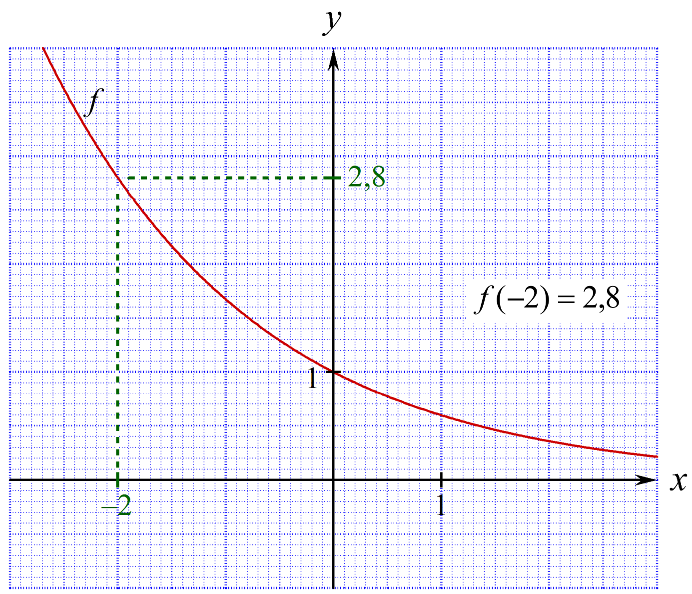
Funktioner generelt

for matematik på B-niveau i hf



2013 Karsten Juul

Funktioner generelt
for matematik på B-niveau i hf

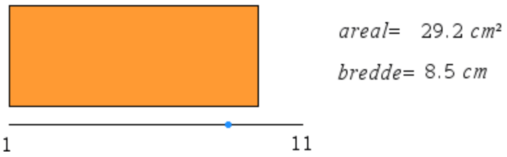
1. Funktion, forskrift, definitionsmængde

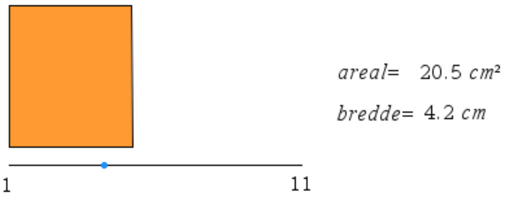
1a. Eksempel

Det orange rektangel er konstrueret i et Nspire-dokument.
Ved hjælp af skyderen kan vi ændre rektanglet.
Vi ser at der f.eks. gælder

Arealet er $29{,}2\ \text{cm}^2$ når bredden er $8{,}5$ cm

Arealet er $20{,}5\ \text{cm}^2$ når bredden er $4{,}2$ cm





1b. Funktion

Vi siger at

<u>arealet</u> er en **funktion** af <u>bredden</u>

fordi der gælder at

til hver <u>bredde</u> er der ét bestemt <u>areal</u>

1c. Forskrift

Der står at vi kan udregne arealet sådan:

Tag kvadratroden af bredden og gang 10 med resultatet.

Hvis x er bredden, kan vi skrive denne udregning sådan: $10\cdot\sqrt{x}$

$10\cdot\sqrt{x}$ er en **forskrift** for funktionen.

<u>Nspire:</u> $10\cdot\sqrt{4.2} = 20.5$

1d. Skrivemåden *f*(*x*)

Vi vælger ofte en betegnelse for forskriften, f.eks.

$f(x) = 10\cdot\sqrt{x}$

Her har vi kaldt funktionen f. I stedet kunne vi f.eks. kalde funktionen $areal$:

$areal(x) = 10\cdot\sqrt{x}$

Hvis vi kalder funktionen f, gælder:

Da $f(x) = 10\cdot\sqrt{x}$ er $f(4) = 10\cdot\sqrt{4}$ dvs. $f(4) = 20$

$f(4)$ betyder arealet når bredden er 4 cm

$f(4) = 20$ betyder arealet er $20\ \text{cm}^2$ når bredden er 4 cm

$f(x)$ læses f af x

1e. Definitionsmængde

$f(x)$ er arealet af det orange rektangel når bredden er x .

Vi kan ændre bredden, men

x kan kun være tal fra 1 til 11

Dette kan vi oplyse ved at sige

Definitionsmængden for f er intervallet $1 \le x \le 11$

Vi kan oplyse definitionsmængden ved at skrive

$f(x) = 10\cdot\sqrt{x} \quad , \quad 1 \le x \le 11$

≤ læses mindre end eller lig

<u>Eksempler på definitionsmængder:</u>

$2 < x$	alle tal der er større end 2
$2 < x < \infty$	alle tal der er større end 2
$-\infty < x < \infty$	alle tal
$0 < t \le 5$	alle tal der er større end 0 og mindre end eller lig 5

∞ læses uendelig

2. Find forskrift

2a. Angiv ••• som funktion af ***

Opgave: Vi laver rektangler hvor bredden er 8. Bestem en forskrift for arealet som funktion af højden.

Svar: Vi skal finde forskriften for en funktion $f(x)$:

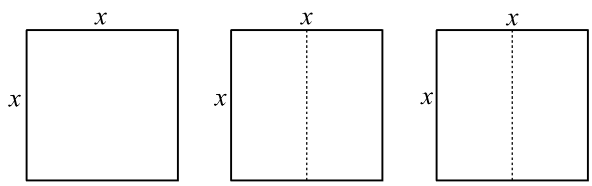
x	er <u>højden</u>	da der står	**som funktion af** <u>højden</u>
$f(x)$	er <u>arealet</u>	da der står	<u>arealet</u> **som funktion af**

Arealet $f(x)$ kan vi finde ved at gange bredden 8 med højden x, så

$$f(x) = 8 \cdot x$$

2b. Bestem rumfang som funktion af x

Opgave: Vi laver en kasse uden låg af tre kvadratiske plader med siden x. Kassens fire sider får vi ved at skære to af pladerne midt over.
Bestem kassens rumfang R som funktion af x.



Svar:

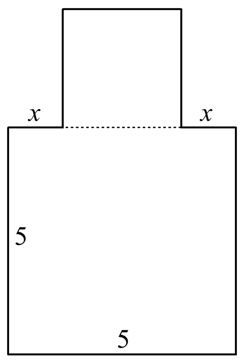
$$R(x) = \text{grundflade} \cdot \text{højde}$$

$$R(x) = x \cdot x \cdot \tfrac{1}{2}x$$

$$R(x) = \tfrac{1}{2}x^3$$

2c. Bestem areal som funktion af x

Opgave: Pladen på figuren består af to kvadrater.
Bestem pladens areal som funktion af skulderbredden x.



Svar: Lille kvadrats side er $5 - 2x$

Lille kvadrats areal er $(5-2x)^2 = 25 + 4x^2 - 20x$

Store kvadrats areal er $5^2 = 25$

Hele figurens areal $f(x)$ er

$$f(x) = 25 + 25 + 4x^2 - 20x$$

$$f(x) = 4x^2 - 20x + 50$$

3. Største og mindste værdi

3a. Bestem x så $g(x)$ er størst

Opgave: For en bestemt type figurer er arealet bestemt ved

$$g(x) = 8{,}5\sqrt{x} - 2{,}4x \quad , \quad 1 \le x \le 9$$

hvor $g(x)$ er arealet og x er højden. Bestem x så arealet er størst muligt.

