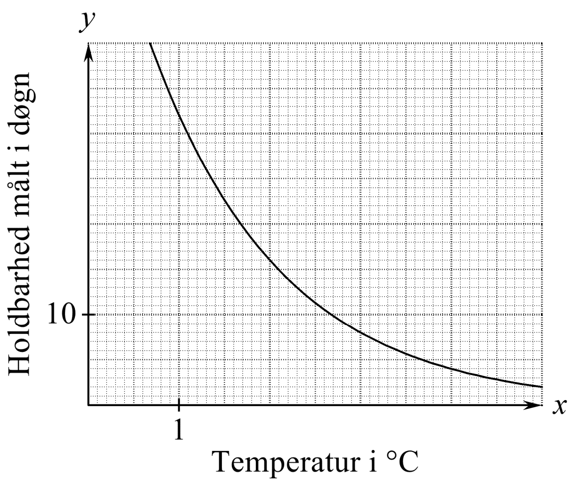
Eksponentielle sammenhænge

Udgave 2



2009 Karsten Juul

Dette hæfte er en fortsættelse af hæftet "Lineære sammenhænge, 2. udgave 2009".

Indhold

Eksponentielle sammenhænge

2. udgave 2009

1. Eksponentielle sammenhænge, ligning og graf

Øvelse 1.1

I år er antal ansatte 1000, og man har vedtaget at dette antal hvert af de kommende år skal være $1{,}1$ gange så stort som det foregående år.

Om 1 år er antallet _________ $\cdot$ $1{,}1$.

Om 2 år er antallet $1000 \cdot 1{,}1$ $\cdot$_______ .

Om 3 år er antallet $1000 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1$ $\cdot$_______ .

Om x år er antallet ____________________ .

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal år fra nu.

y = antal ansatte.

Ligning: ______________________________ .

Øvelse 1.2

Antallet af nogle bakterier vokser sådan at antallet i løbet af en time bliver $1{,}4$ gange så stort. Nu er antallet 340.

Om 1 time er antallet __________ $\cdot$ $1{,}4$.

Om 2 timer er antallet $340 \cdot 1{,}4$ $\cdot$__________ .

Om 3 timer er antallet $340 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}4$ $\cdot$__________ .

Om x timer er antallet ____________________ .

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal timer fra nu.

y = antal bakterier.

Ligning: ______________________________ .

Øvelse 1.3

Vi køber 14 enheder af et stof. Det er et radioaktivt stof, så der bliver automatisk mindre og mindre af det. Stoffet henfalder sådan at mængden i løbet af et år bliver ganget med $0{,}96$.

Om 1 år er mængden _______ $\cdot$ $0{,}96$.

Om 2 år er mængden $14 \cdot 0{,}96$ $\cdot$__________ .

Om 3 år er mængden $14 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96$ $\cdot$__________ .

Om x år er mængden ____________________ .

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal år efter købet.

y = mængden af det radioaktive stof.

Ligning: ______________________________ .

Øvelse 1.4

Antallet af celler i en næringsopløsning vokser hurtigt.

Antallet af celler bliver hver time ganget med samme tal. Dette tal kan vi udregne ud fra de tal som allerede er skrevet i tabellen.

(a) Vis hvordan vi kan gøre dette: ___________________________ .

(b) Udfyld resten af tabellen.

Antal timer fra nu:	0	1	2	3	9	x
Antal celler:		768	1152			

(c) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal timer fra nu.

y = antal celler.

Ligning: _________________________________ .

Øvelse 1.5

En person indtager 10 000 enheder af et rusmiddel. I kroppen nedbrydes rusmidlet på sådan en måde at mængden hvert døgn bliver ganget med samme tal.

x = antal døgn fra nu.

y = antal enheder af rusmidlet der er tilbage i kroppen.

x:	0	1	2	3	4	14
y:	10 000	8 000				

(a) Udfyld resten af tabellen.

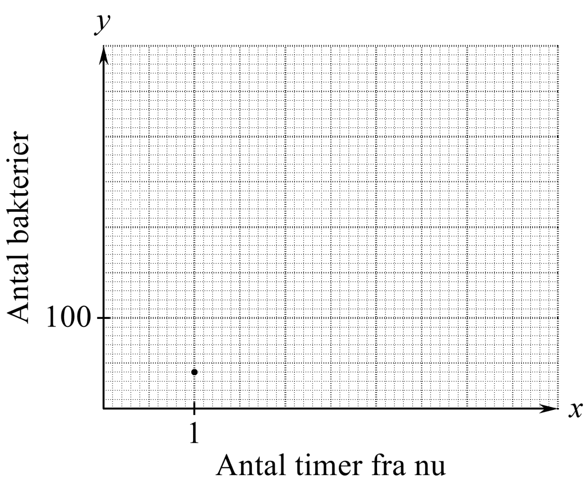
(b) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem y og x : ______________________________ .

Øvelse 1.6

I koordinatsystemet er afsat et af punkterne på grafen der viser sammenhængen mellem følgende variable:

x = antal timer fra nu.

y = antal bakterier.



(a) Om 1 time er der _______ bakterier.

Hver time ganges antallet af bakterier med 1,75 .

(b) Om 2 timer er der _______ bakterier.

(c) Afsæt et grafpunkt der viser svaret på (b).

(d) Om 3 timer er der _______ bakterier.

(e) Afsæt et grafpunkt der viser svaret på (d).

(f) Afsæt nogle flere grafpunkter.

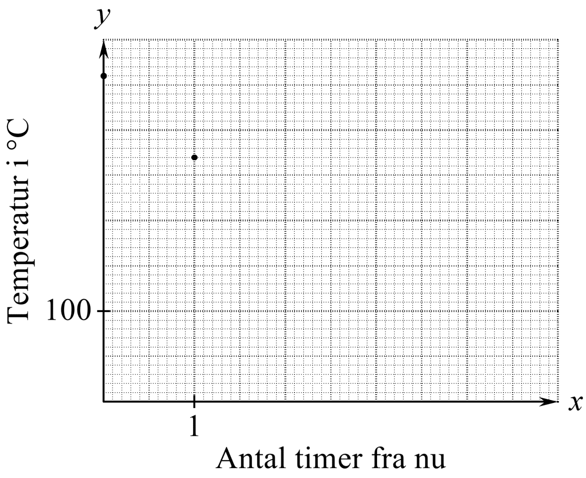
(g) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem y og x : ____________________________ .

Øvelse 1.7

I koordinatsystemet er afsat to punkter på grafen der viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal timer fra nu.

y = temperatur i °C.



(a) Nu er temperaturen _______ °C.

(b) Om 1 time er temperaturen _______ °C.

Hver time ganges temperaturen med samme tal.

(c) Om 2 timer er temperaturen _______ °C.

(d) Vis svaret fra (c) ved at afsætte et grafpunkt i koordinatsystemet.

(e) Afsæt flere grafpunkter i koordinatsystemet.

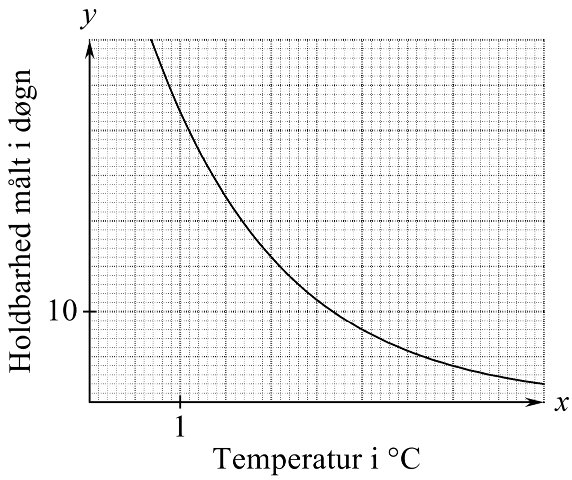
(f) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem y og x: _________________________ .

Øvelse 1.8

Grafen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = temperaturen (målt i °C).

y = varens holdbarhed (målt i døgn).



(a) Når temperaturen er 1 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(b) Når temperaturen er 2 °C, er holdbarheden _______ døgn.

Hver gang temperaturen bliver én grad højere, bliver holdbarheden ganget med et bestemt tal.

(c) Dette tal er _______ .

(d) Vis hvordan dette tal kan bruges til at udregne holdbarheden når temperaturen er 3 °C:

______________________________ .

(e) Hvis vi aflæser på grafen, så får vi at når temperaturen er 3 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(f) Når temperaturen er 0 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(g) Når temperaturen er 10 °C, er holdbarheden _______ døgn.

(h) Når temperaturen er x °C, er holdbarheden ____________________ døgn.

(i) Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem y og x: _________________________ .

DEFINITION 1.9

En sammenhæng mellem to variable x og y er <u>eksponentiel</u> hvis den kan beskrives med en ligning på formen

$$y \;=\; b \cdot a^{x} \qquad \text{hvor } a \text{ og } b \text{ er positive.}$$

Eksempel 1.10

(a) Ligningen

$$y \;=\; 3 \cdot 0{,}224^{x}$$

er på formen

$$y \;=\; b \cdot a^{x} \qquad \text{med} \qquad a = 0{,}224 \qquad \text{og} \qquad b = 3 \ .$$

Ifølge definition 1.9 er der altså tale om en eksponentiel sammenhæng.

(b) Ligningen

$$y \;=\; 0{,}224 \cdot 3^{x}$$

er på formen

$$y \;=\; b \cdot a^{x} \qquad \text{med} \qquad a = 3 \qquad \text{og} \qquad b = 0{,}224 \ .$$

Ifølge definition 1.9 er der altså tale om en eksponentiel sammenhæng.

(c) Ligningen

$$y \;=\; 1{,}081^{x} \cdot 12{,}6$$

Bemærk!

er på formen

$$y \;=\; b \cdot a^{x} \qquad \text{med} \qquad a = 1{,}081 \qquad \text{og} \qquad b = 12{,}6 \ .$$

Ifølge definition 1.9 er der altså tale om en eksponentiel sammenhæng.

Øvelse 1.11

(a) $y \;=\; 1{,}7 \cdot 1{,}019^{x}$ er på formen $y \;=\; b \cdot a^{x}$ med $a =$ __________ og $b =$ __________ .

(b) $y \;=\; 2094 \cdot 1{,}4^{x}$ er på formen $y \;=\; b \cdot a^{x}$ med $a =$ __________ og $b =$ __________ .

(c) $y \;=\; 3{,}16^{x} \cdot 0{,}082$ er på formen $y \;=\; b \cdot a^{x}$ med $a =$ __________ og $b =$ __________ .

