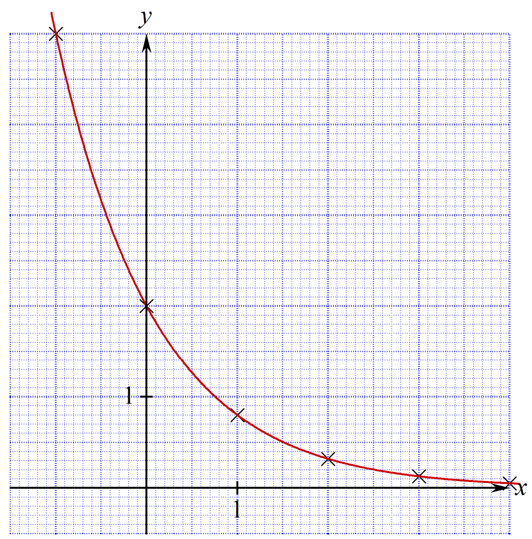
Eksponentielle sammenhænge

for C-niveau i stx



2014 Karsten Juul

1. Procenter på en ny måde

1a. T er 34% **af** 600

$$T = 34\,\% \text{ af } 600$$
$$= 600 \cdot 0{,}34 \qquad \text{da } 34\% = \frac{34}{100} = 0{,}34$$
$$= 204$$

Du plejer nok at udregne 34% ved at dividere med 100 og gange med 34.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,34 for at udregne 34%.

1b. S er 34% **større end** 600

$$S = 134\,\% \text{ af } 600 \qquad \text{da } 100\% + 34\% = 134\%$$
$$= 600 \cdot 1{,}34 \qquad \text{da } 134\% = \frac{134}{100} = 1{,}34$$
$$= 804$$

Når du udregner det der er 34% større end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og lægge til tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 1,34 for at udregne det der er 34% større.

1c. R er 34% **mindre end** 600

$$R = 66\,\% \text{ af } 600 \qquad \text{da } 100\% - 34\% = 66\%$$
$$= 600 \cdot 0{,}66 \qquad \text{da } 66\% = \frac{66}{100} = 0{,}66$$
$$= 396$$

Når du udregner det der er 34% mindre end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og trække fra tallet

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,66 for at udregne det der er 34% mindre.

2. Oplæg til ramme 3

Antal ansatte y skal stige 10% hvert år. $\qquad 100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1{,}10$

I år er antal ansatte $\quad y = 1000$

Om 1 år er antal ansatte $\quad y = 1000 \cdot 1{,}10 = 1100$

Om 2 år er antal ansatte $\quad y = 1000 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1210 \qquad 1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1{,}10^2$

Om 16 år er antal ansatte $\quad y = 1000 \cdot 1{,}10^{16} = 4595$

Om x år er antal ansatte $\quad \boldsymbol{y = 1000 \cdot 1{,}10^x}$

Denne ligning viser sammenhængen mellem y og x.

Vi ser at ligningen er af typen $\quad \boldsymbol{y = b \cdot a^x}$

3. Hvad er en eksponentiel sammenhæng?

En sammenhæng er eksponentiel hvis den har en ligning af typen

$$\boldsymbol{y = b \cdot a^x}$$

a og b skal være positive tal.

Alle tal kan indsættes for x. Uanset hvilket tal vi indsætter for x, så bliver resultatet y et positivt tal.

4. Hvad fortæller tallene på a's og b's pladser i ligningen $y = b \cdot a^x$?

4a. Reglen for hvad tallet a i eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ fortæller:

Når x bliver én enhed større, bliver y ganget med a.

Dette er reglen for eksponentiel vækst.

4b. Reglen for hvad tallet b i eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ fortæller:

Når x er 0, er y lig b.

5. Skriv ligning ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst

5a. Opgave (voksende)

Kl. 9 er der 275 celler, og hver time bliver antal celler 20 % større.
Skriv en ligning vi kan bruge til at udregne antallet af celler når vi kender tidspunktet.

Svar Antallet stiger med **samme procent** hver time, **så** der er en **eksponentiel sammenhæng** $y = b \cdot a^x$
hvor y = **antal celler** og x = **antal timer efter kl. 9** .