Svar: Nspire bestemmer x i intervallet $1 \le x \le 9$ så $8{,}5\sqrt{x} - 2{,}4x$ er størst, og får $x = 3{,}13585$

Arealet er størst muligt når $x = 3{,}14$

Nspire: $\text{fMax}\left(8.5\cdot\sqrt{x}-2.4\cdot x,x,1,9\right) \blacktriangleright x=3.13585$

Bestemme q så $7{,}2q - 1{,}4q^2$ er størst: $\text{fMax}\left(7.2\cdot q-1.4\cdot q^2,q\right) \blacktriangleright q=2.57143$

3b. Bestem den største værdi af $g(x)$

Opgave: For en bestemt type figurer er arealet bestemt ved

$$g(x) = 8{,}5\sqrt{x} - 2{,}4x \quad , \quad 1 \le x \le 9$$

hvor $g(x)$ er arealet og x er højden. Bestem det størst mulige areal.

Svar: Nspire bestemmer x i intervallet $1 \le x \le 9$ så $8{,}5\sqrt{x} - 2{,}4x$ er størst, og får $x = 3{,}13585$
Når x har denne værdi, er arealet

$$g(3{,}13585) = 8{,}5\sqrt{3{,}13585} - 2{,}4\cdot 3{,}13585$$

$$g(3{,}13585) = 7{,}52604$$

Nspire: $\text{fMax}\left(8.5\cdot\sqrt{x}-2.4\cdot x,x,1,9\right) \blacktriangleright x=3.13585$

$8.5\cdot\sqrt{3.13585}-2.4\cdot 3.13585 = 7.52604$

Det størst mulige areal er 7,53

3c. Bestem t så $h(t)$ er mindst

Opgave: I en model er prisen for en vare fastlagt ved

$$h(t) = \frac{12{,}6}{t} + \frac{t}{15} \quad , \quad 0 < t$$

hvor $h(t)$ er prisen i kr. og t er tiden i timer. Bestem det tidspunkt hvor prisen er mindst.

Svar: Nspire bestemmer t i intervallet $0 < t$ så $\frac{12{,}6}{t} + \frac{t}{15}$ er mindst, og får $t = 13{,}7477$

Prisen er mindst på tidspunktet 13,7 timer

Nspire: $\text{fMin}\left(\frac{12.6}{t}+\frac{t}{15},t,0,\infty\right) \blacktriangleright t=13.7477$

3d. Bestem den mindste værdi af $h(t)$

Opgave: I en model er prisen for en vare fastlagt ved

$$h(t) = \frac{12{,}6}{t} + \frac{t}{15} \quad , \quad 0 < t$$

hvor $h(t)$ er prisen i kr. og t er tiden i timer. Bestem den mindst mulige pris.

Svar: Nspire bestemmer t i intervallet $0 < t$ så $\frac{12{,}6}{t} + \frac{t}{15}$ er mindst, og får $t = 13{,}7477$

Når t har denne værdi, er prisen

$$h(13{,}7477) = \frac{12{,}6}{13{,}7477} + \frac{13{,}7477}{15}$$

$$h(13{,}7477) = 1{,}83303$$

Nspire: $\text{fMin}\left(\frac{12.6}{t}+\frac{t}{15},t,0,\infty\right) \blacktriangleright t=13.7477$

$\frac{12.6}{13.7477}+\frac{13.7477}{15} = 1.83303$

Den mindst mulige pris er 1,83 kr.

4. Udregn x eller $f(x)$ når den anden er kendt

4a. Opgave: Bestem $f(\bullet\bullet\bullet)$

Opgave: En funktion f har forskriften $f(x)=x^2-x$.
Bestem $f(-2)$.

Svar: $f(x)=x^2-x$ så

$f(-2)=(-2)^2-(-2)$

$f(-2)=4+2$

$f(-2)=6$

4b. Opgave: Løs ligningen $f(x)=\bullet\bullet\bullet$

Opgave: En funktion f har forskriften $f(x)=28-3x$.
Løs ligningen $f(x)=13$.

Svar:

$f(x) = 13$

$28-3x = 13$ da $f(x)=28-3x$

$-3x = -15$

$\frac{-3x}{-3} = \frac{-15}{-3}$

$x=5$ er løsningen til ligningen $f(x)=13$

4c. Opgave: Bestem $f(\bullet\bullet\bullet)$ og forklar hvad dette tal fortæller

Opgave: Vægten af et dyr er givet ved

$$f(x)=24-22\cdot 0{,}94^x$$

hvor $f(x)$ er vægten i gram og x er alderen i uger.
Bestem $f(20)$, og forklar hvad dette tal fortæller.

Svar: $f(x)=24-22\cdot 0{,}94^x$ så

$f(20)=24-22\cdot 0{,}94^{20}$

$f(20)=17{,}6177$ udregnet på Nspire

$f(20)=17{,}6$

$f(x)$ er vægten i gram og x er alderen i uger, så tallet 17,6 fortæller at
dyrets vægt er 17,6 gram når alderen er 20 uger.

4d. Opgave: Bestem $f(x)$ når x er $\bullet\bullet\bullet$

Opgave: En funktion f har forskriften $f(x)=x+2^x$.
Bestem $f(x)$ når x er 3,1 . Dvs. bestem $f(3{,}1)$.

Svar: $f(x)=x+2^x$

Når x er 3,1 , er $f(x)$ lig $f(3{,}1)=3{,}1+2^{3{,}1}$

Nspire udregner dette: $f(3{,}1)=11{,}6742$

dvs. $f(3{,}1)=11{,}7$

På Nspire får vi denne ligning sådan:
Vi tager en kopi af den foregående ligning, højreklikker på den og vælger Attributter, Skjul input, OK og trykker på Enter.

På Nspire: Skriv 3.1 i stedet for 3,1 .

4e. Opgave: Bestem x når $f(x)$ er …

Opgave: En funktion f har forskriften $f(x) = x + 2^x$.
Bestem x når $f(x)$ er 4.

Svar: $f(x) = x + 2^x$

Vi skal finde x så: $4 = x + 2^x$

Nspire løser denne ligning mht. x og får $x = 1{,}38617$

så $x = 1{,}39$ når $f(x)$ er 4. Nspire: $\text{solve}(4=x+2^x,x) \blacktriangleright x=1.38617$

4f. Opgave hvor tekst oversættes til: Bestem $f(x)$ når x er …

Opgave: For nogle planter er $f(x) = 0{,}45 \cdot x^{2,5} + 1{,}5$
hvor $f(x)$ er vægten i gram og x er diameteren i cm.
Bestem vægten af en plante hvis diameter er 2,0 cm.

Svar:

Da	**x = diameter** og **$f(x)$ = vægt**	
kan spørgsmålet	Bestem **vægten** når **diameteren** er 2,0	
oversættes til	Bestem **$f(x)$** når **x** er 2,0	Se ramme 4d

$$f(x) = 0{,}45 \cdot x^{2,5} + 1{,}5$$

Når x er 2,0 , er $f(x)$ lig $f(2{,}0) = 0{,}45 \cdot 2{,}0^{2,5} + 1{,}5$

Nspire udregner dette: $f(2{,}0) = 4{,}04558$

dvs. vægten er 4,0 gram når diameteren er 2,0 cm.

