Geometrisk algebra

Der er krav om historisk forløb i matematik.
Disse sider er et historisk forløb i matematik
der er træning i at omgås formler og argumentation.

1. Hvad er geometisk algebra?

Algebra: er regler for regning med tal .
Disse regler kan formuleres som regler om bogstavudtryk.
I oldtiden blev reglerne formuleret i ord uden brug af symboler.

Geometrisk algebra: er formulering i geometrisk sprog af regler for regning med tal.

Følgende ligning er rigtig uanset hvilket tal a står for:

$$5\cdot(a+2) \;=\; 5\cdot a+10$$

I oldtiden begrundede man ofte sådanne ligninger ved hjælp af nogle geometriske figurer.
Dette foregik forskellige steder og over en lang periode.

2. Øvelse: Hvad mener vi når vi siger at en formel gælder?

Når vi påstår at ligningen

$$5\cdot(a+2) \;=\; 5\cdot a+10$$

gælder, hvad er det så vi mener? Det vil vi tydeliggøre nu:

Vi skriver hvad a skal være: a = 4

Vi udregner $5\cdot(a+2)$: Til a-tallet lægger vi 2 og får ______
Vi ganger 5 med dette resultat og får ______

Vi udregner $5\cdot a+10$: Vi ganger 5 med a-tallet og får ______
Til dette resultat lægger vi 10 og får ______

Heraf ser vi: de to sider af ligningen $5\cdot(a+2) = 5\cdot a + 10$ giver samme resultat når a = ____

Vælg selv hvad a skal være.

Vi skriver hvad a skal være: a = ______

Vi udregner $5\cdot(a+2)$: Til a-tallet lægger vi 2 og får ______
Vi ganger 5 med dette resultat og får ______

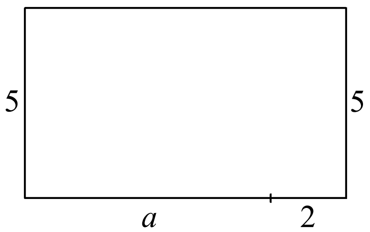
Vi udregner $5\cdot a+10$: Vi ganger 5 med a-tallet og får ______
Til dette resultat lægger vi 10 og får ______

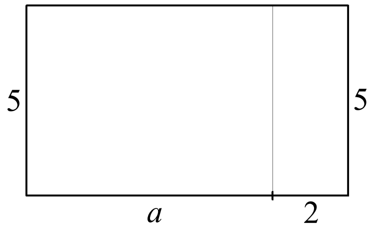
Heraf ser vi: de to sider af ligningen $5\cdot(a+2) = 5\cdot a + 10$ giver samme resultat når a = ____

Når vi siger: ligningen $5\cdot(a+2) = 5\cdot a + 10$ gælder
mener vi: de to sider af ligningen giver samme resultat uanset hvilket tal vi indsætter for a

I næste øvelse: Ved hjælp af geometrisk figur beviser vi: ligningen $5\cdot(a+2) = 5\cdot a+10$ gælder.

3. Øvelse: et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen





Hvilke af følgende påstande er sande for første rektangel ovenfor? Skriv R (rigtig) eller F (forkert).

(a) Højden er 10
(b) Højden er 5
(c) Bredden er a
(d) Bredden er $2a$
(e) Bredden er $2+a$
(f) Bredden er $a+2$
(g) Arealet er $10a$
(h) Arealet er $5\cdot a+2$
(i) Arealet er $5\cdot(a+2)$

Den anden figur er samme rektangel. Rektanglet er delt op i to del-rektangler.

(j) Areal af venstre del-rektangel = __________
(k) Areal af højre del-rektangel = __________

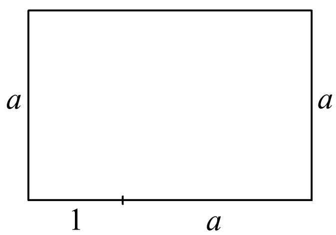
Når vi lægger arealerne af de to del-rektangler sammen, så får vi arealet af hele rektanglet, så du kan nu skrive en korrekt ligning ved at gøre sådan:

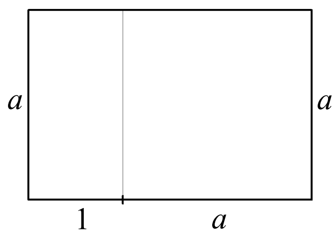
(1) Over midten af nedenstående blå linje skriver du et lighedstegn.
(2) Før lighedstegnet skriver du det af udtrykkene fra (g), (h) og (i) som er korrekt.
(3) Efter lighedstegnet skriver du de to udtryk fra (j) og (k) med et regnetegn imellem. Du må selv finde ud af hvilket af regnetegnene $+$, $-$, $\cdot$ der skal stå imellem.

Vi har altså bevist at følgende ligning gælder: ________________________________

4. Øvelse: et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen

Vi vil bevise formlen $(1+a)\cdot a = a+a^2$.





Den første figur viser et rektangel.

højde = ____
bredde = _____+_____
så
rektangels areal = (__________)·_____

Den anden figur: rektanglet er delt op i et lille rektangel og et kvadrat

lille rektangels areal = _____·_____ = _____
kvadrats areal = _____·_____ = _____

Tilsammen er disse to dele lig hele rektanglet:

_______________ = _______________

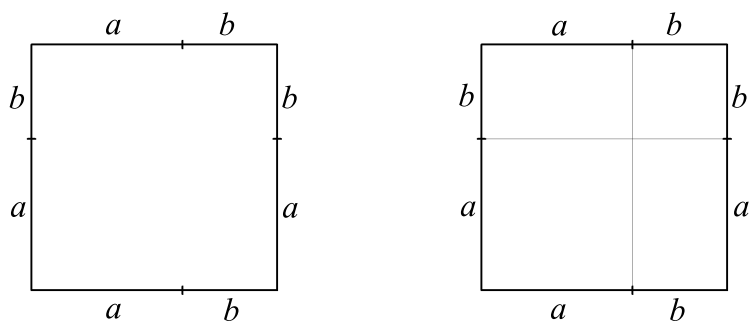
Nu har vi vist at formlen gælder for ethvert positivt tal a .
(Den gælder også for 0 og negative tal)

5. Øvelse: et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen

Tegn en passende figur og skriv et geometrisk bevis for følgende formel:

$$a \cdot (x + y + z) = a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z$$

6. Et geometrisk bevis for en formel fra bogstavregningen



Den første figur viser et kvadrat.

For dette kvadrat er

side $= a+b$

så

areal af kvadrat $= (a+b) \cdot (a+b) = \mathbf{(a+b)^2}$

Den anden figur: kvadratet er delt op i fire dele

areal af stort del-kvadrat $= a \cdot a = \mathbf{a^2}$

areal af lille del-kvadrat $= b \cdot b = \mathbf{b^2}$

areal af to del-rektangler $= a \cdot b + a \cdot b = \mathbf{2\ a \cdot b}$

Tilsammen er disse dele lig hele kvadratet:

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\ a \cdot b}$$

Nu har vi vist at denne ligning passer for alle positive tal a og b .
(Den gælder også for nul og negative tal).