Der står: Når **antal timer** bliver én større, bliver **antal celler** 20 % større
dvs. når x bliver én større, bliver y 20 % større
så når x bliver én større, bliver y ganget med 1,20
Derfor: $a = 1{,}20$ *ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 4a)*

Der står: Når klokken er 9 er **antal celler** lig 275
dvs. når x er 0 , er y lig 275
Derfor: $b = 275$ *ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 4b)*

$y = 275 \cdot 1{,}20^x$ hvor y = antal celler og x = antal timer efter kl. 9

5b. Opgave (aftagende)

Den 1. maj er afgiften 860 kr. Afgiften nedsættes med 2,5 % pr. uge
Skriv en ligning vi kan bruge til at udregne afgiften når vi kender tidspunktet.

Svar Afgiften falder med **samme procent** hver uge, **så** der er en **eksponentiel sammenhæng** $y = b \cdot a^x$
hvor y = **afgiften i kr.** og x = **antal uger efter 1.maj** .

Der står: Når **antal uger** bliver én større, bliver **afgiften** 2,5 % mindre
dvs. når x bliver én større, bliver y 2,5 % mindre
så når x bliver én større, bliver y ganget med 0,975
Derfor: $a = 0{,}975$ *ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 4a)*

Der står: Den 1. maj er **afgiften** lig 860 kr.
dvs. når x er 0 , er y lig 860
Derfor: $b = 860$ *ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 4b)*

$y = 860 \cdot 0{,}975^x$ hvor y = afgiften i kr. og x = antal uger efter 1. maj

6. Skriv hvad *a* og *b* i $y = b \cdot a^x$ fortæller

6a. Opgave Om en figur på skærmen gælder at $y = 300 \cdot 1{,}072^x$ hvor
(voksende) x = temperaturen og y = arealet i cm^2
Hvad fortæller tallene 300 og 1,072 om figuren?

Svar Ligningen er af typen $y = b \cdot a^x$.

Når x bliver én enhed større, bliver y ganget med a *ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 4a)*
Dvs. Når **temperaturen** bliver én grad højere, bliver **arealet** ganget med 1,072 .
Så Når **temperaturen** bliver én grad højere, bliver **arealet** 7,2% større.
Dette er hvad tallet 1,072 fortæller om figuren.

De 7,2% blev udregnet sådan: Start: 100% $100\% \cdot 1{,}072 = 107{,}2\%$ $107{,}2\% - 100\% = 7{,}2\%$

Når x er 0 , er y lig b . *ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 4b)*
Dvs. Når **temperaturen** er 0 grader, er **arealet** 300 cm^2.
Dette er hvad tallet 300 fortæller om figuren.

6b. Opgave Antallet af dyr ændres sådan at $y = 270 \cdot 0{,}90^x$ hvor
(aftagende) x = antal dage efter 1. juni og y = antal dyr
Hvad fortæller tallene 270 og 0,90 om antallet af dyr?

Svar Ligningen er af typen $y = b \cdot a^x$.

Når x bliver én enhed større, bliver y ganget med a *ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 4a)*
Dvs. Når **antal dage** bliver én større, bliver **antal dyr** ganget med 0,90 .
Så Når **antal dage** bliver én større, bliver **antal dyr** 10% mindre.
Dvs. Hver dag bliver antallet af dyr 10% mindre.
Dette er hvad tallet 0,90 fortæller om antallet af dyr.

De 10% blev udregnet sådan: Start: 100% $100\% \cdot 0{,}90 = 90\%$ $90\% - 100\% = -10\%$

Når x er 0 , er y lig b . *ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 4b)*
Dvs. Når **antal dage** er 0, er **antal dyr** 270 .
Dvs. Den 1. juni er antallet af dyr 270 .
Dette er hvad tallet 270 fortæller om figuren.

7. Grafer for $y = b \cdot a^x$

7a. Eksempel Vi vil undersøge grafen for $y = 2 \cdot 0{,}4^x$.
Ligningen er af typen $y = b \cdot a^x$.

Når $x = 0$ er $y = \mathbf{2}$ *regel for hvad b fortæller*

Vi afsætter dette som et kryds på figuren.