4g. Opgave hvor tekst oversættes til: Bestem x når $f(x)$ er …

Opgave: For nogle planter er $f(x) = 0{,}45 \cdot x^{2,5} + 1{,}5$
hvor $f(x)$ er vægten i gram og x er diameteren i cm.
Bestem diameteren for en plante hvis vægt er er 5,0 gram.

Svar:

Da	**x = diameter** og **$f(x)$ = vægt**	
kan spørgsmålet	Bestem **diameteren** når **vægten** er 5,0	
oversættes til	Bestem **x** når **$f(x)$** er 5,0	Se ramme 4e

$$f(x) = 0{,}45 \cdot x^{2,5} + 1{,}5$$

Vi skal altså finde x så $5 = 0{,}45 \cdot x^{2,5} + 1{,}5$

Nspire løser denne ligning mht. x og får $x = 2{,}27165$

så diameter er 2,3 cm når vægt er 5,0 cm. Nspire: $\text{solve}(5.0=0.45\cdot x^{2.5}+1.5,x) \blacktriangleright x=2.27165$

4h. Opgaver hvor svær tekst oversættes

Opgave: For en vare gælder at $f(x) = 116000 \cdot x^{-0,8} - 12500$ hvor $f(x)$ er det gennemsnitlige overskud pr. salgssted, og x er antal salgssteder pr. kvadratkilometer.
Bestem gennemsnitligt overskud pr. salgssted når antal salgssteder pr. km^2 er 4,6.
Bestem antal salgssteder pr. km^2 når gennemsnitligt overskud pr. salgssted er 7500 kr.

Svar: Da **x = antal salgssteder pr. km^2** og **$f(x)$ = gennemsnitligt overskud pr. salgssted** får vi:

<u>Tekst:</u> Bestem **gennemsnitlig overskud pr. salgssted** når **antal salgssteder pr. km^2** er 4,6
<u>Oversat:</u> Bestem **$f(x)$** når **x** er 4,6

<u>Tekst:</u> Bestem **antal salgssteder pr. km^2** når **gennemsnitligt overskud pr. salgssted** er 7500 kr.
<u>Oversat:</u> Bestem **x** når **$f(x)$** er 7500

Når vi har oversat, bruger vi **metoden fra ramme 4d** eller **metoden fra ramme 4e** .

5. Grafer

5a. Tegn graf uden hjælpemidler

Vi vil tegne grafen for funktionen

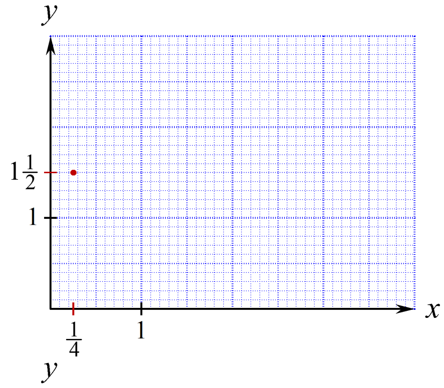
$$f(x) = 1 + \sqrt{x}\ .$$

Når vi tager x-koordinaten for et punkt på grafen og indsætter i forskriften, så får vi punktets y-koordinat

Når x er $\frac{1}{4}$, er $f(x)$ lig

$$f(\tfrac{1}{4}) \ = \ 1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}} \ = \ 1 + \tfrac{1}{2} \ = \ 1\tfrac{1}{2}$$

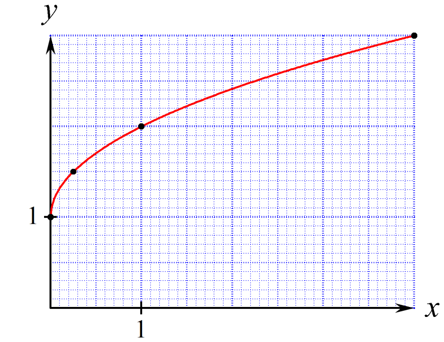
så punktet $(\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2})$ ligger på grafen for f. Se figur til højre.



På samme måde udregner vi flere støttepunkter for grafen:

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$f(x)$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3

Vi tegner disse punkter i koordinatsystemet og tegner en afrundet kurve gennem dem.



5b. Ligger punktet P på grafen?

Ligger punktet $P(4\,,15)$ på grafen for funktionen $f(x) = 80 - x^3$?

Når vi tager x-koordinaten for et punkt på grafen og indsætter i forskriften, så får vi punktets y-koordinat.

Grafpunktet med x-koordinat 4 har y-koordinat $f(4) = 80 - 4^3 = 16$ som ikke er 15, så P ligger ikke på grafen.

5c. Aflæs graf uden hjælpemidler

5d.

Vi vil aflæse tallet

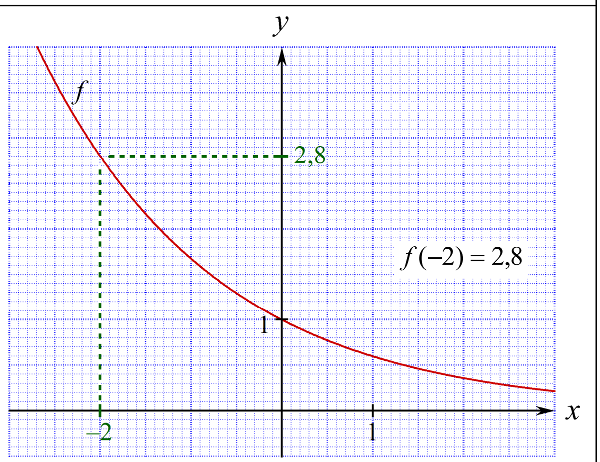
$f(-2)$

Vi gør følgende:

Vi finder det punkt på grafen hvor x er -2
Vi ser at for dette punkt er y lig 2,8

Altså er

$f(-2) = 2{,}8$



5e.

Vi vil aflæse løsningerne til ligningen

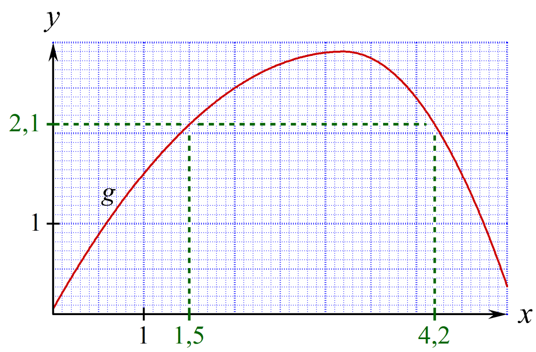
$g(x) = 2{,}1$

Vi gør følgende:

Vi finder de punkter på grafen hvor y er 2,1
Vi ser at for disse punkter er x lig 1,5 og 4,2

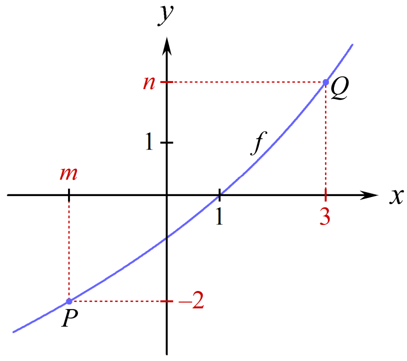
Altså er løsningerne

$x = 1{,}5$ eller $x = 4{,}2$



5f. Udregne x-koordinat eller y-koordinat når den anden er kendt

Figuren viser grafen for f som har forskriften $f(x) = 0{,}4x + 1{,}4^x - 1{,}8$.