(d) $y \;=\; 5{,}23 \cdot 0{,}282^{x}$ er på formen $y \;=\; b \cdot a^{x}$ med $a =$ __________ og $b =$ __________ .

(e) $y \;=\; 2^{x} \cdot 8$ er på formen $y \;=\; b \cdot a^{x}$ med $a =$ __________ og $b =$ __________ .

(f) $y \;=\; 0{,}98^{x} \cdot 0{,}79$ er på formen $y \;=\; b \cdot a^{x}$ med $a =$ __________ og $b =$ __________ .

SÆTNING 1.12

Grafen for en eksponentiel sammenhæng

(a) er en krum kurve uden knæk

(b) ligger over x-aksen

(c) kommer vilkårlig tæt på x-aksen.

Øvelse 1.13

Ligningen

$$y \ = \ 0{,}4 \cdot 1{,}6^x$$

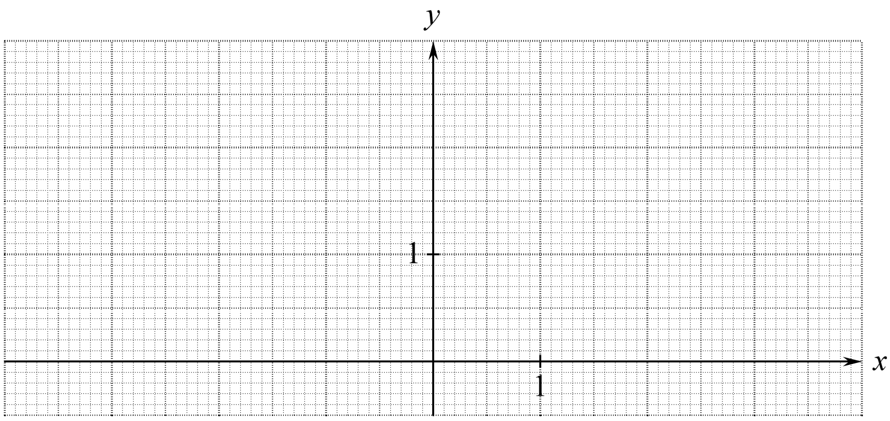
viser sammenhængen mellem to variable y og x.

(a) Find ud af hvad y er når $x = -1$, og afsæt denne oplysning som et punkt i koordinatsystemet.

Udregning: $y =$ _______________ = _______ .

(b) Udfyld tabellen, og tegn grafen (husk 1.12 (a)).

x:	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y:									



Øvelse 1.14

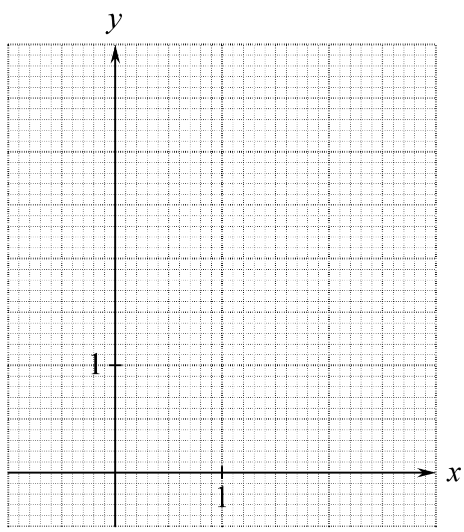
Ligningen

$$y = 1{,}5 \cdot 0{,}4^x$$

viser sammenhængen mellem to variable y og x.

Udfyld tabellen og tegn grafen.

x:	–1	0	1	2	3
y:					



SÆTNING 1.15

En eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ er

(a) aftagende hvis $0 < a < 1$, dvs. hvs a er mellem 0 og 1

(b) voksende hvis $1 < a$, dvs. hvs a er større end 1 .

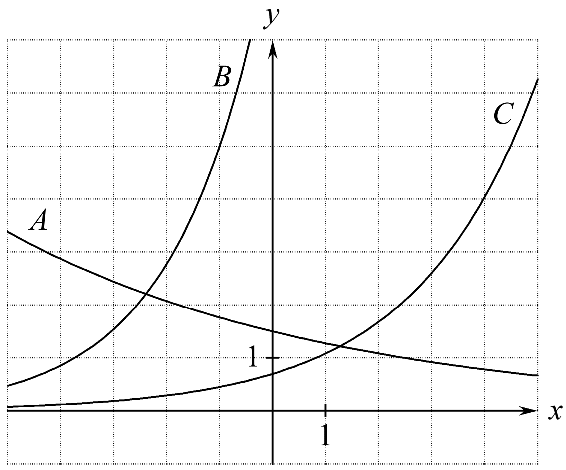
Øvelse 1.16

Figuren viser graferne for tre eksponentielle sammenhænge $y = b \cdot a^x$ som vi kalder A, B og C.

For hver af dem skal du afgøre om

$0 < a < 1$ eller $1 < a$

og begrunde det ved hjælp af sætning 1.15 .



Skriv $0<a<1$ eller $1<a$.

Skriv *voksende* eller *aftagende* .

For A er ____________ da A er __________________ .

For B er ____________ da B er __________________ .

For C er ____________ da C er __________________ .

Øvelse 1.17

For hver af de eksponentielle sammenhænge $y = b \cdot a^x$ nedenfor skal du skrive om den er voksende eller aftagende , og begrunde det.

(a) Sammenhængen $y = 1.2 \cdot 1.03^x$ er *voksende* for $a > 1$ da $a =$ 1,03 .

(b) Sammenhængen $y = 0{,}6 \cdot 2{,}4^x$ er ________________ for _____________ da $a =$ _________ .

(c) Sammenhængen $y = 5 \cdot 0{,}04^x$ er ________________ for _____________ da $a =$ _________ .

(d) Sammenhængen $y = 1{,}6 \cdot 0{,}71^x$ er ________________ for _____________ da $a =$ _________ .

(e) Sammenhængen $y = 1{,}0013^x$ er ________________ for _____________ da $a =$ _________ .

Øvelse 1.18

(a) Et punkt kan trækkes frem og tilbage på grafen for $y = 0{,}06 \cdot 1.1^x$.
Hvis punktets x-koordinat bliver større, vil dets y-koordinat blive ________________ .

(b) Et punkt kan trækkes frem og tilbage på grafen for $y = 1200 \cdot 0{,}995^x$.
Hvis punktets x-koordinat bliver større, vil dets y-koordinat blive ________________ .

(c) Et punkt kan trækkes frem og tilbage på grafen for $y = 4 \cdot 0{,}011^x$.
Hvis punktets x-koordinat bliver større, vil dets y-koordinat blive ________________ .

2. Procent

DEFINITION 2.1

At der om et tal gælder at

tallet er $p\%$ af et *andet tal*

betyder at

tallet er $\frac{p}{100}$ af det *andet tal* .

Eksempel 2.2

Spørgsmål: Hvor mange procent er 7 af 20 ?

Følger af definition 2.1 .

Svar: $\frac{7}{20} = 0{,}35 = \frac{0{,}35 \cdot 100}{100} = \frac{35}{100} = 35\%$

så

7 er $\underline{\underline{35\%}}$ af 20.

Du skal ikke i al fremtid skrive så meget, men du skal kunne gennemføre udregningen når der er grund til at være omhyggelig.

Øvelse 2.3 Se i eksempel 2.2 hvad du skal gøre.

$\frac{34}{272} = \_\_\_\_\_\_ = \frac{\_\_\_\_ \cdot 100}{100} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{100} = \_\_\_\_\_\_ \%$

så

34 er ______ % af 272 .

Øvelse 2.4 Se i eksempel 2.2 hvad du skal gøre.

$\frac{0{,}15}{2{,}5} = \_\_\_\_\_\_ = \frac{\_\_\_\_ \cdot 100}{100} = \frac{\_\_\_\_\_\_}{100} = \_\_\_\_\_\_ \%$

så

0,15 er ______ % af 2,5 .

Øvelse 2.5

(a) 46,2 er ______ % af 550 .

(b) 35 er ______ % af 25 .

(c) 45 er ______ % af 240 .

SÆTNING 2.6

Vi kan

udregne $p\%$ af et *tal*

ved at

gange *tallet* med $\frac{p}{100}$.

Eksempel 2.7

Spørgsmål: Udregn 12% af 40 .

Svar: Da

$$12\% \;=\; \frac{12}{100} \;=\; 0{,}12$$

skal vi gange 40 med $0{,}12$:

$$40 \cdot 0{,}12 \;=\; 4{,}8$$

Konklusion:

12% af 40 er $\underline{\underline{4{,}8}}$.

Du plejer nok at skrive

$$\frac{40 \cdot 12}{100}$$

men dette kan vi ikke bruge i de udregninger vi snart kommer til, så du er nødt til at vænne dig til i stedet at skrive

$$40 \cdot 0{,}12$$

Øvelse 2.8 Se i eksempel 2.7 hvad du skal gøre.

$6{,}5\% \;=\; \frac{\qquad}{100} \;=\;$ ________ .

$6{,}5\%$ af $1\,400 \;=\; 1\,400 \cdot$ ________ $=$ ________ .

Øvelse 2.9 Se i eksempel 2.7 hvad du skal gøre.

$42{,}9\% \;=\; \frac{\qquad}{100} \;=\;$ ________ .

$42{,}9\%$ af $2\,000 \;=\; 2\,000 \cdot$ ________ $=$ ________ .

Øvelse 2.10 Se i eksempel 2.7 hvad du skal gøre.

$120\% \;=\; \frac{\qquad}{100} \;=\;$ ________ .

120% af $15 \;=\; 15 \cdot$ ________ $=$ ________ .

DEFINITION 2.11

At

et tal er $p\%$ større end et andet tal

betyder at

forskellen mellem de to tal er $p\%$ af det mindste tal.

Eksempel 2.12

Spørgsmål: Hvor mange procent er 40 større end 32?

Svar: Forskellen på 40 og 32 er

$$40-32 = 8 \;.$$

Vi skal regne ud hvor mange procent 8 er af 32 :

$$\frac{8}{32} = 0{,}25 = \frac{0{,}25\cdot 100}{100} = \frac{25}{100} = 25\% \;.$$

40 er $\underline{\underline{25\%}}$ større end 32 .