Når $x = 1$ er $y = \mathbf{2} \cdot 0{,}4 = \mathbf{0{,}8}$ *regel for hvad a fortæller*

Vi afsætter dette som et kryds på figuren.

Når $x = 2$ er $y = \mathbf{0{,}8} \cdot 0{,}4 = \mathbf{0{,}32}$ *regel for hvad a fortæller*

Hver gang vi gør x én større, skal vi gange y med 0,4 , så

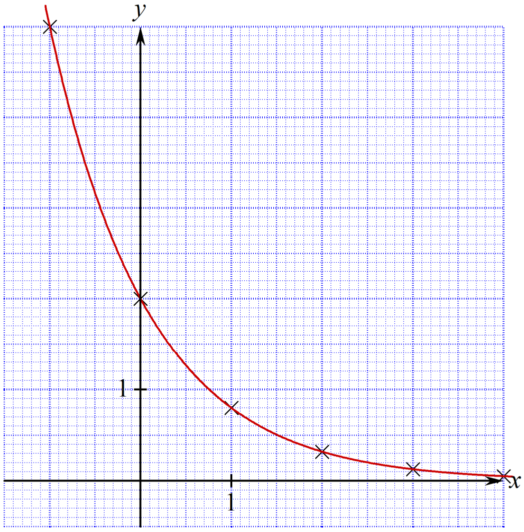
y bliver aldrig 0, men kan komme så tæt det skal være på 0.

Når vi gør x én mindre, så skal vi dividere y med 0,4 så

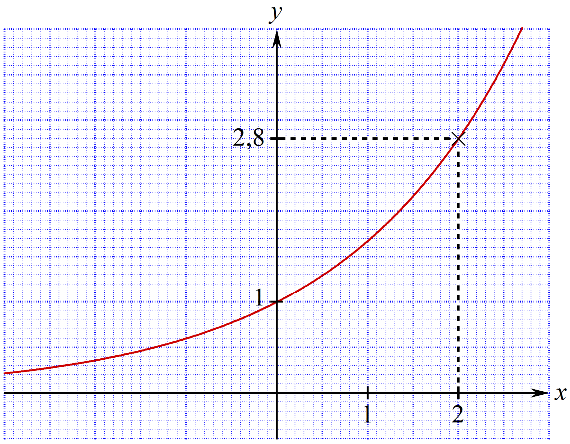
når $x = -1$ er $y = \mathbf{2} : 0{,}4 = \mathbf{5}$ *regel for hvad a fortæller*

Hver gang vi gør x én mindre, bliver y større.

y kan blive så stor det skal være.



Figuren viser grafen for en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$.



7b. Opgave Hvad er y når x er 2 ?

Svar Vi finder det punkt på grafen hvor x er 2.
Vi aflæser at for dette punkt er y lig 2,8 .
Denne aflæsning er vist på figuren.
Når x er 2 , er $y = 2{,}8$.

7c. Opgave Hvad er x når y er 2,8 ?

Svar Vi finder det punkt på grafen hvor y er 2,8 .
Vi aflæser at for dette punkt er x lig 2 .
Denne aflæsning er vist på figuren.
Når y er 2,8 , er $x = 2$.

8. Udregn x eller y i $y = b \cdot a^x$ i tekstopgave

8a. Opgave (bestem y)

For nogle dyr gælder $y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$.
hvor y er vægten, målt i gram, og x er alderen, målt i uger.
Hvad er vægten af et dyr hvis alder er 13 uger?

Svar

$y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$

$y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^{13}$ $\quad$ x er **alderen** , og **alderen** er **13**

$y = 3{,}2098$ $\quad$ *udregnet af Nspire*

vægten er y , og y er **3,2098**

Et dyr hvis alder er 13 uger, har vægten 3,2 gram .

8b. Opgave (bestem x)

For nogle dyr gælder $y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$.
hvor y er vægten, målt i gram, og x er alderen, målt i uger.
Hvilken alder har et dyr hvis vægt er 6,7 gram?