5g. Når vi tager x-koordinaten for et punkt på grafen og indsætter i forskriften, så får vi punktets y-koordinat.

5h. Udregn n (se figur).

På figuren står at $x = 3$.

$$f(3) = n$$

$$0{,}4 \cdot 3 + 1{,}4^3 - 1{,}8 = n$$

$2{,}1440 = n$ Udregnet på Nspire

$n = 2{,}14$

5i. Udregn m (se figur).

På figuren står at $y = -2$.

$$f(m) = -2$$

$$0{,}4 \cdot m + 1{,}4^m - 1{,}8 = -2$$

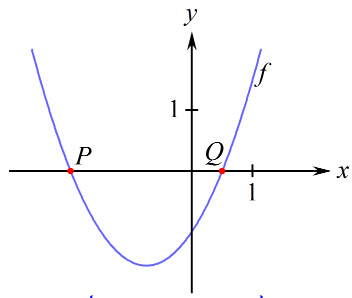
Nspire løser denne ligning mht. x og får

$m = -1{,}84417$

$m = -1{,}84$

5j. Skæringspunkter mellem graf og x-akse

Figuren viser grafen for f som har forskriften $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1$.



Når vi tager x-koordinaten for et punkt på grafen og indsætter i forskriften, så får vi punktets y-koordinat,

så når vi indsætter P's eller Q's x-koordinat x, får vi 0:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

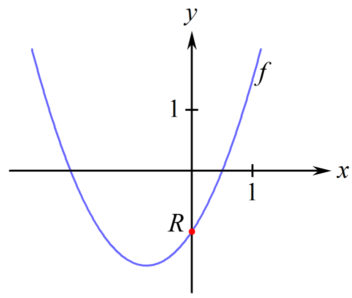
Nspire løser denne ligning mht. x og får $x = -2$ eller $x = \frac{1}{2}$.

Grafen skærer x-aksen i punkterne $(-2\,,0)$ og $(\frac{1}{2}\,,0)$.

Nspire: $\text{solve}\left(x^2+\frac{3}{2}\cdot x-1=0,x\right) \blacktriangleright x=-2 \text{ or } x=\frac{1}{2}$

5k. Skæringspunkt mellem graf og y-akse

Figuren viser grafen for f som har forskriften $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1$.



Når vi tager x-koordinaten for et punkt på grafen og indsætter i forskriften, så får vi punktets y-koordinat,

så når vi indsætter 0, får vi R's y-koordinat:

$$R\text{'s } y\text{–koordinat} = f(0)$$

$$R\text{'s } y\text{–koordinat} = 0^2 + \frac{3}{2} \cdot 0 - 1$$

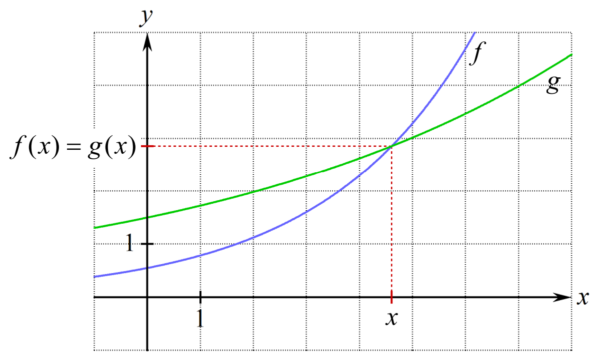
$$R\text{'s } y\text{–koordinat} = -1$$

Grafen skærer y-aksen i punktet $(0\,,-1)$.

5*l*. Skæringspunkt mellem to grafer

Figuren viser graferne for f og g som har forskrifterne

$$f(x) = 0{,}55 \cdot 1{,}43^x \quad \text{og} \quad g(x) = 1{,}50 \cdot 1{,}15^x \ .$$



Når vi tager x-koordinaten for et punkt på grafen og indsætter i forskriften, så får vi punktets y-koordinat.

Når vi indsætter x-koordinaten x til skæringspunktet, giver de to forskrifter samme y :

$$f(x) = g(x)$$

$$0{,}55 \cdot 1{,}43^x = 1{,}50 \cdot 1{,}15^x$$

Nspire løser denne ligning mht. x og får $x = 4{,}60415$.

Grafpunktet med denne x-koordinat har y-koordinaten

$$f(4{,}60415) = 0{,}55 \cdot 1{,}43^{4{,}60415}$$

$f(4{,}60415) = 2{,}85465$ Udregnet på Nspire

Skæringspunktet er $(4{,}60\,,\ 2{,}85)$.

Nspire: $\text{solve}\left(0.55\cdot(1.43)^x=1.5\cdot(1.15)^x,x\right) \blacktriangleright x=4.60415$

$0.55\cdot(1.43)^{4.60415} = 2.85465$

6. Opgave hvor tekst oversættes til: Bestem x så $f(x) = g(x)$

6a. Opgave hvor tekst oversættes til: Bestem x så $f(x) = g(x)$:

Opgave: Vægten af to orme M og N er givet ved

$$m(t) = 1{,}7 + 0{,}11t \quad \text{og} \quad n(t) = 9{,}4 - 6{,}5 \cdot 0{,}98^t$$

hvor $m(t)$ og $n(t)$ er vægt i gram af M og N, og t er antal døgn efter hudskifte.
Hvilket antal døgn efter hudskifte er vægten af M og N den samme?

Svar: At vægten af M og N er den samme på tidspunktet t kan skrives sådan:

$$m(t) = n(t)$$

$$1{,}7 + 0{,}11t = 9{,}4 - 6{,}5 \cdot 0{,}98^t$$

Nspire løser denne ligning mht. t for $t > 0$ og får $t = 47{,}2528$.

Vægten af M og N er den samme 47 døgn efter hudskifte.

Nspire: $\text{solve}\left(1.7+0.11\cdot t=9.4-6.5\cdot (0.98)^t, t\right)|0<t \;\blacktriangleright\; t=47.2528$

7. Udregne ændring i x eller $f(x)$

7a. Opgave hvor vi udregner ændring i $f(x)$

Opgave: Mængden af vand i en beholder kan beskrives ved

$$f(x) = -0{,}1x^2 - 0{,}4x + 9{,}6$$

hvor $f(x)$ er vandmængden målt i liter, og x er antal minutter efter start.
Bestem ændringen i vandmængden i tidsrummet fra 2 til 5 minutter efter start.

Svar: 2 minutter efter start er vandmængden $f(2) = -0{,}1\cdot 2^2 - 0{,}4\cdot 2 + 9{,}6 = 8{,}4$

5 minutter efter start er vandmængden $f(5) = -0{,}1\cdot 5^2 - 0{,}4\cdot 5 + 9{,}6 = 5{,}1$

Ændring i vandmængden: $f(5) - f(2) = 5{,}1 - 8{,}4 = -3{,}3$

Vandmængden aftager 3,3 liter i tidsrummet fra 2 til 5 minutter efter start.

7b. Opgave hvor vi udregner ændring i x

Opgave: Mængden af vand i en beholder kan beskrives ved

$$f(x) = -0{,}1x^2 - 0{,}4x + 9{,}6$$

hvor $f(x)$ er vandmængden målt i liter, og x er antal minutter efter start.
Hvor lang tid er vandmængden om at falde fra 3 til 0 liter.