Øvelse 2.13

(a) Hvad er forskellen mellem 60 og 40 ? Svar:

(b) Hvor mange procent er denne forskel af 40 ? Svar:

(c) Hvor mange procent er denne forskel af 60 ? Svar:

(d) Hvor mange procent er 60 større end 40 ? Svar:

Øvelse 2.14

(a) Hvor mange procent er 30 større end 20 ? Svar:

(b) Hvor mange procent er 50 større end 40 ? Svar:

(c) Hvor mange procent er 90 større end 80 ? Svar:

DEFINITION 2.15

At

et tal er $p\%$ mindre end et andet tal

betyder at

forskellen på de to tal er $p\%$ af det største tal.

Eksempel 2.16

Spørgsmål: Hvor mange procent er 32 mindre end 40 ?

Svar: Forskellen på 40 og 32 er

$$40-32 = 8 \; .$$

Vi skal regne ud hvor mange procent 8 er af 40 :

$$\frac{8}{40} = 0{,}2 = \frac{0{,}2\cdot 100}{100} = \frac{20}{100} = 20\% \; .$$

32 er $\underline{\underline{20\%}}$ mindre end 40 .

Øvelse 2.17

(a) Hvad er forskellen mellem 60 og 48 ? Svar:

(b) Hvor mange procent er denne forskel af 48 ? Svar:

(c) Hvor mange procent er denne forskel af 60 ? Svar:

(d) Hvor mange procent er 60 større end 48 ? Svar:

(e) Hvor mange procent er 48 mindre end 60 ? Svar:

Øvelse 2.18

(a) Hvor mange procent er 34 større end 17 ? Svar:

(b) Hvor mange procent er 17 mindre end 34 ? Svar:

SÆTNING 2.19

For at udregne

tallet der er $p\%$ større end starttallet,

skal vi

gange starttallet med $1+r$ hvor $r = \frac{p}{100}$.

Eksempel 2.20

Spørgsmål: Udregn det tal der er 25% større end 32.

Svar:
$$r = \frac{25}{100} = 0{,}25 \ .$$
$$1+r = 1+0{,}25 = 1{,}25$$

Vi skal gange 32 med $1{,}25$:
$$32\cdot 1{,}25 = 40 \ .$$

Det tal der er 25% større end 32, er $\underline{\underline{40}}$.

Vi kommer snart til nogle udregninger hvor det er nødvendigt at skrive udregningen sådan.

Bemærk:

32	er	100% af 32.
$32\cdot 0{,}25 = 8$	er	25% af 32.
$32\cdot 1{,}25 = 40$	er	125% af 32.
$32\cdot 1{,}25 = 40$	er	25% større end 32.

Studér disse tal grundigt. Så går der måske noget op for dig.

Øvelse 2.21

Se i eksempel 2.20 hvad du skal gøre.

Vi vil udregne det tal der er $1{,}8\%$ større end $2\,500$.

$r = \frac{\_\_\_\_\_\_}{100} = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

$1+r = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

Det tal der er $1{,}8\%$ større end $2\,500$, er $2\,500\cdot \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

Øvelse 2.22

(a) 100% af 50 er __________ .

(b) 30% af 50 er __________ .

(c) 130% af 50 er __________ .

(d) __________ er 30% større end 50.

(e) $50\cdot 1{,}30 =$ __________ .

SÆTNING 2.23
For at udregne

tallet der er $p\%$ mindre end starttallet,

skal vi

gange starttallet med $1+r$ hvor $r = \frac{-p}{100}$.

Eksempel 2.24

Spørgsmål: Udregn det tal der er 20% mindre end 40 .

Svar: $r = \frac{-20}{100} = -0{,}20$.

$1+r = 1+(-0{,}20) = 0{,}80$

Vi skal gange 40 med $0{,}80$:

$40 \cdot 0{,}80 = 32$.

Vi kommer snart til nogle udregninger hvor det er nødvendigt at skrive udregningen sådan.

Det tal der er 20% mindre end 40, er $\underline{\underline{32}}$.

Bemærk:

40	er	100% af 40 .
$40 \cdot 0{,}20 = 8$	er	20% af 40 .
$40 \cdot 0{,}80 = 32$	er	80% af 40 .
$40 \cdot 0{,}80 = 32$	er	20% mindre end 40 .

Studér disse tal grundigt. Så går der måske noget op for dig.

Øvelse 2.25

Se i eksempel 2.24 hvad du skal gøre.

Vi vil udregne det tal der er 5% mindre end 460 .

$r = \frac{\_\_\_\_\_}{100} = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

$1+r = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

Det tal der er 5% mindre end 460 , er $460 \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_ = \underline{\underline{\qquad\qquad}}$.

Øvelse 2.26

(a) 100% af 50 er __________ .

(b) 30% af 50 er __________ .

(c) 70% af 50 er __________ .

(d) __________ er 30% mindre end 50.

(e) $50 \cdot 0{,}70 =$ __________ .

Øvelse 2.27

Da vi både har ganget og divideret med 100, har vi ikke ændret tallet.

Vi har ganget med 100 ved at rykke kommaet 2 pladser mod højre.

% betyder "hundrededele".

(a) Da $1{,}3 = \frac{1{,}3 \cdot 100}{100} = \frac{130}{100} = 130\%$, gælder:

Når vi ganger *et tal* med **1,3** , får vi et *facit* der er **130 % af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,3** , får vi et *facit* der er **30 % større end** *tallet* .

(b) Udfyld efter samme princip som i (a):

Da $1{,}045 = \frac{1{,}045 \cdot \_\_\_\_}{100} = \frac{\_\_\_\_}{100} = \_\_\_\_\_\_\%$, gælder

Når vi ganger *et tal* med **1,045** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,045** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(c) Da $0{,}78 = \frac{0{,}78 \cdot \_\_\_\_}{100} = \frac{\_\_\_\_}{100} = \_\_\_\_\_\_\%$, gælder

Når vi ganger *et tal* med **0,78** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,78** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

Øvelse 2.28

(a) Når vi ganger *et tal* med **1,62** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,62** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(b) Når vi ganger *et tal* med **0,965** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,965** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

(c) Når vi ganger *et tal* med **0,1** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,1** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

(d) Når vi ganger *et tal* med **1,108** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,108** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(e) Når vi ganger *et tal* med **1,26** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **1,26** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

(f) Når vi ganger *et tal* med **0,87** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **0,87** , får vi et *facit* der er _______ **% mindre end** *tallet* .

(g) Når vi ganger *et tal* med **2** , får vi et *facit* der er _______ **% af** *tallet* .

Når vi ganger *et tal* med **2** , får vi et *facit* der er _______ **% større end** *tallet* .

3. Hvad fortæller *a* og *b* om den eksponentielle sammenhæng $y = b \cdot a^x$?

Eksempel 3.1 Hvad fortæller *a* og *b*?

Mellem de variable

x = antal uger efter at foreningen blev oprettet y = antal medlemmer

er der følgende sammenhæng:

$$625 \cdot 1{,}2^x = y$$

Da $1{,}2^0 = 1$. Et tal i nulte giver altid 1.
625 gange 1 er 625.

Når $x = 0$ er y lig 625 .

Da $1{,}2^1 = 1{,}2$.
Et tal i første giver altid tallet selv.

Når $x = 1$ er y lig 625 gange 1,2 .

Når $x = 2$ er y lig $\boxed{\text{625 gange 1,2}}$ gange 1,2 .

Da $1{,}2^2 = 1{,}2 \cdot 1{,}2$.

Når $x = 3$ er y lig $\boxed{\text{625 gange 1,2 gange 1,2}}$ gange 1,2 .

Vi ser at

hver uge bliver antal medlemmer ganget med 1,2 , dvs.
hver uge bliver antal medlemmer 20% større.

Tallene 1,2 og 625 fra ligningen $625 \cdot 1{,}2^x = y$ fortæller følgende om antallet af medlemmer:

Hver uge bliver antallet af medlemmer 20% større.

Da foreningen blev oprettet, var der 625 medlemmer.

Øvelse 3.2

Om nogle bakterier i en næringsopløsning gælder

$$y = 2000 \cdot 1{,}43^x$$

hvor y er antallet af bakterier og x er antal timer efter at bakterierne blev anbragt i skålen.

Når $x = 0$ er $y = 2000 \cdot 1{,}43^0$ dvs. $y = 2000$.

Når $x = 1$ er $y = 2000 \cdot 1{,}43^1$ dvs. $y = 2000 \cdot 1{,}43$.

Når $x = 2$ er $y = 2000 \cdot 1{,}43^2$ dvs. $y = 2000 \cdot 1{,}43 \cdot 1{,}43$.

Når $x = 3$ er $y = 2000 \cdot 1{,}43^3$ dvs. $y = 2000 \cdot 1{,}43 \cdot 1{,}43 \cdot 1{,}43$.

Vi ser at

hver time bliver antal bakterier ganget med __________ , dvs.
hver time bliver antal bakterier _______ % større.

Tallene 1,43 og 2000 fra ligningen $y = 2000 \cdot 1{,}43^x$ fortæller følgende om antallet af bakterier:

Øvelse 3.3

(a) Når $x = 9$, er $y = 2000 \cdot 1{,}43^x = 2000 \cdot 1{,}43^9 =$ _______________ .

(b) Når $x = 10$, er $y = 2000 \cdot 1{,}43^x = 2000 \cdot 1{,}43^{10} =$ _______________ .

(c) Facit i (b) er _______________ enheder større end facit i (a).

(d) Facit i (c) er _______________ % af facit i (a).

(e) Er facit i (d) i overensstemmelse med det du i øvelse 3.2 skrev om hvad 1,43 fortæller?

Svar: __________ .

Denne øvelse viser hvordan du bør kontrollere dine svar.

I (a) og (b) valgte vi x-værdierne 9 og 10. Vi kunne lige så godt have valgt f.eks. 20 og 21 eller 12,7 og 13,7 . Det afgørende er at forskellen på de to x-værdier er 1 enhed.

Øvelse 3.4

Man har indsprøjtet et antal enheder af et stof i et dyr. Der gælder

$$y = 24 \cdot 0{,}79^x$$

hvor y er antal enheder i kroppen , og x er antal timer efter indsprøjtningen.

(a) Når $x = 0$ er $y =$ _______________ .

(b) Når $x = 1$ er $y =$ _______________ .

(c) Når $x = 2$ er $y =$ _______________ .

(d) Tallene 24 og 0,79 fra ligningen $y = 24 \cdot 0{,}79^x$ fortæller følgende om mængden af stoffet i kroppen:

Øvelse 3.5

Kontroller dit svar om 0,79 i 3.4 (d) med metoden fra 3.3 :

Når $x =$ _______ , er $y =$ _______________ .

Når $x =$ _______ , er $y =$ _______________ .

_______________ er _______ % mindre end _______________ .

Eksempel 3.6

Spørgsmål: Om en plante oplyses:

(1) højden vokser med 5,6 % pr. uge

(2) højden var 27,0 cm da planten blev købt.

Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem plantens højde og tidspunktet.

Svar: Vi vælger følgende betegnelser:

x = antal uger efter at planten blev købt

y = højden (i cm)

Nul uger efter købet var højden 27,0 cm, dvs.

Når $x = 0$ er $y = 27$.

En uge senere er planten 5,6% højere. For at udregne det tal der er 5,6% større ganger vi med 1,056 :

Når $x = 1$ er $y = 27 \cdot 1{,}056$.

Efter endnu en uge er højden 5,6% større end $27 \cdot 1{,}056$:

Når $x = 2$ er $y = 27 \cdot 1{,}056 \cdot 1{,}056$, dvs. $y = 27 \cdot 1{,}056^2$.

Osv.

Vi kan altså beskrive sammenhængen mellem plantens højde og tidspunktet med ligningen

$y = 27{,}0 \cdot 1{,}056^x$ hvor y er højde i cm og x er antal uger efter køb

Bemærkning: Det er vigtigt at vi skriver hvad vi har valgt at lade x og y stå for ("antal uger efter køb" og "højde i cm") da ligningen er ubrugelig hvis læseren ikke ved dette.

Øvelse 3.7 Se i eksempel 3.6 hvad du skal gøre.

Om en vare oplyses:

I år 2000 er forbruget 38 ton, og forbruget vokser 13,8 % hvert år.

Vi vil skrive en ligning der viser sammenhængen mellem forbrug og tidspunkt:

Vi vælger følgende betegnelser:

x = antal år efter _______________ .

y = __________________________ .

Nul år efter _______________ var forbruget _______________, dvs.

Når $x =$ _______ er $y =$ _______________ .

Et år senere er forbruget _______ % større.

For at udregne det tal der er _______ % større ganger vi med __________ :

Når $x = 1$ er y = _________ · _________ .

Når $x = 2$ er y = _________ · _________ · _________ = _________ · _________ ^{2} .

Den søgte ligning er ______________________________ .

Øvelse 3.8

I denne øvelse er x = antal måneder efter maj 2008 og y = omsætningen (i mio. kr.).

(a) Omsætningen i butik A stiger med 20% hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x : ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. y = __________ .

(b) Omsætningen i butik B stiger med 0,2 mio. kr. hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x : ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. y = __________ .

(c) Omsætningen i butik C falder med 20% hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x : ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. y = __________ .

(d) Omsætningen i butik D falder med 0,2 mio. kr. hver måned, og i maj 2008 var omsætningen 3 mio. kr.

x:	0	1	2
y:			

Ligning der viser sammenhængen mellem y og x : ____________________ .

Brug ligningen til at udregne y når x er 2. y = __________ .

Øvelse 3.9

Når man på en skærm ændrer afstanden mellem to punkter A og B, så ændres automatisk afstanden mellem to andre punkter C og D. Følgende er oplyst:

> Afstanden mellem C og D bliver 14,2 % mindre hver gang afstanden mellem A og B bliver 1 enhed større, og når A og B er sammenfaldende, er afstanden mellem C og D lig 3,7 enheder.

Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem afstand fra A til B og afstand fra C til D.

4. Potenser

SÆTNING 4.1 **Nogle regler om potenser**

Når a, c, r og s står for tal hvor a og c er positive, gælder

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

osv.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$(a \cdot c)^r = a^r \cdot c^r$$

Når $a^r = c$ er $a = \sqrt[r]{c}$

Når $a^r = c$ er $r = \dfrac{\log(c)}{\log(a)}$, $a \neq 1$

Eksempel 4.2 Se 4.1 .

Spørgsmål: Omskriv følgende udtryk så det bliver nemmere at indtaste på lommeregneren:

$$B = 2500 \cdot 1{,}203 \cdot 1{,}203 \cdot 1{,}203 \cdot 1{,}203 \; .$$

Svar: $B = \underline{\underline{2500 \cdot 1{,}203^4}}$.

Øvelse 4.3 Se 4.1 og 4.2 .

Omskriv følgende udtryk så de bliver nemmere at indtaste på lommeregneren:

$A = 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027$ $\qquad$ $C = 2 \cdot 300 \cdot 0{,}9261 \cdot 0{,}9261 \cdot 0{,}9261$.

$A =$ $\qquad$ $C =$

Eksempel 4.4 Se 4.1 .

Spørgsmål: Reducér $3 \cdot 2^{t+1}$.

Svar: $3 \cdot 2^{t+1} = 3 \cdot 2^t \cdot 2^1 = 3 \cdot 2^t \cdot 2 = \underline{\underline{6 \cdot 2^t}}$

Øvelse 4.5 Se 4.1 og 4.4 .

Reducér hvert af udtrykkene:

$2 \cdot 0{,}5^{t+1} \;=$

$0{,}2 \cdot 2^{t+2} \;=$

Eksempel 4.6 Se 4.1 .

Spørgsmål: Hvad skal vi gange $1{,}3^t$ med for at få $1{,}3^{t+1}$?

Svar: $1{,}3^{t+1} = 1{,}3^t \cdot 1{,}3^1 = 1{,}3^t \cdot 1{,}3$

Heraf ser vi at vi skal gange $1{,}3^t$ med $\underline{\underline{1{,}3}}$ for at få $1{,}3^{t+1}$.

Øvelse 4.7 Se 4.1 og 4.6 .

Hvad skal vi gange $4 \cdot 3^t$ med for at få $4 \cdot 3^{t+2}$?

$4 \cdot 3^{t+2} \;=$

Heraf ser vi at vi skal gange $4 \cdot 3^t$ med ______ for at få $4 \cdot 3^{t+2}$.

Eksempel 4.8 Se 4.1 .

Spørgsmål: Reducér $10 \cdot (3 \cdot t)^2$.

Svar: $10 \cdot (3 \cdot t)^2 = 10 \cdot 3^2 \cdot t^2 = 10 \cdot 9 \cdot t^2 = \underline{\underline{90t^2}}$.

Øvelse 4.9 Se 4.1 og 4.8 .

Reducér hvert af udtrykkene:

$(t \cdot 2)^3 \cdot 0{,}5 \;=$

$4(0{,}5t)^2 \;=$

Eksempel 4.10 Se 4.1 .

Spørgsmål: Hvad skal vi gange t^2 med for at få $(4t)^2$?

Svar: $(4t)^2 = 4^2 \cdot t^2 = 16 \cdot t^2$

Heraf ser vi at vi skal gange t^2 med $\underline{\underline{16}}$ for at få $(4t)^2$.

Øvelse 4.11 Se 4.1 og 4.10 .

Hvad skal vi gange $0{,}7t^3$ med for at få $0{,}7(2t)^3$?

$0{,}7(2t)^3 \;=$

Heraf ser vi at vi skal gange $0{,}7t^3$ med ____ for at få $0{,}7(2t)^3$.

Eksempel 4.12 Se 4.1 .

Spørgsmål: Bestem x i ligningen $3x^{2,4} = 4,65$.

Svar: Vi vil bestemme x i ligningen

$$3x^{2,4} = 4,65$$

Ved at dividere begge sider med 3 får vi

$$x^{2,4} = 1,55$$

Heraf får vi

$$x = \sqrt[2,4]{1,55}$$

Ved at udregne højresiden på lommeregneren får vi at

$$x = 1,2003\cdots$$

dvs.

$$x = \underline{\underline{1,20}} \ .$$

Øvelse 4.13 Se 4.1 og 4.12 .

Bestem x i ligningen $5,5x^3 = 62,7$.

Eksempel 4.14 Se 4.1 .

Spørgsmål: Bestem x i ligningen $10 \cdot 1,05^x = 11,3$.

Svar: Vi vil bestemme x i ligningen

$$10 \cdot 1,05^x = 11,3$$

Ved at dividere begge sider med 10 får vi

$$1,05^x = 1,13$$

Heraf får vi

$$x = \frac{\log(1,13)}{\log(1,05)}$$

Ved at udregne højresiden på lommeregner får vi

$$x = 2,5049\cdots$$

dvs.

$$x = \underline{\underline{2,5}}$$

Øvelse 4.15 Se 4.1 og 4.14 .

Bestem x i ligningen $2 \cdot 1{,}5^x = 4{,}5$.

Øvelse 4.16 Se 4.1 , 4.12 og 4.14 .

Løs hver af ligningerne $3^x = 2$ og $x^3 = 2$.

5. Renteformlen

Eksempel 5.1 Hvorfor gælder renteformlen?

Vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8%.
Vi bruger sætning 2.19:

$$r = \frac{5{,}8}{100} = 0{,}058$$

$$1+r = 1{,}058 \; .$$

Heraf ser vi:

Vi skal gange beløbet på kontoen med 1,058 for at få det beløb der er 5,8% større.

Beløbene på kontoen kan beregnes sådan:

Beløbet $34\,000 \cdot 1{,}058$ skal ganges med 1,058 for at få det beløb der er $5{,}8\,\%$ større.

Start:	$34\,000$
Efter 1 år:	$34\,000 \cdot 1{,}058$
Efter 2 år:	$34\,000 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058$
$\vdots$	
Efter 6 år:	$34\,000 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058$

Dette kan skrives kortere ved hjælp af potens:

(1) Efter 6 år: $34\,000 \cdot 1{,}058^6 = 47\,686{,}22$

Man bruger ofte følgende symboler:

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

$n = 6$ er antallet af terminer.

En termin er den tid der går mellem to rentetilskrivninger. I dette eksempel er en termin lig et år.

$r = 5{,}8\,\% = 0{,}058$ er den procent der tilskrives i rente hver termin.

$K_0 = 34\,000$ er startkapitalen.

$K = 47\,686{,}22$ er kapitalen efter 6 terminer.

SÆTNING 5.2 **Renteformlen**

Hvis vi indsætter et beløb på en konto, så er

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

n er antallet af terminer.

r er den procent der tilskrives i rente hver termin.

K_0 er startkapitalen.

K er kapitalen efter n terminer.

Eksempel 5.3 Hvordan kan vi udregne antallet af terminer?

Spørgsmål: Vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8%.
Efter hvor mange år er beløbet vokset til 70 000 kr.?