Svar

$y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$

$6{,}7 = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$ $\quad$ y er **vægten** , og **vægten** er **6,7**

Nspire løser denne ligning mht. x og får $x = 17{,}0363$

$\text{solve}\left(6.7=0.3 \cdot (1.2)^x, x\right) \blacktriangleright x=17.0363$

alderen er x , og x er **17,0363**

Et dyr hvis vægt er 6,7 gram, har har alderen 17 uger .

9. Udregn a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra tabel

Opgave Tabellen viser antallet af indbyggere i et område i perioden 2000-2005.

År	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Antal (i tusinder)	8,5	8,8	9,1	9,4	9,8	10,2

Udviklingen kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen $y = b \cdot a^x$
hvor y er antallet af indbyggere (målt i tusinder), og x er antal år efter 2000.
Udregn a og b.

Svar Ud fra den givne tabel laver vi tabellen nedenfor hvor årstallene er erstattet af værdierne af x.

x	0	1	2	3	4	5
y	8,5	8,8	9,1	9,4	9,8	10,2

Nspire laver eksponentiel regression på hele tabellen og får $y = 8{,}47906 \cdot 1{,}03686^x$
dvs. $a = 1{,}037$ og $b = 8{,}48$.

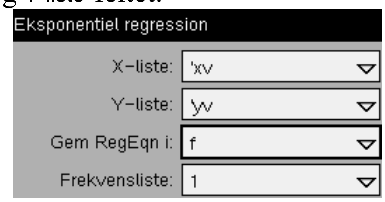
Bemærk Hvis vi ikke bruger hele tabellen, så dur besvarelsen ikke.
Grafen for $y = 8{,}47906 \cdot 1{,}03686^x$ går ikke gennem tabel-punkterne,
men det er den eksponentielle graf der passer bedst med punkterne.

Sådan laver vi regression på Nspire

Vi vælger et vindue af typen "Lister og Regneark" og taster tabellen som vist til højre. I menuen vælger vi Statistik/Statistiske beregninger.../Eksponentiel regression...
Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nederst til højre.
Du skal vælge (ikke taste) det der står i X-liste-feltet og Y-liste-feltet.

A xv	B yv
0	8.5
1	8.8
2	9.1
3	9.4
4	9.8
5	10.2

Når vi i et matematikfelt i et notevindue taster $f(x)$ og trykker på enter
får vi $f(x) = 8.47906 \cdot (1.03686)^x$



10. Udregn a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra to oplysninger i tekstopgave

Opgave En plantes vægt kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen $y = b \cdot a^x$
hvor y er vægt i kg, og x er år efter udplantning.
Efter 2 år er vægten 1,60 kg. Efter 5 år er vægten 4,10 kg.
Udregn a og b.

Svar Der står: Efter 2 **år** er **vægten** 1,60 kg. Efter 5 **år** er **vægten** 4,10 kg.
Dvs. Når $x = 2$ er $y = 1{,}60$. Når $x = 5$ er $y = 4{,}10$.
Dette skriver vi i tabellen.

x	2	5
y	1,60	4,10

Nspire laver eksponentiel regression på denne tabel og får $y = 0{,}854432 \cdot 1{,}36843^x$
dvs. $a = 1{,}368$ og $b = 0{,}854$.

11. Hvad er fordoblingskonstant og halveringskonstant

11a. Eksempel Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

Antal uger efter køb:	0	1	2	3	4	5	6
Højde i cm:	12	15	19	24	30	38	48

I tabellen ser vi:

1 uge efter købet er højden 15 cm.
3 uger senere er højden 30 cm, som er det dobbelte af 15 cm.

2 uger efter købet er højden 19 cm.
3 uger senere er højden 38 cm, som er det dobbelte af 19 cm.

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet.

Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

11b En eksponentielt voksende sammenhæng har en fordoblingskonstant T_2 .

Når x bliver T_2 enheder større, så bliver y fordoblet.

11c En eksponentielt aftagende sammenhæng har en halveringskonstant $T_{0,5}$.