Svar: Tidspunkt x hvor vandmængden er 3:

$$f(x) = 3$$

$$-0{,}1x^2 - 0{,}4x + 9{,}6 = 3$$

Nspire løser denne ligning mht. x for $x > 0$ og får $\mathbf{x = 6{,}3666}$.

Tidspunkt x hvor vandmængden er 0:

$$f(x) = 0$$

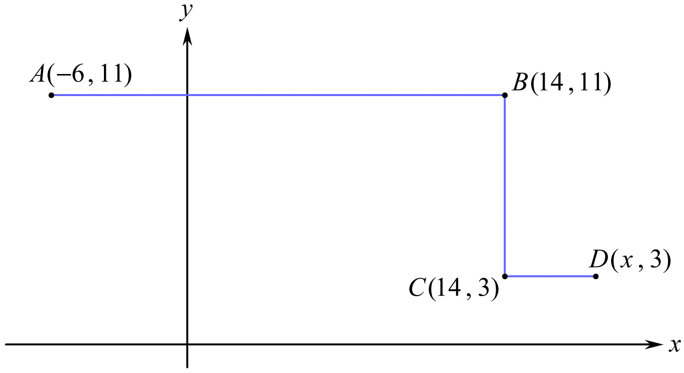
$$-0{,}1x^2 - 0{,}4x + 9{,}6 = 0$$

Nspire løser denne ligning mht. x for $x > 0$ og får $\mathbf{x = 8}$.

$$8 - 6{,}3666 = 1{,}6334$$

Vandmængden er 1,6 minutter om at falde fra 3 til 0 liter.

8. Graf og længde af linjestykke



8a. Længde af *AB*

AB er parallel med *x*-aksen, så vi skal bruge *x*-koordinaterne. Da *B* ligger længere til højre end *A*, skal 14 stå før minustegnet:

$$|AB| = 14 - (-6) = 20$$

8b. Længde af *BC*

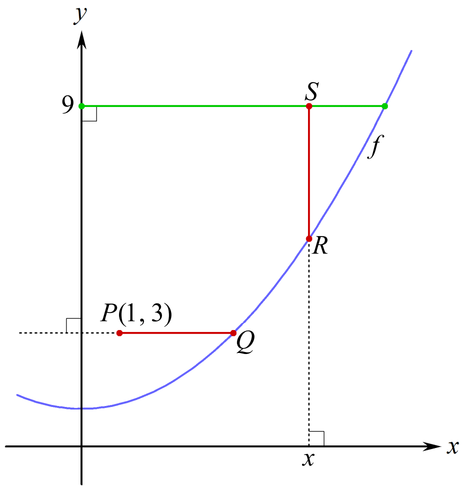
BC er parallel med *y*-aksen, så vi skal bruge *y*-koordinaterne. Da *B* ligger længere oppe end *C*, skal 11 stå foran minustegnet:

$$|BC| = 11 - 3 = 8$$

8c. Længde af *CD*

$$|CD| = x - 14$$

Grafen for $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$ er på figuren.



8d. Længde af *PQ*

Q's y-koordinat er 3. Med metoden 5i udregner vi Q's x-koordinat x:

$$f(x) = 3$$
$$\tfrac{1}{8}x^2 + 1 = 3$$
$$\tfrac{1}{8}x^2 = 2$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4 \qquad \text{da } x > 0$$
$$|PQ| = 4 - 1 = 3$$

8e. Længde af *RS*

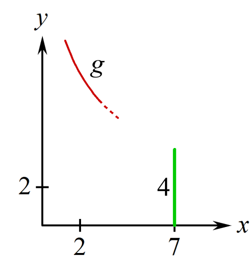
Med metoden 5g ser vi at R's y-koordinat er $\frac{1}{8}x^2 + 1$, så

$$|RS| = 9 - (\tfrac{1}{8}x^2 + 1) = 8 - \tfrac{1}{8}x^2$$

8f. Opgave

$$g(x) = \frac{30+x}{x+2}$$

Figuren viser lidt af grafen for *g* og et grønt linjestykke hvis højde er 4.
Rammer grafen det grønne linjestykke?

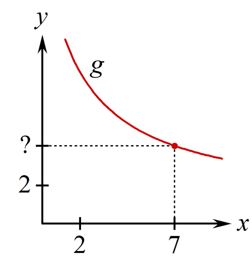


Svar

Vi ser på det punkt på grafen hvor *x* er 7.
Vi udregner dette punkts *y*-koordinat: (metode 5g-5h)

$$g(7) = y$$
$$\frac{30+7}{7+2} = y$$
$$4{,}11 = y$$

y-koordinaten er større end 4, så
grafen rammer ikke det grønne linjestykke.



9. Øvelser

Øvelse 1.1 (a) Læs ramme 1a på side 1. (b) Hvis vi ændrer bredden fra 4,2 cm til 8,5 cm, bliver arealet så større eller mindre? Svar: ______

Øvelse 1.2 (a) Læs ramme 1c på side 1. (b) Hvis bredde er 9, er areal ______ cm^2 .

(c) Hvis bredde er 9, er højde ______ cm .

Øvelse 1.3 (a) Læs ramme 1d på side 1. (b) $f(9)$ betyder ______ og er ______ . (c) $f(x)$ betyder ______ og er ______ .

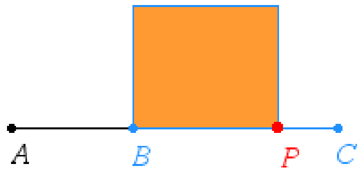
(d) $f($ ______ $)=10$. (e) $f($ ______ $)=\frac{20}{3}$.

Øvelse 1.4 En stang fås i længder fra 5 til 15 cm. Når længden er x, er vægten målt i gram lig $g(x)=1{,}5x$.

(a) $g(8)$ betyder ______ og er ______ (se 1d).

(b) Læs ramme 1e på side 1. (c) Definitionsmængden for g er intervallet ______ . (d) $g($ ______ $) = 9$.

Øvelse 1.5 Billedet viser en interaktiv figur i et Nspire-dokument. $|AB|=3$ og $|BC|=5$. Punktet P kan trækkes frem og tilbage på linjestykket BC . Arealet af den orange figur er en funktion af afstanden fra A til P . Når afstanden er x , er arealet $f(x)=3x-9$.



(a) $f(7)$ betyder ______ og er ______ .

(b) Læs ramme 1e side 1. (c) Definitionsmængden for f er intervallet ______ . (d) $f($ ______ $) = 1{,}5$.

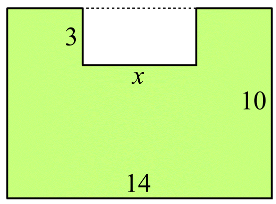
Øvelse 2.1 (a) Læs ramme 2a på side 2. (b) Vi ser på alle rektangler hvor højden er lig 2 gange bredden. Arealet som funktion af bredden er en funktion $f(x)$ hvor x er ______ og $f(x)$ er ______ .

(c) Forskriften er $f(x)=$ ______ $=$ ______ , og definitionsmængden er intervallet ______ .

(d) Omkredsen som funktion af bredden er en funktion $g(x)$ hvor x er ______ og $g(x)$ er ______ .

(e) Forskriften er $g(x)=$ ______ $=$ ______ , og definitionsmængden er intervallet ______ . (f) $f(4)=$ ______ . (g) $g(4)=$ ______ . (h) $f($ ______ $) = 50$.

