# Forløb om beviser vedr. vektorer og koordinatgeometri i planen



## Øvelse 1

Når $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}$ , $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ er

$$\vec{a}+\vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \quad \text{så}$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} \;=\; \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \qquad = \qquad =$$

og

$$\vec{a}\cdot\vec{c} \;=\; \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \qquad =$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} \;=\; \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \qquad =$$

så $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} \;=\; \qquad + \qquad =$

Vi har nu bevist at der for ethvert tal $k$ gælder at når $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\k\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, er

$$\left( \qquad \vec{b}\right)\cdot \qquad = \; \vec{a}\cdot\vec{c} \; +$$

fordi de to indrammede udtryk er ens. (Det er dig der har skrevet de to udtryk, så det er dig der skal sørge for at der er ramme om).

## Øvelse 2

Brug dine erfaringer fra øvelse 1 til at skrive et bevis for at

når $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ og $\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ , er $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w} \;=\; \qquad \cdot\vec{w} \;+$

Du skal altså skrive noget der er næsten magen til det du skrev i øvelse 1, blot med andre koordinater. Der er ikke plads på denne side.

## Øvelse 3

Når $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ og $t$ er et tal, er

$$t\vec{c} \;=\; t\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \left(t\vec{c}\right)\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad =$$

og

$$\vec{c}\cdot\vec{e} \;=\; \qquad = \qquad \text{og} \quad t\left(\vec{c}\cdot\vec{e}\right) =$$

Vi har nu bevist at når $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ og $t$ er et tal, er

$$\left( \qquad \right)\cdot\vec{e} \;=\; t\left( \qquad \right)$$

fordi de to indrammede udtryk er ens.

## Øvelse 4

Brug dine erfaringer fra de foregående øvelser til at skrive et bevis for at

når $t$ er et tal, og $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vektorer, så er $\left(t\vec{a}\right)\cdot\vec{b} \;=\; t\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ .

## Øvelse 5

Når $\vec{u} = \begin{pmatrix} h \\ 3 \end{pmatrix}$ , er $\vec{u} \cdot \vec{u} =$ $\qquad$ $=$

og $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\qquad\qquad} = \sqrt{\qquad\qquad}$ , så $\left|\vec{u}\right|^2 =$

Vi har nu bevist at for ethvert tal $h$ gælder at når $\vec{u} = \begin{pmatrix} h \\ 3 \end{pmatrix}$ , er $\vec{u} \cdot \vec{u} = \left|\quad\right|^2$,

da de to indrammede udtryk er ens.

## Øvelse 6

Brug dine erfaringer fra de foregående øvelser til at skrive et bevis for at for enhver vektor $\vec{a}$ er $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$ .

## Øvelse 7

Der gælder $\left(8\vec{a} + \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = \left(8\vec{a}\right) \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ ifølge formlen $\qquad$ som vi beviste i øvelse nr. $\quad$ .

## Øvelse 8

Der gælder $\left(4\vec{u}\right) \cdot \vec{u} = 4\left(\vec{u} \cdot \vec{u}\right)$ ifølge formlen $\qquad$ som vi beviste i øvelse nr. $\quad$ .

## Øvelse 9

Der gælder $3\left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right) = 3\left|\vec{b}\right|^2$ ifølge formlen $\qquad$ som vi beviste i øvelse nr. $\quad$ .

## Øvelse 10

Hvis $t = -3$ , vil længden af $t\vec{v}$ være $\quad$ gange længden af $\vec{v}$ .

Skriv dette som en ligning (med symboler):

For ethvert tal $k$ gælder at vi får længden af $k\vec{a}$ ved at gange længden af $\vec{a}$ med $\quad$ , så

$\left|(n+2)\vec{a}\right| = \qquad \left|\vec{a}\right|$ og $\left|\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{7}\vec{a}\right| = \qquad \left|\vec{a}\right|$ .

## Øvelse 11

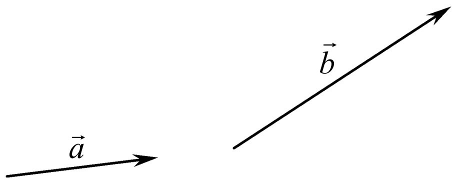
$\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{u}$ ,
$\vec{b}$ danner en vinkel på $45°$ med $\vec{u}$ ,
$\vec{c}$ er parallel med $\vec{u}$ men har modsat retning,
$\vec{d}$ er parallel med $\vec{u}$ og har samme retning som $\vec{u}$ .

Hvilke af vektorerne $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ , $\vec{d}$ og $\vec{o}$ kan vi få frem ved at gange $\vec{u}$ med et tal.