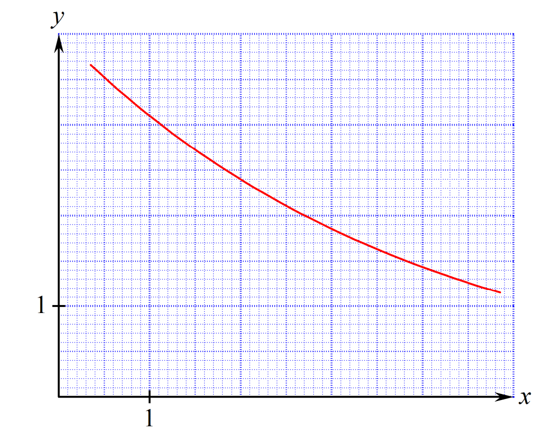
Når x bliver $T_{0,5}$ enheder større, så bliver y halveret.

12. Aflæs fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf

Opgave (halvering)

Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.

Hvad er halveringskonstanten for denne sammenhæng?



Svar

Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan f.eks. starte med $x = 1$:

Når $x = 1$ er $y = 3{,}1$ (se figur)

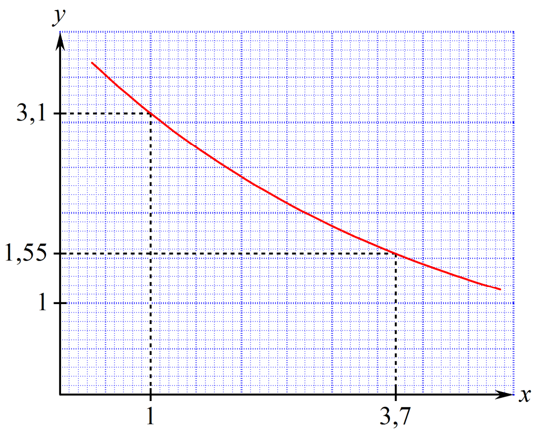
Det halve af $3{,}1$ er $\frac{3{,}1}{2} = 1{,}55$.

Når $y = 1{,}55$ er $x = 3{,}7$ (se figur)

For at halvere y skal vi altså øge x med

$$3{,}7 - 1 = 2{,}7$$

så halveringskonstanten er 2,7 .



Bemærkning (fordobling)

Hvis funktionen er eksponentielt voksende, kan fordoblingskonstanten aflæses på næsten samme måde: Vi finder to grafpunkter hvor y-koordinaten til det ene er 2 gange y-koordinaten til det andet. Forskellen på de to punkters x-koordinater er fordoblingskonstanten.

13. Skriv hvad fordoblings- og halveringskonstant fortæller

13a. Opgave Den 1. maj var der 261 syge. Antallet af syge kan med tilnærmelse beskrives ved en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ hvor x er antal dage efter 1. maj og y er antal syge. I avisen står at fordoblingskonstanten er 9 .

Hvad fortæller dette om antallet af syge?

Svar At fordoblingskonstanten er 9 betyder:

Når x bliver 9 enheder større, så bliver y fordoblet.

Dvs: Når **antal dage** bliver 9 større, så bliver **antal syge** fordoblet.

Så: Antal syge fordobles på 9 dage.

13b. Opgave Den 1. maj var der 261 syge. Antallet af syge kan med tilnærmelse beskrives ved en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ hvor x er antal dage efter 1. maj og y er antal syge. I avisen står at halveringskonstanten er 9 .

Hvad fortæller dette om antallet af syge?

Svar At halveringskonstanten er 9 betyder:

Når x bliver 9 enheder større, så bliver y halveret.

Dvs: Når **antal dage** bliver 9 større, så bliver **antal syge** halveret.

Så: Antal syge halveres på 9 dage.

14. Udregn y-værdier med fordoblingskonstant eller halveringskonstant

14a. Opgave For en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ er $T_2 = 3$. Gør direkte brug af dette til at udfylde de tomme felter.

x		1		
y		7		

Svar

+3 +3 +3

x	–2	1	4	7
y	3,5	7	14	28

·2 ·2 ·2

14b. Opgave For en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ er $T_{0,5} = 1,6$. Gør direkte brug af dette til at udfylde de tomme felter.

x		4,8		
y		6		

Svar

+1,6 +1,6 +1,6

x	3,2	4,8	6,4	8
y	12	6	3	1,5

·0,5 ·0,5 ·0,5

15. Udregn T_2 og $T_{0,5}$ når vi kender ligningen $y = b \cdot a^x$

For sammenhængen $y = b \cdot a^x$ gælder

15a. Regel Hvis sammenhængen er voksende $(a > 1)$, er $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$

15b. Regel Hvis sammenhængen er aftagende $(0 < a < 1)$, er $T_{0,5} = \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(a)}$

15c. Eksempel For $y = 12,5 \cdot 1,063^x$ er $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,063)} = 11,3454 \approx 11,3$

16. Renteformlen

16a. Hvorfor gælder renteformlen?