Svar: Vi bruger renteformlen

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

Antal terminer	n = det tal vi skal bestemme.
Renteprocenten	$r = 5{,}8\% = 0{,}058$
Startkapitalen	$K_0 = 34\,000$
Kapital efter n terminer	$K = 70\,000$

Ved at sætte disse tal ind i renteformlen får vi

$$70\,000 = 34\,000 \cdot (1+0{,}058)^n$$

Vi dividerer begge sider med $34\,000$:

$$\frac{70\,000}{34\,000} = 1{,}058^n$$

Heraf får vi

$$n = \frac{\log\left(\frac{70\,000}{34\,000}\right)}{\log(1{,}058)}$$

dvs.

$$n = 12{,}8$$

så

efter $\underline{\underline{13 \text{ år}}}$ er beløbet vokset til ca. 70 000 kr.

Bemærkning: **Beløbet på kontoen vokser eksponentielt**

Hvis vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8%, så følger af renteformlen at kapitalen K efter n år er

$$K = 34\,000 \cdot 1{,}058^n .$$

Ifølge definition 1.9 er denne sammenhæng eksponentiel. Vi har blot brugt K og n i stedet for y og x.

Øvelse 5.4 De 4 opgavetyper med renteformlen.

I hvert af tilfældene (1)-(4) skal du gøre følgende:

Skriv for hvert af symbolerne n, r, K_0 og K i renteformlen talværdien eller skriv at den er ukendt, og bestem det ukendte tal.

(1) Vi sætter 5 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 6 %.
Efter hvor mange år er beløbet vokset til 8 000 kr.?

(2) Vi sætter et beløb i banken til en fast årlig rente på 4,5 %. Efter 8 år er beløbet vokset til 1280 kr.
Hvor stort et beløb satte vi i banken?

(3) Vi sætter 500 kr. i banken til en fast årlig rente på 3 %.
Hvor stort et beløb står på kontoen efter efter 16 år?

(4) Vi sætter 700 kr. i banken til en fast årlig renteprocent. Efter 15 år er beløbet vokset til 1067 kr.
Bestem den årlige renteprocent.

6. Opgaver hvor vi skal bestemme x eller y i $y = b \cdot a^x$

Eksempel 6.1:

For nogle dyr gælder

(1) $y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$

hvor y er vægten, målt i gram, og x er alderen, målt i uger.

Spørgsmål (a): Hvad er vægten af et dyr hvis alder er 13 uger?

Svar: Under ligningen (1) står at x er alderen, så da det oplyste tal 13 er alderen, skal 13 indsættes på x's plads:

$$y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^{13}$$

Ved at udregne dette får vi

$$y = 3{,}2$$

Under ligningen (1) står at y er vægten, så

et 13 uger gammelt dyr vejer $\underline{\underline{3{,}2 \text{ g}}}$.

Spørgsmål (b): Hvilken alder har et dyr hvis vægt er 6,7 g?

Svar: Under ligningen (1) står at y er vægten, så da det oplyste tal 6,7 er vægten, skal 6,7 indsættes på y's plads:

$$6{,}7 = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$$

For at løse denne ligning starter vi med at dividere begge sider med 0,3:

$$\frac{6{,}7}{0{,}3} = \frac{0{,}3 \cdot 1{,}2^x}{0{,}3}$$

Vi forkorter brøken på højre side og får

$$\frac{6{,}7}{0{,}3} = 1{,}2^x$$

Denne ligning har løsningen

$$x = \frac{\log\left(\frac{6{,}7}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)}$$

Ved at udregne dette får vi

$$x = 17$$

Under ligningen (1) står at x er alderen, så

et dyr hvis vægt er $6{,}7\,\text{g}$, har alderen $\underline{\underline{17 \text{ uger}}}$.

Eksemplet fortsætter på næste side.

I det følgende lader vi t stå for et tal som endnu ikke er oplyst.

Spørgsmål (c): Hvilken alder har et dyr hvis vægt er t gram?

Svar: Under ligningen (1) står at y er vægten, så da det oplyste tal t er en vægt, skal t indsættes på y's plads:

$$t = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$$

For at løse denne ligning starter vi med at dividere begge sider med 0,3:

$$\frac{t}{0{,}3} = \frac{0{,}3 \cdot 1{,}2^x}{0{,}3}$$

Vi forkorter brøken på højre side og får

$$\frac{t}{0{,}3} = 1{,}2^x$$

Denne ligning har løsningen

$$x = \frac{\log\left(\frac{t}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)}$$

Under ligningen (1) står at x er alderen, så for et dyr hvis vægt er t gram, er alderen i uger

$$\text{(2)} \qquad \underline{\underline{\frac{\log\left(\frac{t}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)}}} \quad .$$

Bemærkning: Hvis $t = 6{,}7$ får vi af (2) at alderen i uger er

$$\frac{\log\left(\frac{6{,}7}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)} = 17 \quad .$$

Øvelse 6.2

For et firma gælder

$$y = 68 \cdot 1{,}14^x$$

hvor y er antal ansatte, og x er antal år efter 2002.

Hvor mange ansatte er der i 2005?

Hvilket år er antallet af ansatte ca. 150?

Øvelse 6.3

Mellem to variable x og y er der følgende sammenhæng:

$$y = 24 \cdot 0{,}73^x \; .$$

Hvad er x når y er $48k$?

(k står for et tal vi ikke har fået oplyst. Svaret er et udtryk der indeholder k).

7. Hvordan kan vi beregne ændringer i *y* og *x* for en eksponentiel sammenhæng?

<u>Eksempel 7.1:</u>

For en plante gælder

(1) $y = 50 \cdot 1{,}2^x$

hvor y er prisen i kr, og x er vægten, målt i gram.

<u>Spørgsmål (a):</u> Nu er plantens vægt 2 gram. Hvor meget højere end nu vil prisen være når planten er blevet 1 gram tungere?

<u>Svar:</u> x er 2. Spørgsmålet er: hvor meget større bliver y når x bliver 1 enhed større?

Når x er blevet 1 enheder større, så har x størrelsen 3.

Vi bestemmer y når x er 2 og 3:

Når $x = 2$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^2 = 72$.

Når $x = 3$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^3 = 86{,}4$.

Da x voksede fra 2 til 3, så voksede y altså fra 7,2 til 8,64.
Nu kan vi nemt regne ud hvor meget større y er blevet:

$86{,}4 - 72 = 14{,}4$

Der gælder altså:

Prisen steg $\underline{\underline{14{,}4 \text{ kr.}}}$ da vægten steg fra 2 gram til 3 gram.

<u>Bemærkning:</u> På samme måde som ovenfor kan vi beregne hvor meget prisen stiger når vægten stiger fra 3 gram til 4 gram. Se tabellen nedenfor.

Vi ser: <u>prisen stiger stiger ikke med samme beløb hver gang vægten stiger 1 gram</u>.

Hvis der havde været tale om en lineær sammenhæng $y = ax + b$, så ville prisen stige med a kr. hver gang vægten stiger med 1 gram.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 2 \xrightarrow{+1} & 3 \xrightarrow{+1} & 4 \\
\hline
x & 2 & 3 & 4 \\
y & 72 & 86{,}4 & 103{,}68 \\
\hline
 & 72 \xrightarrow[+14{,}4]{} & 86{,}4 \xrightarrow[+17{,}28]{} & 103{,}68
\end{array}$$

x	2	3	4
y	72	86,4	103,68

<u>Spørgsmål (b):</u> Hvor mange procent stiger prisen når vægten stiger fra 2 gram til 3 gram?

<u>Svar:</u> Prisen stiger <u>fra</u> 72 kr., og stigningen er 14,4 kr. I procent er denne stigning

$$\frac{14{,}4}{72} = 0{,}2 = 20\% .$$

Prisen stiger $\underline{\underline{20\%}}$ når vægten stiger fra 2 gram til 3 gram.

Eksemplet fortsætter på næste side.

Bemærkning: På samme måde som ovenfor kan vi beregne hvor mange procent prisen stiger når vægten stiger fra 3 gram til 4 gram. Se tabellen nedenfor.

Vi ser: prisen stiger med samme procent ved de to vægtstigninger på 1 gram.

$$\xrightarrow{+1} \qquad \xrightarrow{+1}$$

x	2	3	4
y	72	86,4	103,68

$$\xrightarrow[+20\%]{} \qquad \xrightarrow[+20\%]{}$$

I det følgende står t for et tal som endnu ikke er kendt.

Af potensreglen $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ får vi $1{,}2^{t+1} = 1{,}2^t \cdot 1{,}2^1$.

Af potensreglen $a^1 = a$ får vi $1{,}2^1 = 1{,}2$.

Spørgsmål (c): Når x starter med at have værdien t og derefter bliver gjort 1 enhed større, hvor mange procent større bliver så y ?

Svar: Værdien af x øges fra t til $t+1$.

Når $x = \underline{t}$ er $y = \underline{50 \cdot 1{,}2^t}$

Når $x = \underline{t+1}$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^{t+1} = 50 \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2^1 = \underline{50 \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2}$

Når vi ganger $50 \cdot 1{,}2^t$ med 1,2 , får vi $50 \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2$.

Dvs. y bliver 20 % større når x fra værdien t øges med 1.

Bemærkning: t kan stå for ethvert tal, så

y bliver 20 % større når vi gør x én enhed større

uanset hvilken værdi x starter med.

$$\xrightarrow{+1}$$

x		
y		

$$\xrightarrow[+20\%]{}$$

Øvelse 7.2

En pakke står i et koldt lokale. Der gælder

$$y = 83 \cdot 0{,}62^x$$

hvor y er temperaturen i $°C$ af pakkens indhold, og x er antal timer siden midnat.

(a) Hvor mange grader falder temperaturen fra kl. 1 til 2 ?

(b) Hvor mange procent falder temperaturen fra kl. 1 til 2 ?

(c) Hvor mange grader falder temperaturen fra kl. 2 til 3 ?

(d) Hvor mange procent falder temperaturen fra kl. 2 til 3 ?

Øvelse 7.3

En pakke står i et koldt lokale. Der gælder

$$y = 97 \cdot 0{,}53^x$$

hvor y er temperaturen i $°C$ af pakkens indhold, og x er antal timer siden midnat.

Hvor mange procent falder temperaturen fra kl. t til kl. $t+1$?

Eksempel 7.4

I dette eksempel står både *a*, *b* og *t* for tal som endnu ikke er oplyst.

Ligningen

(1) $y = b \cdot a^x$

viser sammenhængen mellem to variable y og x.

Spørgsmål (a): Hvilken ændring sker i værdien af y, når x ændrer værdi fra t til $t+1$?