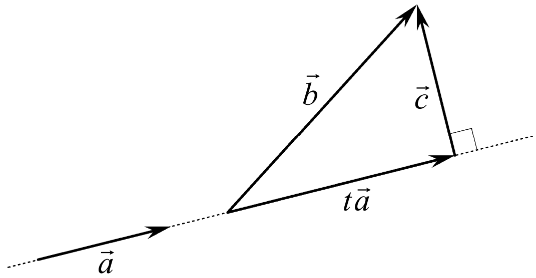
Når $\vec{v}$ ikke er nulvektor, hvilke vektorer kan vi så skrive på formen $t\vec{v}$ ?

## Øvelse 12

Tegn $\vec{b}_{\vec{a}}$ .




## Øvelse 13 Se figuren til højre.




Projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er en vektor der er $\vec{o}$ eller $\boxed{\qquad\qquad}$ med $\vec{a}$ , så vi kan få projektionen frem ved at $\boxed{\qquad\quad}$ $\vec{a}$ med $\boxed{\qquad\quad}$ :

$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$

Når $\vec{c}$ er vektoren på figuren, er

$$\vec{b} = t\vec{a}\boxed{\phantom{+}}\vec{c}$$

Begge sider i denne ligning $\boxed{\qquad\qquad}$ vi med $\boxed{\quad}$ og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = (t\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{a}$$

Højre side i denne ligning omskriver vi ved hjælp af formlen $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$, som vi beviste i øvelse $\boxed{\quad}$, og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = (t\vec{a})\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a}$$

Første led på højre side i denne ligning omskriver vi ved hjælp af formlen $\boxed{\qquad\qquad}$, som vi beviste i øvelse $\boxed{\quad}$. Andet led er lig $\boxed{\quad}$ da $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

I alt får vi:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = t(\vec{a}\cdot\vec{a}) + 0$$

Indholdet af parentesen omskriver vi ved hjælp af formlen $\boxed{\qquad\qquad}$ som vi beviste i øvelse $\boxed{\quad}$, og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = t|\vec{a}|^2$$

Begge sider i denne ligning $\boxed{\qquad\qquad}$ vi med $\boxed{\quad}$ og får:

$$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2} = t$$

Vi indsætter dette udtryk for $t$ i ligningen

$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$ ← Denne formel skrev du en begrundelse for i starten af denne øvelse.

og får:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \boxed{\qquad}\,\vec{a}$$

Dette er <u>formlen til at udregne projektionen af en vektor</u>.

Af denne får vi:

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = \left|\boxed{\qquad}\,\vec{a}\right|$$

Højresiden i denne ligning omskriver vi ved hjælp af reglen fra øvelse 10 og får

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = \boxed{\qquad\qquad}$$

som vi omskriver til

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = \frac{\boxed{\qquad}}{|\vec{a}|^2}|\vec{a}|$$

Vi forkorter med $|\vec{a}|$ og får <u>formlen til at udregne længden af en vektors projektion</u>:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

## Øvelse 14

Linjen $l$ er vinkelret på vektoren $\vec{n}$
og går gennem punktet $P_0$ .

(a) Ligger $P_1$ på $l$ ?

(b) Er $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}=0$ ?

(c) Ligger $P_2$ på $l$ ?

(d) Er $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}=0$ ?

(e) Ligger $P_3$ på $l$ ?

(f) Er $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_3}=0$ ?

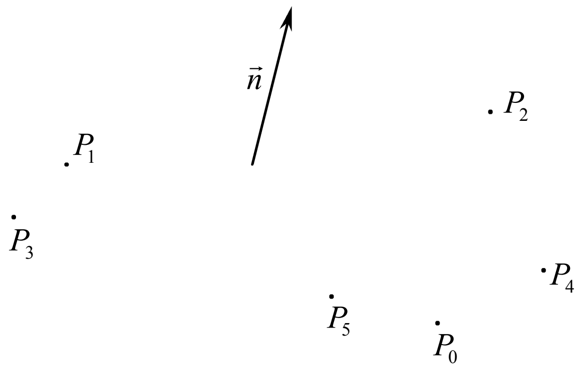
(g) Ligger $P_4$ på $l$ ?

(h) Er $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}=0$ ?

(i) Ligger $P_5$ på $l$ ?

(j) Er $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_5}=0$ ?

(k) Er $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_0}=0$ ?




## Øvelse 15

En linje $l$ er givet ved at

$l$ er vinkelret på vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ og

$l$ går gennem punktet $P_0(x_0,y_0)$ .

Desuden gælder at

$P(x,y)$ er et vilkårligt punkt i planen.