Vi sætter 34 000 kr. i banken
til en fast årlig rente $r = 5{,}8\,\% = 0{,}058$
så hvert år stiger beløbet til $100\,\% + 5{,}8\,\% = 105{,}8\,\%$ af hvad det var året før
Dvs. hvert år ganges beløbet med $1{,}058 = 1 + r$ da $105{,}8\,\% = 105{,}8 : 100 = 1{,}058$

Beløbene på kontoen kan vi beregne sådan:

Start: 34000
Efter 1 år: $34000 \cdot 1{,}058$
Efter 2 år: $34000 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058$
⋮
Efter 6 år: $34000 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058$

Beløbet $34000 \cdot 1{,}058$ skal ganges med $1{,}058$ for at få det beløb der er $5{,}8\,\%$ større.

Dette kan vi skrive kortere ved hjælp af potens:

Efter 6 år: $34000 \cdot 1{,}058^6 = 47686{,}22$

Man bruger ofte følgende symboler:

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

$n = 6$ er antallet af terminer.
$r = 5{,}8\,\% = 0{,}058$ er den procent der tilskrives i rente hver termin.
$K_0 = 34000$ er startkapitalen.
$K = 47686{,}22$ er kapitalen efter 6 terminer.

En termin er den tid der går mellem to rentetilskrivninger. I dette eksempel er en termin lig et år.

16b. Renteformlen

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

n er antallet af terminer.
r er den procent der tilskrives i rente hver termin.
K_0 er startkapitalen.
K er kapitalen efter n terminer.

16c. Fire opgavetyper

I renteformlen kan hvert af tallene n, r, K_0 og K være ukendt. Det ukendte af disse tal kan vi udregne når vi kender de tre andre. Dvs, der er fire typer opgaver med renteformlen.
Hvis K er ukendt, skal vi udregne ligningens højreside. Ellers skal vi løse ligningen.

16d. Opgave

Vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8 %.
Efter hvor mange år er beløbet vokset til 70 000 kr.?

Svar

Vi bruger renteformlen $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ hvor

Antal terminer	n = det tal vi skal bestemme
Renteprocent	$r = 5{,}8\,\% = 0{,}058$
Startkapital	$K_0 = 34\,000$
Kapital efter n terminer	$K = 70\,000$

Vi indsætter disse tal i renteformlen: $70\,000 = 34\,000 \cdot (1+0{,}058)^n$

Nspire løser denne ligning mht. n og får $n = 12{,}8083$, så

efter 13 år er beløbet vokset til ca. 70 000 kr.

16e. Beløbet på kontoen vokser eksponentielt

Hvis vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8 %,
så følger af renteformlen at kapitalen K efter n år er $\boldsymbol{K = 34\,000 \cdot 1{,}058^n}$
Denne sammenhæng er eksponentiel, dvs. af typen $\boldsymbol{y = b \cdot a^x}$,
vi har blot brugt $\boldsymbol{K}$ og $\boldsymbol{n}$ i stedet for $\boldsymbol{y}$ og $\boldsymbol{x}$, så beløbet på kontoen vokser eksponentielt.

17. Nogle regler om potenser

Regler

17a. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ **17b.** $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ **17c.** $a^0 = 1$ **17d.** $a^1 = a$

Eksempler

17e. $5 \cdot 4^{x+1} = 5 \cdot 4^x \cdot 4^1 = 5 \cdot 4^x \cdot 4 = 20 \cdot 4^x$ **17f.** $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$ **17g.** $7 \cdot x^0 = 7 \cdot 1 = 7$

18. Bevis-opgaver

I de beviser vi laver her, må vi kun bruge regler for omformning af udtryk med tal og bogstaver.
Vi må ikke bruge reglerne om hvad a og b fortæller. Det er sådanne regler vi skal bevise.