Svar: Vi regner ud hvad y er når x er t og $t+1$:

Når $x = t$ er $y = b \cdot a^t$

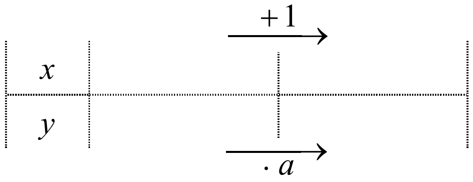
Når $x = t+1$ er $y = b \cdot a^{t+1} = b \cdot a^t \cdot a^1 = b \cdot a^t \cdot a$

Vi ser at når værdien af x ændres fra t til $t+1$, så ændres værdien af y

fra $b \cdot a^t$ til $b \cdot a^t \cdot a$.

Dvs. værdien af y $\underline{\underline{\text{bliver ganget med a}}}$ når x ændrer værdi fra t til $t+1$.

Bemærkning: Da t ikke indgår i svaret, gælder altså at ligegyldig hvilken værdi x starter med at have, så vil y blive ganget med a når x bliver 1 enhed større:



Hvis a er 0,3 , er $a - 1 = -0{,}7 = \underline{-70\%}$ så hver gang x bliver 1 enhed større, vil y blive $\underline{70\% \text{ mindre}}$.

Bemærkning: Ovenstående udregning viser at regel 7.5 (a) er korrekt.

Spørgsmål (b): Hvad er y når x er 0?

Svar: Når $x = 0$ er $y = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$.
Dvs. y er $\underline{\underline{b}}$ når x er 0 .

Bemærkning: Ovenstående udregning viser at regel 7.5 (b) er korrekt.

SÆTNING 7.5 Betydningen af *a* og *b* i $y = b \cdot a^x$.

For en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$, gælder at

(a) hver gang x bliver 1 enhed større, bliver y ganget med a .

(b) når x er 0 , er y lig b.

Egenskaben (a) formuleres normalt ved hjælp af procent. I eksempel 7.6 er vist hvordan vi kan finde procenten når vi kender a.

Eksempel 7.6

Ligningen

(2) $y = 80 \cdot 0{,}95^x$

viser sammenhængen mellem følgende to variable

(3)
$x =$ dybden (målt i cm) under væskens overflade
$y =$ lysintensiteten

Spørgsmål: I ligningen (2) står tallet 0,95. Hvad fortæller tallet 0,95 om lysintensiteten?

Svar: Reglen om betydningen af a (sætning 7.5 (a)) siger at

hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver 1 enhed større, bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{a}$.

Heri erstatter vi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ med oplysningerne fra (2) og (3):

(4) Hver gang **dybden** bliver 1 enhed større, bliver **lysintensiteten** ganget med **0,95** .

Hvis vi måler lysintensiteten et sted i væsken, og derefter måler dem 1 cm længere nede, så vil den sidste måling altså være 95 % af den første, dvs. den sidste måling er 5 % mindre end den første.

$$\underline{\underline{\text{For hver cm dybden øges, bliver lysintensiteten 5 \% mindre}}}$$

Dette er hvad tallet 0,95 fortæller om lysintensiteten.

Spørgsmål (b): I ligningen (2) står tallet 80. Hvad fortæller tallet 80 om lysstyrken?

Svar: Reglen om betydningen af b (sætning 7.5 (b)) siger at

når $\boldsymbol{x}$ er 0 , er $\boldsymbol{y}$ lig $\boldsymbol{b}$.

Heri erstatter vi $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ med oplysningerne fra (2) og (3):

Når **dybden under overfladen** er 0, er **lysstyrken** lig 80.

Vi omformulerer dette til

$$\underline{\underline{\text{Ved væskens overflade er lysstyrken 80}}} \ .$$

Dette er hvad tallet 80 i ligningen (2) fortæller os om lysstyrken.

Bemærkning: Nedenfor er anskueliggjort hvad tallene 0,95 og 80 i ligning (2) fortæller om lysstyrken:

	$\xrightarrow{+1}$	$\xrightarrow{+1}$	$\xrightarrow{+1}$
Dybde (cm)	0	1	2	3
Lysintensiteten	**80**	76	72,2	68,6
	$\xrightarrow[\mathbf{-5\%}]{}$	$\xrightarrow[\mathbf{-5\%}]{}$	$\xrightarrow[\mathbf{-5\%}]{}$	

Øvelse 7.7

Om nogle bakterier i en næringsopløsning gælder

$$y = 350 \cdot 1{,}18^x$$

hvor y er antallet af bakterier og x er antal timer efter at bakterierne blev anbragt i skålen.

Hvad fortæller tallene 350 og $1{,}18$ om antallet af bakterier?

Øvelse 7.8

I et computerspil afhænger gevinsten af den temperatur der opnås. Der gælder

$$y = 110 \cdot 0{,}98^x$$

hvor x er temperaturen (i $°C$) og y er antal mønter man vinder.

Hvad fortæller tallene 110 og $0{,}98$ om spillet?

Øvelse 7.9

Man har indsprøjtet et antal enheder af et stof i et dyr. Der gælder

$$y = 16 \cdot 0{,}83^x$$

hvor y er antal enheder i kroppen, og x er antal timer efter indsprøjtningen.

Hvad fortæller tallene 16 og $0{,}83$ om mængden af stoffet i kroppen?

Eksempel 7.10

For en plante gælder

$$y = 50 \cdot 1{,}2^x$$

hvor y er prisen i kr, og x er vægten, målt i gram.

Spørgsmål (a): Nu er plantens vægt $0{,}6$ gram. Hvor mange procent højere end nu vil prisen være når planten er blevet $0{,}4$ gram tungere?

Svar: x er 0,6. Spørgsmålet er: hvor meget større bliver y når x bliver 0,4 enheder større?

Når x er blevet 0,4 enheder større, så har x størrelsen 1.

Vi bestemmer y når x er 0,6 og 1:

Når $x = 0{,}6$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^{0{,}6} = 55{,}78$.

Når $x = 1$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^1 = 60{,}00$.

Da x voksede fra 0,6 til 1, så voksede y altså fra 55,78 til 60,00.
Nu kan vi regne ud hvor meget større y er blevet:

$$60{,}00 - 55{,}78 = 4{,}22 \ .$$

I procent er denne stigning

$$\frac{4{,}22}{55{,}78} = 0{,}076 = 7{,}6\% \ .$$

Der gælder altså:

Prisen steg $\underline{\underline{7{,}6\%}}$ da vægten steg fra 0,6 gram til 1 gram.

Bemærkning: I tabellen er anskueliggjort hvad det er vi har regnet ud ovenfor.

$$\xrightarrow{+0{,}4}$$

x	0,6	1
y	55,78	60,00

$$\xrightarrow[+7{,}6\%]{}$$

Spørgsmål (b): Nu er prisen 160 kr. Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 31 % dyrere?

Svar: y er 160. Når y er blevet 31 % større, så har y størrelsen $160 \cdot 1{,}31 = 209{,}6$.

Vi bestemmer x når y er 160 og 209,6 :

Ved at løse ligningen $160 = 50 \cdot 1{,}2^x$ får vi $x = 6{,}38$.

Ved at løse ligningen $209{,}6 = 50 \cdot 1{,}2^x$ får vi $x = 7{,}86$.

Vi udregner hvor meget større x er blevet:

$$7{,}86 - 6{,}38 = 1{,}48 \ .$$

Der gælder altså

Når planten er bevet 31 % dyrere, så vil den være $\underline{\underline{1{,}48 \text{ gram}}}$ tungere.

Øvelse 7.11

Om en plante er oplyst at

$$y = 15 \cdot 1{,}08^x$$

hvor y er højden i cm, og x er antal uger efter udplantningen.

Hvor mange cm og hvor mange procent bliver planten højere i de første 5 uger efter udplantningen?

Øvelse 7.12

Et radioaktivt stof anbringes i en beholder. Der gælder

$$y = 130 \cdot 0{,}89^x$$

hvor y er antal gram der er tilbage, og x er antal år efter at stoffet blev anbragt i beholderen.

(a) Hvor mange gram og hvor mange procent aftager mængden af det radioaktive stof i løbet af de første 10 år?

(b) Hvor mange gram og hvor mange procent aftager mængden af det radioaktive stof i løbet af de næste 10 år?

Øvelse 7.13

Et radioaktivt stof anbringes i en beholder. Der gælder

$$y = 130 \cdot 0{,}89^x$$

hvor y er antal gram der er tilbage, og x er antal år efter at stoffet blev anbragt i beholderen.

På et tidspunkt er der 110 gram tilbage. Hvor lang tid går der efter dette tidspunkt før mængden der er tilbage, er 25 % mindre?

Øvelse 7.14

Om en plante er oplyst at

$$y = 15 \cdot 1{,}08^x$$

hvor y er højden i cm, og x er antal uger efter udplantningen.

På et tidspunkt er højden 18 cm. Hvor lang tid går der efter dette tidspunkt før højden er blevet 30 % højere end den er på dette tidspunkt?

8. Fordoblingskonstant og halveringskonstant

Øvelse 8.1

Tabellen viser hvordan mængden af et stof i en opløsning er aftaget.

Timer efter at opløsningen blev lavet:	0	2	4	6	8	10	12
Mængde i gram:	14	12	10	8	7	6	5

(1) Hvis vi når opløsningen lige er lavet, stiller spørgsmålet "Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er?", hvad er så svaret?

(2) Hvis vi 2 time after at opløsningen er lavet, stiller spørgsmålet "Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er?", hvad er så svaret?

(3) Hvis vi 4 time after at opløsningen er lavet, stiller spørgsmålet "Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er?", hvad er så svaret?

Eksempel 8.2 Oplæg til emnet fordoblingskonstant.

Spørgsmål: Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

Antal uger efter køb:	0	1	2	3	4	5	6
Højde i cm:	12	15	19	24	30	38	48

På tidspunktet 2 uger efter købet spørger køberen:

(1) Om hvor mange uger er planten dobbelt så høj som nu?

Hvad er svaret?

Svar: Af tabellen ses at på tidspunktet 2 er højden 19.

Den dobbelte højde er $2 \cdot 19 = 38$.

Af tabellen ses at højden er 38 på tidspunktet 5.

Da $5 - 2 = 3$ må svaret på spørgsmålet (1) være: $\underline{\underline{3 \text{ uger}}}$.

Bemærkning: Af tabellen ses at hvis spørgsmålet (1) var stillet 1 uge efter købet, så ville vi også være kommet frem til svaret "3 uger".

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet. Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

DEFINITION 8.3 Hvad er fordoblingskonstant og halveringskonstant?

Vi ser på en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$.

Hvis sammenhængen er voksende (dvs. $a > 1$) definerer vi at

fordoblingskonstanten er det antal enheder vi skal gøre x større for at fordoble y.

Hvis sammenhængen er aftagende (dvs. $0 < a < 1$) definerer vi at

halveringskonstanten er det antal enheder vi skal gøre x større for at halvere y.