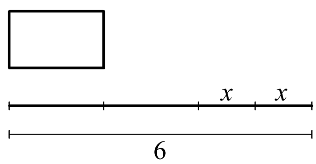
Øvelse 2.2 Figuren er fremkommet ved at fjerne et lille rektangel fra et større rektangel. (a) Bestem arealet $f(x)$ som funktion af x .



$f(x)=$ ______ $=$ ______ .

(b) $f(5)=$ ______ . (c) $f($ ______ $) = 113$.

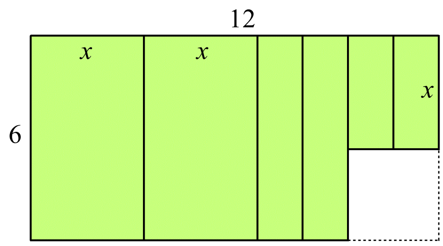
Øvelse 2.3 På figuren er vist en metalramme der har form som et rektangel. Desuden er der en metalstang der er skåret i fire stykker. Rammen er lavet af de fire stykker. (a) Bestem rektanglets areal $f(x)$ som funktion af x .



$f(x)=$ ______ $=$ ______ $=$ ______ .

(b) $f(1)=$ ______ . (c) Definitionsmængden er intervallet ______ .

Øvelse 2.4 Vi laver en kasse af seks sideflader som vi skærer ud af en rektangulær plade der er 6 enheder bred og 12 enheder lang. Se figur. Bestem kassens rumfang $R(x)$ som funktion af x .



$R(x)=$ ______ $=$ ______ $=$ ______ .

Øvelse 3.1 I et spil ændres et områdes areal sådan at $p(t) = t^3 - 33t^2 + 255t + 500$, $0 \le t \le 22$
hvor $p(t)$ er arealet i m^2, og t er antal minutter efter spillets start.

(a) Læs ramme 3a. (b) Arealet er størst ______ minutter efter spillets start.

(c) Læs ramme 3b. (d) Når arealet er størst, er det ______ m^2.

(e) Læs ramme 3c. (f) Arealet er mindst ______ minutter efter spillets start.

(g) Læs ramme 3d. (h) Når arealet er mindst, er det ______ m^2.

Øvelse 3.2 For nogle klodser er overfladen $O(x) = 18x - 0{,}06x^3 + \sqrt{x^2+1}$, $1 < x < 17$,
når højden er x. Overfladen er størst mulig når $x =$ ______ .

Øvelse 3.3 For en afrikansk gnaver gælder at $f(x) = 0{,}012x^3 - 0{,}78x^2 - 11x + 1500$, $0 \le x \le 80$,
hvor $f(x)$ er antallet af individer, og x er antal dage efter en skovbrand.
Antallet af individer er ______ på det tidspunkt hvor det er mindst.

Øvelse 3.4 Ved fremstilling af en vare er omkostningen $f(x) = 2x^3 - 51x^2 + 360x$, $6 \le x \le 15$,
hvor $f(x)$ er omkostningen i kr. og x er varens vægt i gram.
Når vægten er ______, er omkostningen mindst mulig.

Øvelse 3.5 Omkostningerne ved at fremstille en vare er $f(x) = 1{,}2x^3 - 47x^2 + 792x + 510$, $5 < x < 31$,
hvor $f(x)$ er omkostningerne (i kr.), og x er mængden (i kg) der blev fremstillet den pågældende dag.
Omkostningen pr. kg er givet ved $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Omkostning pr. kg er mindst når mængden er
______ kg, og denne mindste omkostning pr. kg er ______ kr. pr. kg.

Øvelse 3.6 Hvis der fremstilles x enheder, er omkostningerne $f(x) = x^3 - 6x^2 + 70x + 650$, $5 \le x \le 30$.
Fortjenesten er $g(x) = 1150x - 14x^2 - f(x)$, $5 \le x \le 30$. ($f(x)$ og $g(x)$ måles i en speciel enhed).
Fortjenesten er størst når $x =$ ______, og denne største fortjeneste er ______ .

Øvelse 4.1 (a) Læs ramme 4a side 4.

(b) Når $f(x) = 7 - 3x$ er

$f(2) =$ ______
$f(2) =$ ______

(c) Når $f(x) = 2x + 2^x + 2x^2$ er

$f(3) =$ ______
$f(3) =$ ______
$f(3) =$ ______

(d) Når $f(x) = \dfrac{20}{x} + \sqrt{20 - x}$ er

$f(4) =$ ______
$f(4) =$ ______
$f(4) =$ ______

Øvelse 4.2 (a) Når $f(x) = 10 - 3^x$ er $f(0) =$ ______ og $f(1) =$ ______ og $f(2) =$ ______ .
(b) Når $g(x) = 2 \cdot x^3$ er $g(0) =$ ______ og $g(1) =$ ______ og $g(2) =$ ______ .

Øvelse 4.3 (a) Læs ramme 4b side 4.

(b) $f(x) = 2x^2$
Løs $f(x) = 18$

______ $= 18$
______
$x =$ ______ eller $x =$ ______
$x =$ ______ eller $x =$ ______

(c) $g(x) = 5x^3$
Løs $g(x) = 40$

______ $= 40$
______
$x =$ ______
$x =$ ______

(d) $h(x) = -4x + 11$
Løs $h(x) = 5$

______ $= 5$
______
______
$x =$ ______

Øvelse 4.4 $f(x) = 6x - 9$ (a) Bestem $f(-3)$ (b) Løs $f(x) = -3$

Øvelse 4.5 (a) Læs ramme 4c på side 4.
(b) For en vare er $f(x)$ prisen i kr. og x er længden i cm.
Det er oplyst at $f(10) = 25$. Hvad fortæller dette om varen?
Svar:

Øvelse 4.6 For en type slanger er $g(x)$ alderen i år og x er tykkelsen i mm.
Det er oplyst at $g(5) = 3$. Hvad fortæller dette om denne type slanger?
Svar:

Øvelse 4.7 Vi stiller en kande te på bordet. $h(x)$ er teens temperatur efter x minutter.
Det er oplyst at $h(45) = 40$. Hvad fortæller dette om teen?
Svar:

Øvelse 4.8 $f(x) = \frac{8}{x} - x^2$ (a) Læs rammerne 4d og 4e.
(b) Bestem $f(x)$ når x er 15,2 .
(c) Bestem x når $f(x)$ er 2,5 .

Øvelse 4.9 $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$ (a) Læs rammerne 4d og 4e.
(b) Bestem x når $g(x)$ er 6 .
(c) Bestem $g(x)$ når x er 1 .

Øvelse 4.10 Forestil dig at du har fået en forskrift for hver af følgende funktioner:

$f(x)$ = udgift i kr. til el når man har brugt x kWh.
$g(x)$ = antal elever på en skole x år efter 2000.
$h(x)$ = temperaturen i en beholder når trykket er x hPa.
$i(x)$ = antal dage efter fødslen når dyrets vægt er x gram.
$j(x)$ = træets diameter i cm når dets højde er x.

Opgaven i ramme 4f kan oversættes til "Bestem $f(x)$ når x er 2,0", og opgaven i ramme 4g kan oversættes til "Bestem x når $f(x)$ er 5,0". Oversæt hver af følgende opgaver.