18a. Opgave For $y = 4 \cdot 3^x$ gælder:

Når vi indsætter 0 og 2 for x, så får vi to y'er hvor det andet y er 9 gange det første.

Bevis denne påstand.

Svar

1. Først sætter vi 0 ind for x i $y = 4 \cdot 3^x$ og finder y:

   Når $x = 0$ er $y = 4 \cdot 3^0 = 4 \cdot 1 = 4$

2. Så sætter vi 2 ind for x i $y = 4 \cdot 3^x$ og finder y:

   Når $x = 2$ er $y = 4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

3. Så ganger vi det første y med 9:

   $4 \cdot 9 = 36$

4. Vi ser at resultatet er det andet y, så vi har bevist påstanden.

18b. Opgave Uanset hvilket tal vi skriver på b's plads i $y = b \cdot 3^x$, så gælder:

Når vi ændrer x fra 0 til 2, bliver y ganget med 9.

Bevis denne påstand.

Svar

1. Først sætter vi 0 ind for x i $y = b \cdot 3^x$ og finder y:

   Når $x = 0$ er $y = b \cdot 3^0 = b \cdot 1 = b$

2. Så sætter vi 2 ind for x i $y = b \cdot 3^x$ og finder y:

   Når $x = 2$ er $y = b \cdot 3^2 = b \cdot 9 = 9b$

3. Så ganger vi det første y med 9:

   $b \cdot 9 = 9b$

4. Vi ser at resultatet er det andet y, så vi har bevist påstanden.

18c. Opgave For $y = 4 \cdot 3^x$ gælder:

Når vi indsætter et tal for x og derefter indsætter det tal der er to enheder større,
så får vi to y'er hvor det andet er 9 gange det første.

Bevis denne påstand.

Svar

1. Det tal vi starter med at indsætte for x, kalder vi t.
2. Det tal der er 2 enheder større, er $t+2$.
3. Først sætter vi t ind for x i $y = 4 \cdot 3^x$ og finder y:

   Når $x = t$ er $y = 4 \cdot 3^t$

4. Så sætter vi $t+2$ ind for x i $y = 4 \cdot 3^x$ og finder y:

   Når $x = t+2$ er $y = 4 \cdot 3^{t+2} = 4 \cdot 3^t \cdot 3^2 = 36 \cdot 3^t$ da $3^{t+2} = 3^t \cdot 3^2$ ifølge en potensregel

5. Så ganger vi det første y med 9:

   $4 \cdot 3^t \cdot 9 = 4 \cdot 9 \cdot 3^t = 36 \cdot 3^t$

6. Vi ser at resultatet er det andet y, så vi har bevist påstanden.

19. Bevis for reglerne om hvad tallene a og b i $y = b \cdot a^x$ fortæller

Regel For $y = b \cdot a^x$ gælder:
Når vi indsætter et tal for x og derefter indsætter det tal der er 1 enhed større,
så får vi to y'er hvor det andet er a gange det første.

Bevis
1. Det tal vi starter med at indsætte for x, kalder vi t.
2. Det tal der er 1 enhed større, er $t+1$.
3. Først sætter vi t ind for x i $y = 4 \cdot 3^x$ og finder y:
   Når $x = t$ er $y = b \cdot a^t$
4. Så sætter vi $t+1$ ind for x i $y = b \cdot a^x$ og finder y:
   Når $x = t+1$ er $y = b \cdot a^{t+1} = b \cdot a^t \cdot a^1 = b \cdot a^t \cdot a$ da $a^{t+1} = a^t \cdot a^1$ ifølge en potensregel
5. Så ganger vi det første y med a:
   $b \cdot a^t \cdot a = b \cdot a^t \cdot a$
6. Vi ser at resultatet er det andet y, så vi har bevist påstanden.

Regel For $y = b \cdot a^x$ gælder:
Når vi indsætter 0 for x, så får vi et y der er lig b.

Bevis Når $x = 0$ er $y = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$, så vi har bevist påstanden.