Øvelse 8.4

For en eksponentielt voksende sammenhæng med fordoblingskonstant 5 oplyses:

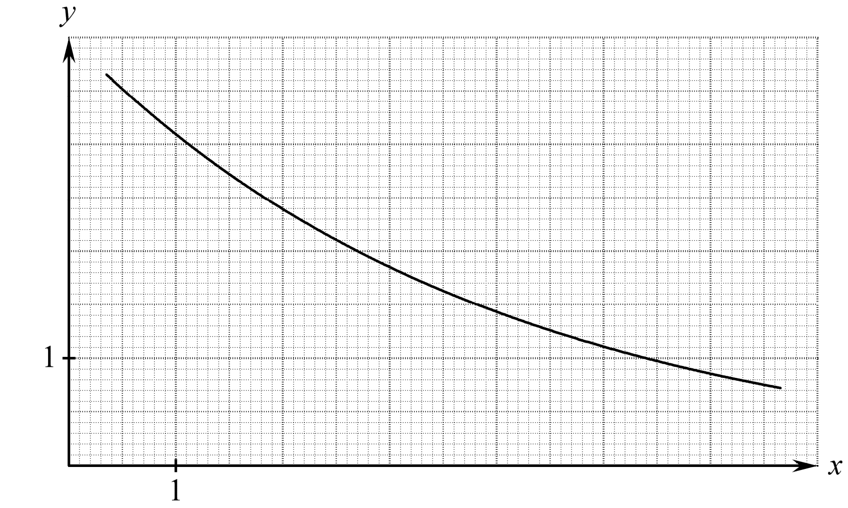
Når $x = 3$ er $y = 7$.

Brug oplysningen om fordoblingskonstant til at bestemme flere eksempler på sammenhørende værdier af x og y:

Når $x =$ _____ er $y =$ _____ . Når $x =$ _____ er $y =$ _____ .

Eksempel 8.5 Hvordan kan vi aflæse fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf?

Spørgsmål: Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.
Hvad er fordoblingskonstanten for denne sammenhæng?



Svar: Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan fx starte med $x = 1$:

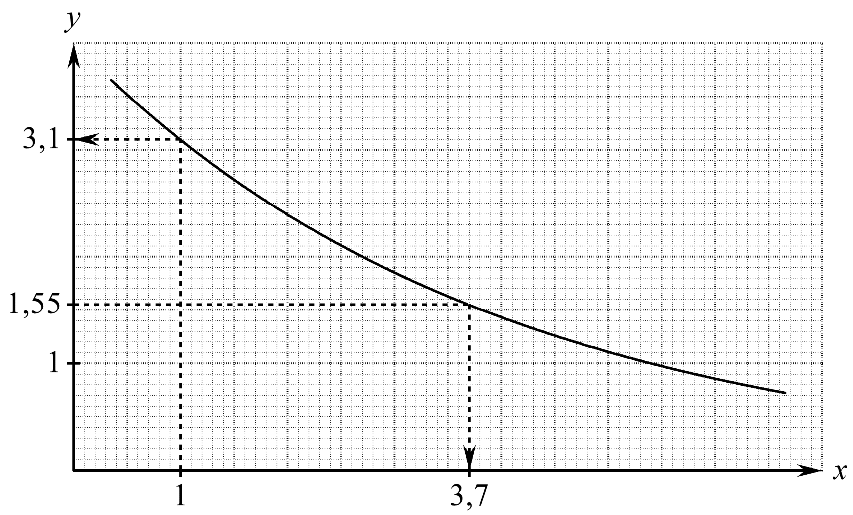
Som vist på figuren nedenfor aflæser vi at når $x = 1$ er $y = 3{,}1$.

Det halve af 3,1 er $\frac{3{,}1}{2} = 1{,}55$.

Som vist på figuren nedenfor aflæser vi at når $y = 1{,}55$ er $x = 3{,}7$.

For at halvere y skal vi altså øge x med $3{,}7 - 1 = 2{,}7$ så

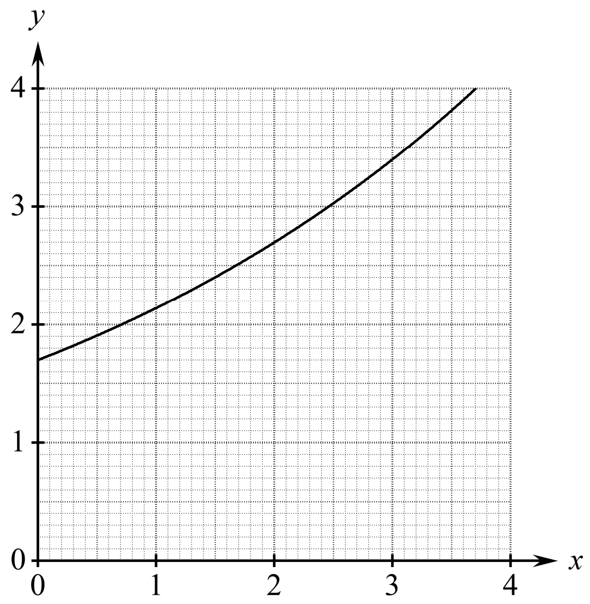
halveringskonstanten er $\underline{\underline{2{,}7}}$.

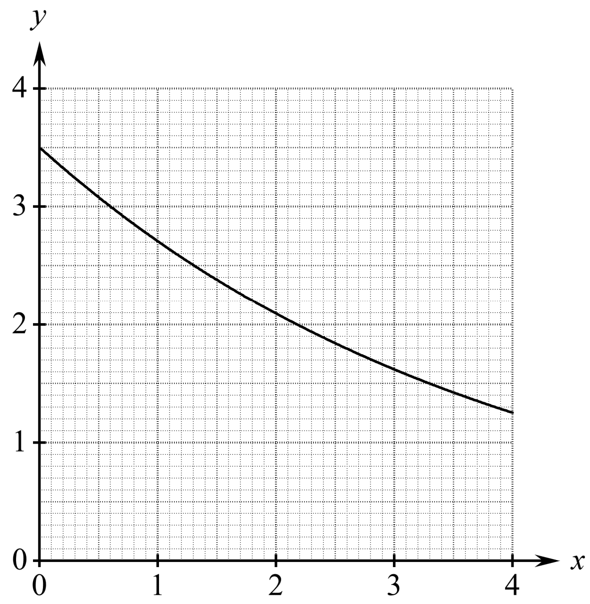


Bemærkning: Vi kan aflæse fordoblingskonstant på tilsvarende måde.

Øvelse 8.6

Figuren nedenfor til venstre viser grafen for en eksponentielt voksende sammenhæng. Aflæs fordoblingskonstanten.



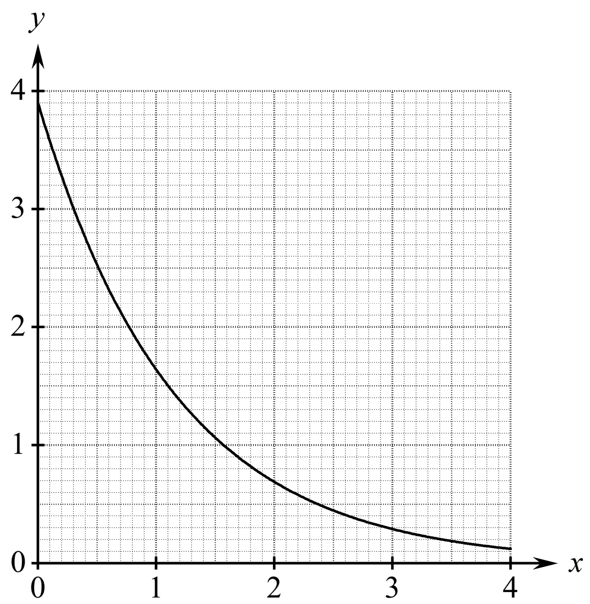


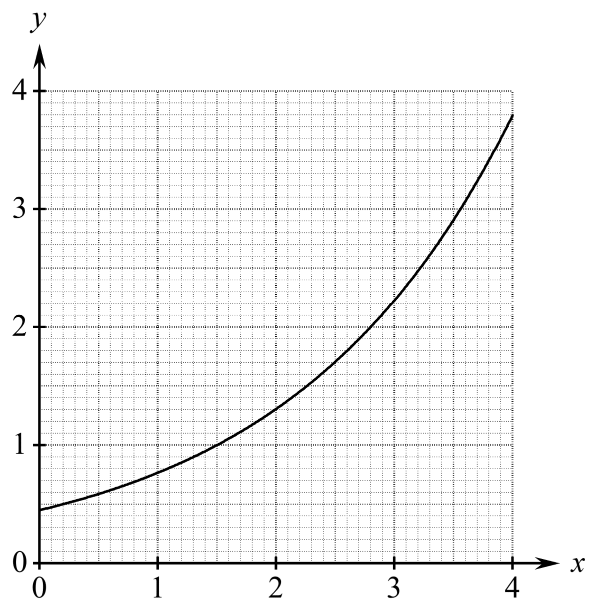
Øvelse 8.7

Figuren ovenfor til højre viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng. Aflæs halveringskonstanten.

Øvelse 8.8

Figuren nedenfor til venstre viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng. Aflæs halveringskonstanten.





Øvelse 8.9

Figuren ovenfor til højre viser grafen for en eksponentielt voksende sammenhæng. Aflæs fordoblingskonstanten.

Eksempel 8.10 Oplæg til opgave 8.11 .

Spørgsmål: En sammenhæng mellem to variable y og x er givet ved ligningen

$$y = 2{,}7 \cdot 1{,}14^x \ .$$

Hvad er fordoblingskonstanten for denne sammenhæng?

Svar: Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan fx starte med $x = 3$:

Når $x = 3$ er $y = 2{,}7 \cdot 1{,}14^3 = 4$.

Vi bestemmer hvad x er når y er det dobbelte af 4, altså 8:

$$8 = 2{,}7 \cdot 1{,}14^x$$

$$\frac{8}{2{,}7} = \frac{2{,}7 \cdot 1{,}14^x}{2{,}7}$$

$$\frac{8}{2{,}7} = 1{,}14^x$$

$$x = \frac{\log(\frac{8}{2{,}7})}{\log(1{,}14)}$$

$$x = 8{,}29 \ .$$

For at fordoble y skal vi altså øge x med $8{,}29 - 3 = 5{,}29$ så

fordoblingskonstanten er $\underline{\underline{5{,}29}}$.