Så gælder at

$P$ ligger på $l$

netop når

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P} = \square$$

Heri indsætter vi koordinater og får:

$$\begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}=\square$$

Vi udregner skalarproduktet på venstre side. Så ser ligningen sådan ud:

$$\square\cdot(\square)+\square\cdot(\square) = \square$$

Dette er <u>en ligning for linjen $l$</u> .

Vi ganger ind i parenteserne og flytter rundt på leddene:

$$ax+by+(\square) = \square$$

Ofte kender vi tallene $x_0$, $y_0$, $a$ og $b$ . Så kan vi trække indholdet af parentesen sammen til ét tal $c$ . Så ser ligningen sådan ud:

$$\square$$

Dette er <u>en ligning for linjen $l$</u> .

## Øvelse 16

I øvelse 15 viste vi at når en linje er vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og går gennem $(x_0, y_0)$, så har linjen ligningen $a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0$. Ved at indsætte heri får vi at når en linje er vinkelret på $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og går gennem $(2,1)$, så har den følgende ligning:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Vi reducerer venstre side og får følgende ligning:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Der gælder altså at

hvis $a = \boxed{\quad}$, $b = \boxed{\quad}$ og $c = \boxed{\quad}$,

så er $ax+by+c=0$ ligningen for en linje,

og $\begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix}$ er vinkelret på denne linje.

## Øvelse 17

Hvis $a$, $b$ og $c$ står for bestemte tal, så vil ligningen

$(*)$ $\qquad ax+by+c=0$

enten blive sand eller falsk hvis vi indsætter et punkts koordinatsæt $(x, y)$ i ligningen.
Man siger at $(*)$ <u>er en ligning for</u> mængden af punkter der gør den sand.

**<u>Hvis $b \neq 0$ :</u>**

Vi behøver ikke huske *y*-koordinaten udenad: Vi kan blot indsætte 0 for *x* i $(*)$ og isolere *y*.

Den linje $l$ der går gennem punktet $(0, -\frac{c}{b})$ og er vinkelret på vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, har ligningen

$$\boxed{\quad}\cdot(\boxed{\qquad\quad}) + \boxed{\quad}\cdot(\boxed{\qquad\quad}) = \boxed{\quad}$$

Når vi reducerer denne ligning, får vi

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

Dvs. $(*)$ er ligning for en linje, og vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er vinkelret på denne linje.

**<u>Hvis $a \neq 0$ :</u>**

Dette punkt skal gøre ligningen $(*)$ sand.

Den linje $l$ der går gennem punktet $(\qquad, 0)$ og er vinkelret på vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, har ligningen

$$\boxed{\quad}\cdot(\boxed{\qquad\quad}) + \boxed{\quad}\cdot(\boxed{\qquad\quad}) = \boxed{\quad}$$

Når vi reducerer denne ligning, får vi

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

Dvs. $(*)$ er ligning for en linje, og vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er vinkelret på denne linje.

**<u>Sætning</u>**

Når $a$ og $b$ ikke begge er $\boxed{\quad}$, så er

$ax+by+c=0$

ligning for $\boxed{\qquad\qquad}$, og vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ denne linje.

**Øvelse 18** Ligningen $ax+by+c=0$ når både $a$ og $b$ er $0$.

(a) Hvis vi indsætter punktet $(x,y)=(5,3)$ i ligningen $0\cdot x+0\cdot y+8 = 0$, får vi så en sand ligning?

Svar:

(b) Hvilke punkter $(x,y)$ gør ligningen $0\cdot x+0\cdot y+8 = 0$ sand?

Svar:

(c) Hvis vi indsætter punktet $(x,y)=(5,3)$ i ligningen $0\cdot x+0\cdot y+0 = 0$, får vi så en sand ligning?

Svar:

(d) Hvilke punkter $(x,y)$ gør ligningen $0\cdot x+0\cdot y+0 = 0$ sand?

Svar:

**Øvelse 19**

(a) Symbolet $|AB|$ læses

(b) Symbolet $\overrightarrow{AB}_{\overrightarrow{CD}}$ læses

(c) Symbolet $\left|\overrightarrow{AB}_{\overrightarrow{CD}}\right|$ læses

(d) Er $|AB|$ lig afstanden fra $B$ til linjen $l$?

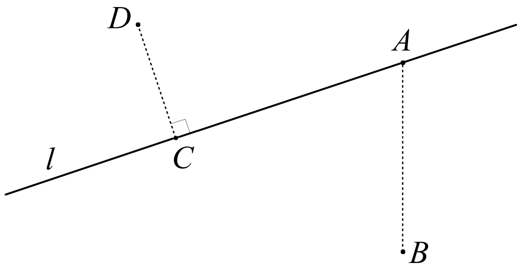
Svar:

(e) Er $|CD|$ lig afstanden fra $D$ til linjen $l$?