(a) Bestem udgiften til el når man har brugt 3000 kWh.
(b) Bestem tidspunktet hvor der er 500 elever på skolen.
(c) Bestem trykket i en beholder når temperaturen er 42 grader.
(d) Hvor mange dage efter fødslen er dyrets vægt 37 gram?
(e) Hvor højt er træet når diameteren er 40 cm?

Øvelse 4.11 (a) Læs ramme 4h. (b) For nogle krybdyr er $P(u) = 0{,}5 \cdot u \cdot 1{,}06^u$ hvor $P(u)$ er forholdet mellem antal rygtakker og ryggens længde i cm når det gennemsnitlige antal æg pr. kuld er u. Bestem det gennemsnitlige antal æg pr. kuld for et dyr hvor forholdet mellem antal rygtakker og ryggens længde i cm er 1,5.

Øvelse 4.12 For nogle planter er $T(h) = 2{,}4 \cdot h^{0{,}9}$ hvor $T(h)$ er tiden der er gået siden væksten begyndte (målt i uger), og h er højdetilvæksten efter at væksten begyndte (målt i cm). Hvornår er planten 20 cm højere end da væksten begyndte?

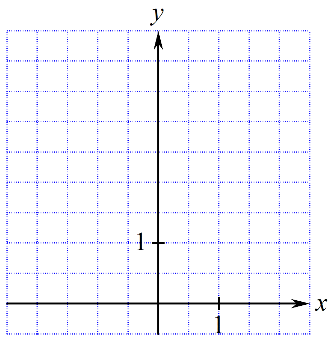
Øvelse 5.1 $f(x) = 2^x$. $f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(a) $f(-2) = 2^{-2} = \boxed{} = \boxed{}$ (b) $f(-1) = 2^{-1} = \boxed{} = \boxed{}$

(c)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

(d) Læs ramme 5a, og tegn grafen for f.

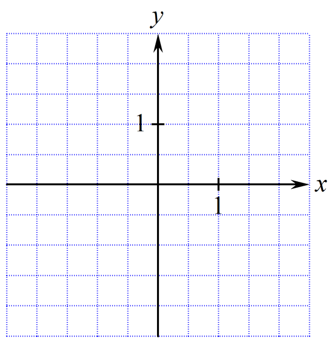


Øvelse 5.2 $g(x) = \frac{1}{4}x^3$.

(a)

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

(b) Læs ramme 5a, og tegn grafen for g .



Øvelse 5.3 (a) Læs ramme 5b. (b) Ligger punktet $P(4\,,16)$ på grafen for $g(x) = \frac{1}{4}x^3$? Svar: $\boxed{}$

Mellemregning:

Øvelse 5.4 (a) Læs ramme 5c.

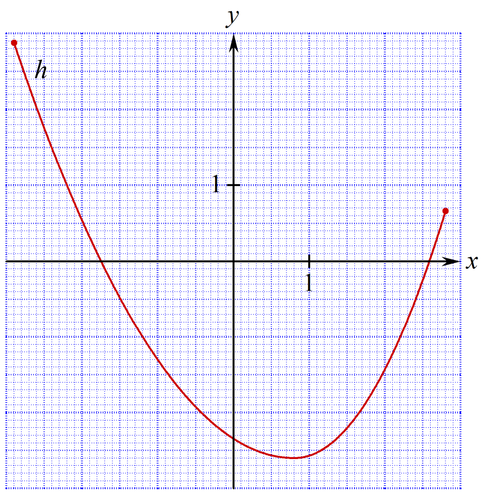
(b) Bestem $h(-2{,}4)$ $\boxed{}$

(c) Bestem $h(1{,}5)$ $\boxed{}$

(d) Bestem $h(-0{,}7)$ $\boxed{}$

(e) Løs $h(x) = -1$ $\boxed{}$

(f) Løs $h(x) = 1$ $\boxed{}$



Øvelse 5.5 Punkterne P, Q, R og S ligger på grafen for funktionen $f(x) = \frac{30}{x} - 4$.

(a) Læs ramme 5f. (b) $P(\boxed{}\,,\ 6)$, $Q(6\,,\boxed{})$, $R(2\,,\boxed{})$, $S(\boxed{}\,,\ -6)$.

Øvelse 5.6 $g(x)=8-2^x$

(a) Grafpunktet med x-koordinat 2 har y-koordinat $\boxed{}$.

(b) Grafpunktet med x-koordinat 0 har y-koordinat $\boxed{}$.

(c) Grafpunktet med y-koordinat 6 har x-koordinat $\boxed{}$.

(d) Grafpunktet med y-koordinat 0 har x-koordinat $\boxed{}$.

(e) Grafen skærer x-aksen i punktet $\boxed{}$.

(f) Grafen skærer y-aksen i punktet $\boxed{}$.

Øvelse 5.7 $f(x)=\frac{x-1}{2}$ $g(x)=\frac{10}{x}$

I f-grafens punkt med $x=4$ er $y=\boxed{}$. $f(4)=\boxed{}$.

I g-grafens punkt med $x=4$ er $y=\boxed{}$. $g(4)=\boxed{}$.

I f-grafens punkt med $x=5$ er $y=\boxed{}$. $f(5)=\boxed{}$.

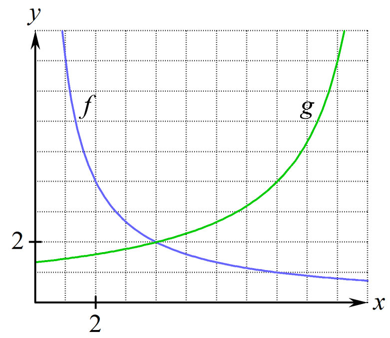
I g-grafens punkt med $x=5$ er $y=\boxed{}$. $g(5)=\boxed{}$.

Tallet $x=\boxed{}$ er en løsning til ligningen $f(x)=g(x)$.

Øvelse 5.8 Se figuren til højre.

(a) $g(10)=\boxed{}$ (b) $f(\boxed{})=8$

(c) $f(\boxed{})=g(8)$ (d) $f(\boxed{})=g(4)$



Øvelse 5.9

$f(x)=9-x^2$ $g(x)=x^3$

(a) Læs ramme 5*l*.

(b) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem graferne for f og g .

$\boxed{}$

Øvelse 6.1 $b(x)$ er pris i kr. for at køre x km i en blå bil, og $g(x)$ er pris i kr. for at køre x km i en grøn bil. I ramme 6 oversættes spørgsmålet om ormes vægt til følgende matematiske spørgsmål: ”Løs ligningen $m(t)=n(t)$”. Oversæt følgende spørgsmål om priser til matematiske spørgsmål:

(a) Hvor mange km skal vi køre i en blå bil for at prisen er den samme som prisen for at køre 10 km i en grøn bil? $\boxed{}$

(b) Hvor mange km skal vi køre i en grøn bil for at prisen er 100 kr.? $\boxed{}$

(c) Hvor mange km skal vi køre for at prisen for at køre i en blå bil er den samme som prisen for at køre i en grøn bil? $\boxed{}$

Øvelse 6.2 I denne opgave er $f(x)=x\cdot(6{,}5+7{,}2\cdot 0{,}99^x)$ og $g(x)=5{,}9\cdot x+500$. Hvis vi fremstiller x gram af en vare, så er udgiften i kr. $f(x)$ hvis vi bruger maskine A, og $g(x)$ hvis vi bruger maskine B. Hvor mange gram skal vi fremstille for at maskine A og maskine B giver samme udgift? Svar: $\boxed{}$ gram.

