
- (c) Bredden er a
- (d) Bredden er $2a$
- (e) Bredden er $2+a$
- (f) Bredden er $a+2$
- (g) Arealet er $10a$
- (h) Arealet er $5 \cdot a+2$
- (i) Arealet er $5 \cdot (a+2)$

Den anden figur er samme rektangel. Rektanglet er delt op i to del-rektangler.

- (j) Areal af venstre del-rektangel = _____
- (k) Areal af højre del-rektangel = _____

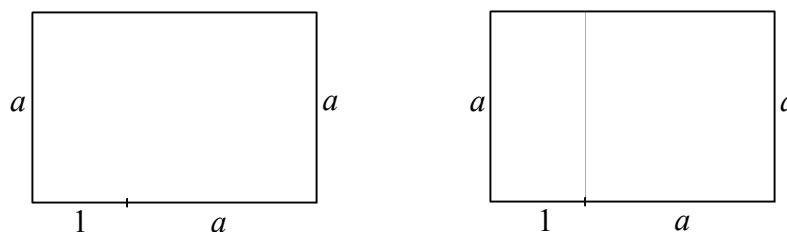
Når vi lægger arealerne af de to del-rektangler sammen, så får vi arealet af hele rektanglet, så du kan nu skrive en korrekt ligning ved at gøre sådan:

- (1) Over midten af nedenstående blå linje skriver du et lighedstegn.
- (2) Før lighedstegnet skriver du det af udtrykkene fra (g), (h) og (i) som er korrekt.
- (3) Efter lighedstegnet skriver du de to udtryk fra (j) og (k) med et regnetegn imellem. Du må selv finde ud af hvilket af regnetegnene $+$, $-$, \cdot der skal stå imellem.

Vi har altså bevist at følgende ligning gælder: _____

4. Øvelse: et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen

Vi vil bevise formelen $(1+a) \cdot a = a + a^2$.



Den første figur viser et rektangel.

- højde = _____
 - bredde = _____ + _____
- så
- rektangels areal = (_____) · _____

Den anden figur: rektanglet er delt op i et lille rektangel og et kvadrat

- lille rektangels areal = _____ · _____ = _____
- kvadrats areal = _____ · _____ = _____

Tilsammen er disse to dele lig hele rektanglet:
_____ = _____

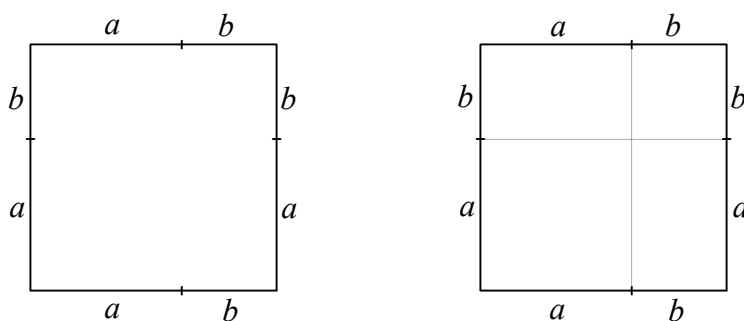
Nu har vi vist at formelen gælder for ethvert positivt tal a .
(Den gælder også for 0 og negative tal)

5. Øvelse: et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen

Tegn en passende figur og skriv et geometrisk bevis for følgende formel:

$$a \cdot (x + y + z) = a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z$$

6. Et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen



Den første figur viser et kvadrat.

For dette kvadrat er

$$\text{side} = a+b$$

så

$$\text{areal af kvadrat} = (a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2$$

Den anden figur: kvadratet er delt op i fire dele

$$\text{areal af stort del-kvadrat} = a \cdot a = a^2$$

$$\text{areal af lille del-kvadrat} = b \cdot b = b^2$$

$$\text{areal af to del-rektangler} = a \cdot b + a \cdot b = 2 a \cdot b$$

Tilsammen er disse dele lig hele kvadratet:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 a \cdot b$$

Nu har vi vist at denne ligning passer for alle positive tal a og b .
(Den gælder også for nul og negative tal).

En tidligere udgave af disse sider har skiftet adresse til http://mat1.dk/geometrisk_algebra_2010.pdf

Geometrisk algebra © 2014 Karsten Juul. Nyeste udgave af disse sider kan downloades fra mat1.dk/noter.htm. De må bruges i undervisningen hvis læreren med det samme sender e-mail om dette til kj@mat1.dk og oplyser titel og årstal samt hold, niveau, lærer og skole.