Svar:

(f) Er $\left|\overrightarrow{AB}_{\overrightarrow{CD}}\right|$ lig afstanden fra $B$ til linjen $l$?

Svar:



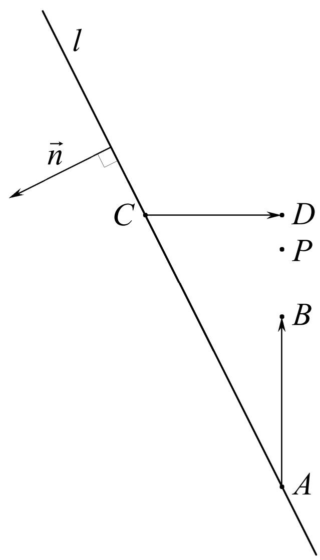

**Øvelse 20**

(a) Er længden af $\overrightarrow{AB}$'s projektion på $\vec{n}$ større end $P$'s afstand til linjen $l$? Svar:

(b) Er længden af $\overrightarrow{CD}$'s projektion på $\vec{n}$ større end $P$'s afstand til linjen $l$? Svar:

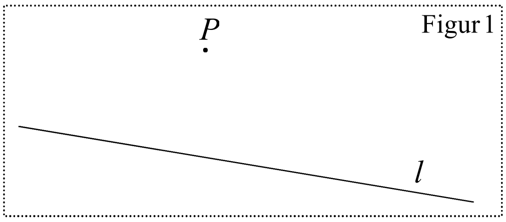
(c) Er længden af $\overrightarrow{AP}$'s projektion på $\vec{n}$ større end $P$'s afstand til linjen $l$? Svar:

(d) Er længden af $\overrightarrow{CP}$'s projektion på $\vec{n}$ større end $P$'s afstand til linjen $l$? Svar:



## Øvelse 21

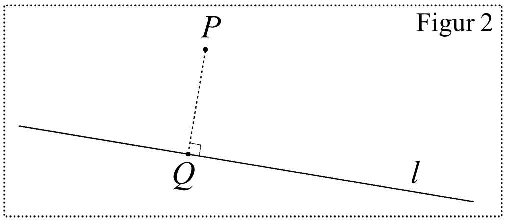
Vi vil finde en formel til at udregne afstanden fra et punkt $P(x_1, y_1)$ til en linje $l$: $ax + by + c = 0$ . Se figur 1.



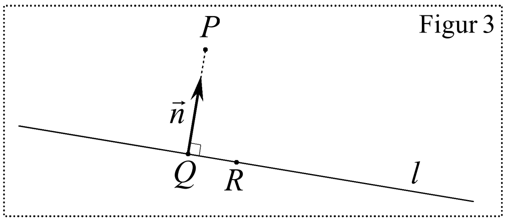

På figuren har vi vist hvad $Q$ er for et punkt.

afstand fra $P$ til $l$ = længden af $QP$

Se figur 2.




Ved hjælp af sætningen nederst side 5 kan vi slutte at vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{xx}} \\ \boxed{\phantom{xx}} \end{pmatrix}$ er vinkelret på $l$. Se figur 3.




Vi lader $R(x_0, y_0)$ være et punkt på $l$. Se figur 3. Så gælder

$$ax_0 + by_0 + c = \boxed{\phantom{xx}} \; .$$

Heraf kan vi slutte at

$$c = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}} \; .$$

**<u>Nu kan vi udregne afstanden:</u>**

$$\text{Afstand fra } P \text{ til } l = \left|\overrightarrow{QP}\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{R\boxed{\phantom{x}}}_{\vec{n}}\right|$$

$$= \frac{\left| \qquad \right|}{\left| \quad \right|}$$ ifølge formlen nederst side 3.

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} \quad - \quad \\ \quad - \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\qquad\qquad}}$$

$$= \frac{\left| ( \quad - \quad ) \qquad + ( \quad - \quad ) \qquad \right|}{\sqrt{\qquad\qquad}}$$

$$= \frac{\left| \qquad - \qquad + \qquad - \qquad \right|}{\sqrt{\qquad\qquad}}$$

$$= \frac{\left| \qquad\qquad \right|}{\sqrt{\qquad\qquad}}$$ da $c = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

**<u>Sætning:</u>** Afstanden fra punktet $P(x_1, y_1)$ til linjen $l$: $ax + by + c = 0$ er

$$\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxx}}$$