Øvelse 7.1 $f(x)=10x-x^2$. (a) Når $x=2$ er $f(x)=\boxed{}$. (b) Når $x=5$ er $f(x)=\boxed{}$.

(c) Når vi ændrer x fra 2 til 5 vil $f(x)$ blive $\boxed{}$ enheder større. (d) $f(5)-f(2)=\boxed{}$.

(e) Når vi ændrer x fra 6 til 8, så vil $f(x)$ blive $\boxed{}$ enheder mindre. (f) $f(8)-f(6)=\boxed{}$.

Øvelse 7.2 $f(x) = 22 - \frac{12}{x}$. (a) Når $f(x) = 10$ er $x =$ $\square$. (b) Når $f(x) = 20$ er $x =$ $\square$.

(c) Når $f(x)$ ændres fra 10 til 20, er x blevet $\square$ enheder større.

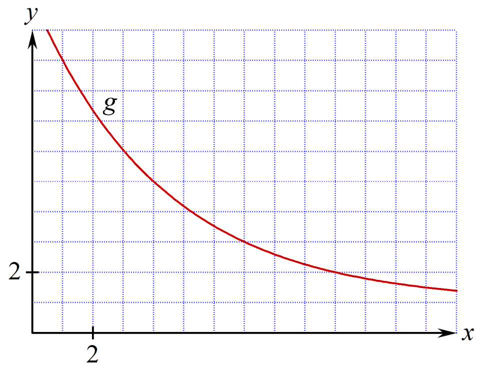
(d) Når $f(x)$ ændres fra 20 til 21, er x blevet $\square$ enheder større.

Øvelse 7.3 Se figuren til højre.

(a) Nu er $x = 1$. Hvis x gøres 6 enheder større, så vil $g(x)$ blive $\square$ enheder mindre.

(b) x bliver $\square$ enheder større når $g(x)$ aftager fra 3 til 1,5 .

(c) $g(10) - g(4) =$ $\square$.



Øvelse 7.4 Vægten af nogle kegler er $v(d) = 10d^2$ hvor $v(d)$ er vægten i gram, og d er grundfladens diameter i cm. (a) En lille kegle vejer 1690 gram. En stor kegle vejer 1200 gram mere. Hvor mange cm er den store kegles diameter større end den lille kegles diameter. Svar: $\square$ cm . (b) Hvor stor forskel er der på vægten af to af keglerne hvis grundfladers diametre er 14 cm og 15 cm? Svar: $\square$ cm.

(c) $v(15) - v(14) =$ $\square$.

Øvelse 7.5 En plantes højde er $h(t) = 0{,}4t + 0{,}05t^{1{,}2}$ hvor $h(t)$ er højden i cm og t er antal dage efter udplantningen.

(a) Hvor lang tid er en plante om at vokse fra 10 cm til 20 cm? Svar: $\square$ dage.

(b) $h(100) - h(50) =$ $\square$ og dette tal fortæller at $\square$

$\square$.

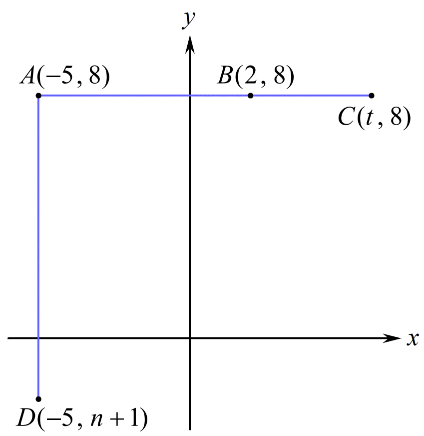
Øvelse 8.1

(a) Læs 8a, 8b, 8c.

(b) $|AB| =$ $\square$ $=$ $\square$.

(c) $|AC| =$ $\square$.

(d) $|AD| =$ $\square$ $=$ $\square$.



Øvelse 8.2

(a) Læs 8d, 8e.

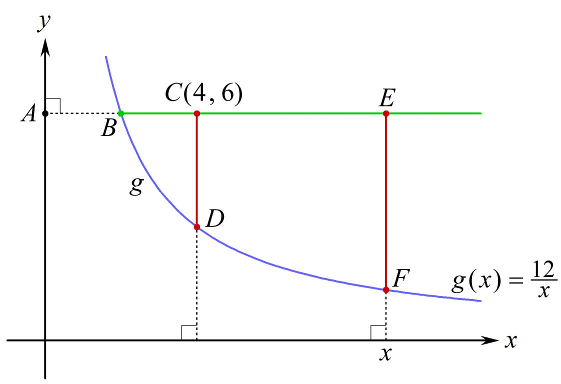
(b) $A =$ $\square$.

(c) $B =$ $\square$.

(d) $D =$ $\square$.

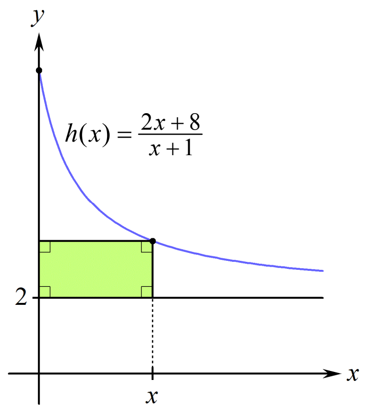
(e) $|CD| =$ $\square$.

(f) $|EF| =$ $\square$.



Øvelse 8.3

Bestem arealet af det grønne rektangel som funktion af x .



Øvelse 8.4

(a) Læs 8f.

(b) Afgør ved udregning om grafen for $f(x) = 1{,}4x^2 + 2{,}7x + 5{,}1$ har et punkt fælles med det lodrette linjestykke med endepunkter $A(6,71)$ og $B(6,72)$.

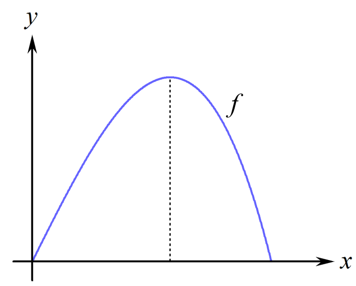
Øvelse 8.5

Figuren viser en gavl.
Gavlens form kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 2x - 0{,}05x^3 \ .$$

(a) Udregn gavlens bredde.

(b) Udregn gavlens højde.



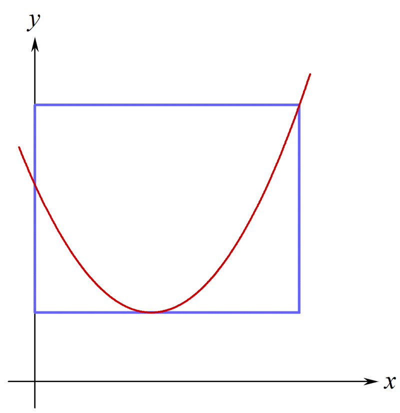
Øvelse 8.6

Figuren viser et rektangel og grafen for funktionen

$$g(x) = 0{,}5x^2 - 2{,}2x + 3{,}72 \ .$$

Rektanglets bredde er 5.

Udregn rektanglets omkreds.



Øvelse 8.7

Figuren viser et kvadrat og grafen for

$$h(x) = 4 - x^2 \ .$$

Udregn kvadratets areal.