Eksempel 8.11 Bevis for sætning 8.12

I det følgende lader vi a og b stå for tal der endnu ikke er oplyst.

Spørgsmål: En sammenhæng mellem to variable y og x er givet ved ligningen

(2) $\quad y = b \cdot a^x$.

Hvad er fordoblingskonstanten for denne sammenhæng?

Svar: Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan fx starte med $x = 0$. Af (2) får vi at

når $x = 0$ er $y = b$.

Det dobbelte af b er $2 \cdot b$. Vi indsætter dette i (2) og finder hvad x er når y er $2 \cdot b$:

$$2 \cdot b = b \cdot a^x$$

$$\frac{2 \cdot b}{b} = \frac{b \cdot a^x}{b}$$

$$2 = a^x$$

$$x = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Besvarelsen fortsætter på næste side!

For at fordoble y skal vi altså øge x fra 0 til $\dfrac{\log(2)}{\log(a)}$, dvs. med $\dfrac{\log(2)}{\log(a)}$, så

fordoblingskonstanten er $\underline{\underline{\dfrac{\log(2)}{\log(a)}}}$.

Bemærkning: I ovenstående svar har vi bevist første del af sætningen nedenfor. Sætningens anden del kan bevises på tilsvarende måde.

SÆTNING 8.12 Formler til beregning af fordoblingskonstant og halveringskonstant

Vi ser på en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$.

Hvis sammenhængen er voksende (dvs. $a > 1$) gælder at

fordoblingskonstanten er $\dfrac{\log(2)}{\log(a)}$.

Hvis sammenhængen er aftagende (dvs. $0 < a < 1$) gælder at

halveringskonstanten er $\dfrac{\log(0,5)}{\log(a)}$.

Eksempel 8.13 Sådan kan vi bruge sætning 8.12 .

Spørgsmål: Hvad er halveringskonstanten for sammenhængen $y = 240 \cdot 0{,}94^x$.

Svar: Vi indsætter $a = 0{,}94$ i formlen

$$\text{halveringskonstant} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(a)}$$

og får

$$\frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}94)} = 11{,}2$$

dvs. halveringskonstanten er $\underline{\underline{11{,}2}}$.

Øvelse 8.14

Bestem halveringskonstanten for den eksponentielt aftagende sammenhæng $y = 0{,}95 \cdot 0{,}23^x$.

Øvelse 8.15

Bestem fordoblingskonstanten for den eksponentielt voksende sammenhæng $y = 0{,}13 \cdot 1{,}016^x$.

Eksempel 8.16 Hvad fortæller fordoblingskonstanten?

Spørgsmål: Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

(1) x = længden (i cm)
y = omkredsen (i cm)

Det er oplyst at

(2) fordoblingskonstanten er 7 cm.

Hvad fortæller tallet 7 om omkredsen og længden?

Svar: Definitionen på fordoblingskonstant siger:

(3) **fordoblingskonstanten** er det antal enheder
vi skal gøre $\boldsymbol{x}$ større for at fordoble $\boldsymbol{y}$.

Ved at sætte oplysningerne (1) og (2) ind i (3) får vi:

(4) **7** er det antal enheder
vi skal gøre **længden** større for at fordoble **omkredsen** .

Ved at omformulere (4) får vi:

Omkredsen fordobles når længden bliver 7 cm længere .

Dette er hvad tallet 7 fortæller.

Øvelse 8.17

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = antal år efter 2000
y = antal indbyggere

Det oplyses at fordoblingskonstanten er 4,2 .

Hvad fortæller tallet 4,2 om antallet af indbyggere?

Øvelse 8.18

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = forsøgets varighed (i minutter)
y = mængde der er tilbage (målt i gram når forsøget er slut)

Det oplyses at halveringskonstanten er 18 .

Hvad fortæller tallet 18 om mængden der er tilbage?

Øvelse 8.19

På en skærm kan vi ændre en trekant ved at trække med musen. Der gælder

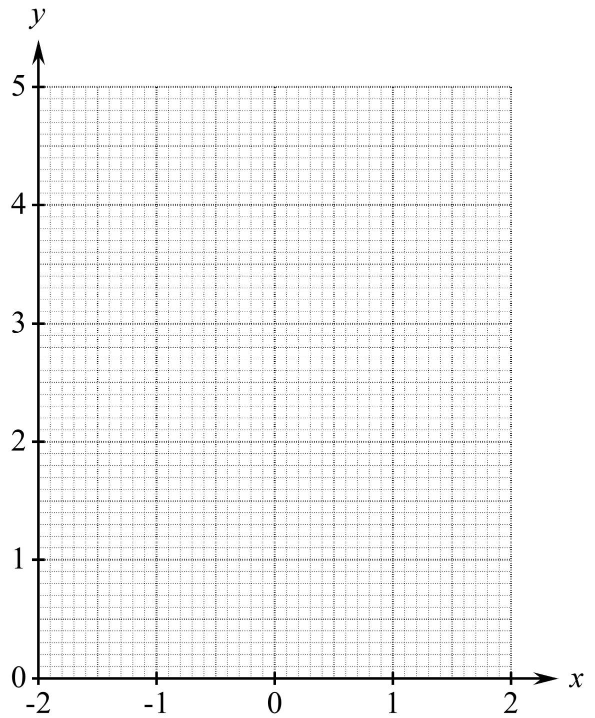
$$y = 4 \cdot 1{,}06^x$$

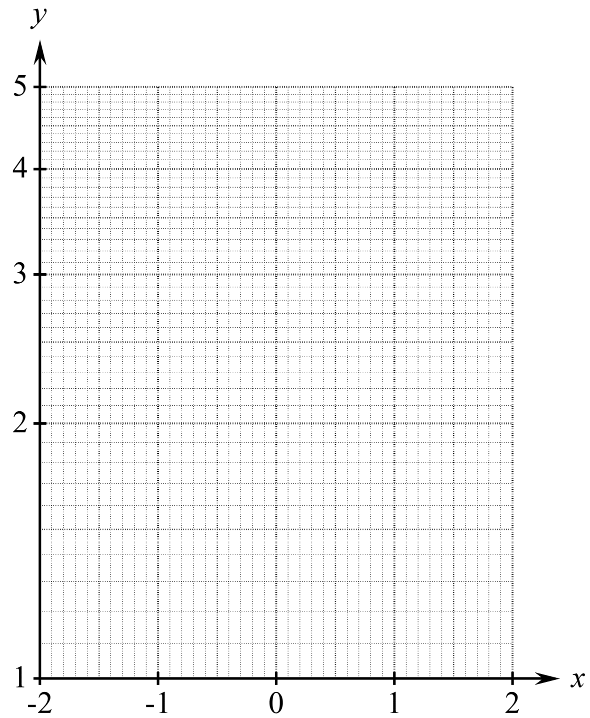
hvor y er højden (i cm) og x er grundlinjen (i cm).

Bestem fordoblingskonstanten, og skriv hvad dette tal fortæller om højden og grundlinjen.

9. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem

I koordinatsystemet nedenfor til højre er den lodrette akse en speciel type der kaldes en logaritmisk akse. Et koordinatsystem kaldes et enkeltlogaritmisk koordinatsystem hvis den vandrette akse er sædvanlig, og den lodrette er logaritmisk.

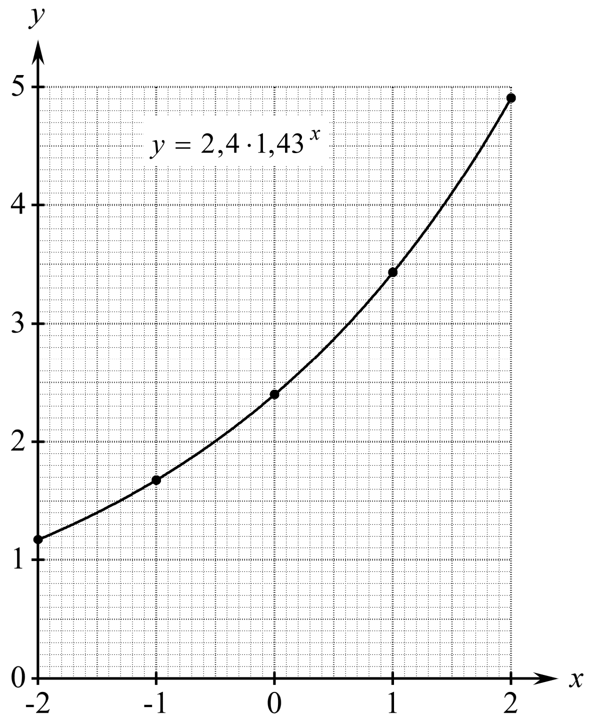


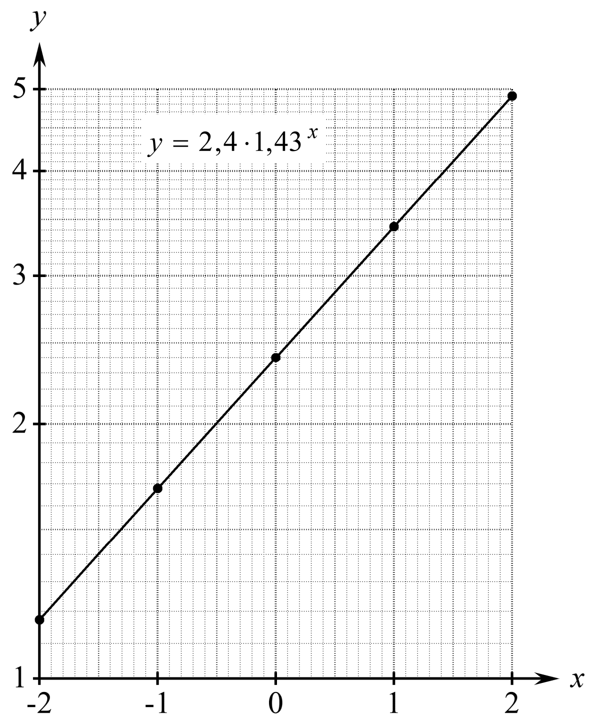


Eksempel 9.1

Spørgsmål: Tegn grafen for sammenhængen $y = 2{,}4 \cdot 1{,}43^x$ i begge koordinatsystemerne ovenfor.

Svar: Vi udregner støttepunkter og afsætter disse i begge koordinatsystemer:





SÆTNING 9.2

Grafen for en eksponentiel sammenhæng er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bemærkning 9.3

Når vi ser koordinatsystemer i aviser, tidsskrifter og lærebøger i forskellige fag, skal vi se efter om akserne er sædvanlige, så vi ikke tror at en sammenhæng er lineær når grafen er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.