Eksponentielle sammenhænge

$$y = \mathbf{80} \cdot \mathbf{0{,}95}^{x}$$

$\xrightarrow{+1}$ $\xrightarrow{+1}$

x	0	1	2
y	**80**	76	72,2

$\xrightarrow[\mathbf{-5\%}]{}$ $\xrightarrow[\mathbf{-5\%}]{}$

2009 Karsten Juul

Dette hæfte er en fortsættelse af hæftet "Lineære sammenhænge, 2008".

Indhold

14. Hvad er en eksponentiel sammenhæng? 53
15. Stigning og fald angivet i procent 55
16. Potenser 59
17. Renteformlen 62
18. Hvordan ser grafen ud for en eksponentiel sammenhæng? 64
19. Opgaver hvor vi skal bestemme x eller y i $y = b \cdot a^x$ 67
20. Hvordan kan vi beregne ændringer i y og x for en eksponentiel sammenhæng? 69
21. Hvad fortæller a og b om den eksponentielle sammenhæng $y = b \cdot a^x$? 73
22. Hvordan kan vi opskrive en ligning for en eksponentiel sammenhæng? 76
23. Fordoblingskonstant og halveringskonstant 77

Nyere hæfter:

http://mat1.dk/kort_om_eksponentielle_sammenhaenge.pdf 1/5-11

http://mat1.dk/oevelser_til_haeftet_kort_om_eksponentielle_sammenhaenge.pdf 29/5-11

http://mat1.dk/renteformlen.pdf 1/5-11

Eksponentielle sammenhænge
1. udgave 2009

Dette hæfte kan downloades fra

www.mat1.dk

Afsnit 14. Hvad er en eksponentiel sammenhæng?

DEFINITION 14.1 Hvad er en eksponentiel sammenhæng?

Vi kalder en sammenhæng for eksponentiel hvis den kan beskrives ved en ligning der fås ved at indsætte bestemte tal for a og b i ligningen

(1) $y = b \cdot a^x$

hvor både a og b skal være positive.

Opgave 14.2: Ligningen

(2) $y = 1{,}2^x \cdot 1{,}4$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = b \cdot a^x$ for at få sammenhængen (2)?

Svar: Vi skal sætte

$$\underline{\underline{a = 1{,}2}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 1{,}4}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 1{,}4 \cdot 1{,}2^x$$

som kan omskrives til ligningen (2).

Bemærkning 14.3 Bevis for at en sammenhæng er eksponentiel

I svaret på 14.2 viste vi at sammenhængen (2) kan fås ved at sætte bestemte tal ind for a og b i ligning (1) i definition 14.1 . Ifølge definition 14.1 har vi altså vist at (2) er en eksponentiel sammenhæng.

Opgave 14.4: Ligningen

(3) $y = \dfrac{3^x}{2}$

viser en sammenhæng mellem to variable y og x.

Hvilke tal skal vi indsætte for a og b i ligningen $y = b \cdot a^x$ for at få sammenhængen (3)?

Svar: For at få sammenhængen (3) skal vi i ligningen $y = b \cdot a^x$ sætte

$$\underline{\underline{a = 3}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = \tfrac{1}{2}}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3^x$$

som vi kan omskrive til ligningen (3) da

$$\frac{1}{2} \cdot 3^x = \frac{1 \cdot 3^x}{2} = \frac{3^x}{2} \; .$$

Øvelse 14.5

Hver af følgende sammenhænge kan vi få ved at sætte tal ind for a og b i ligningen $y = b \cdot a^x$.
Angiv i hvert tilfælde hvad der skal indsættes for a og b .

(1) $y = 0{,}25 \cdot 1{,}09^x$ (2) $y = 0{,}25^x \cdot 1{,}09$ (3) $y = 1{,}09^x \cdot 0{,}25$ (4) $y = \dfrac{1{,}09^x}{4}$.

Eksempel 14.6: Vi køber en plante. På købstidspunktet er højden (i cm)

10

Hver uge ganges højden med 1,15. Efter 1 uge må højden derfor være

$10 \cdot 1{,}15$

Dette tal skal ganges med 1,15 for at få højden efter 2 uger:

$10 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}15$

Osv.

Opgave 14.7: Hvordan kan højden (i cm) efter 3 uger beregnes? (*Se eksempel 14.6*).

Svar: $10 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}15$

Opgave 14.8: Hvordan kan højden (i cm) efter 24 uger beregnes? (*Se eksempel 14.6*).

Svar: $10 \cdot 1{,}15^{24}$

Opgave 14.9: Sæt

y = højden (i cm)

x = antal uger efter købet

Opskriv en formel til beregning af y når x er kendt. (*Se eksempel 14.6*).

Svar: $y = 10 \cdot 1{,}15^x$

Bemærkning: Sammenhængen $y = 10 \cdot 1{,}15^x$ er eksponentiel ifølge definition 14.1 da den er på formen $y = b \cdot a^x$ med $b = 10$ og $a = 1{,}15$.

Bemærkning: Plantens højde vokser med samme procent hver uge. Begrundelse: Når vi vil udregne tallet der er 15 % større end et givet tal, så kan vi gøre det ved at gange det givne tal med 1,15.

Øvelse 14.10

Ved starten af et udsalg er prisen 600 kr. Hver dag ganges prisen med $0{,}85$. Der gælder $600 \cdot 0{,}85 = 510$, så 1 dag efter udsalgets start vil prisen være 510 kr.

(1) Hvordan kan vi beregne prisen 3 dage efter udsalgets start?

(2) Hvordan kan vi beregne prisen 20 dage efter udsalgets start?

(3) Vi lader y stå for prisen (i kr.) og x for antallet af dage efter udsalgets start.
Opskriv en formel til beregning af y når x er kendt.

Afsnit 15. Stigning og fald angivet i procent

Bemærkning 15.1 **Hvorfor regner vi med procenter?**

Prisen på en vare er steget 2 kr. Er dette meget eller lidt?

Hvis den oprindelige pris var 4 kr., så er stigningen 50 % (dvs. 50 hundrededele) af prisen.
Hvis den oprindelige pris var 200 kr., så er stigningen 1 % (dvs. 1 hundrededel) af prisen.

I dette tilfælde fortæller den absolutte stigning 2 kr. ikke om stigningen er stor.

Den procentvise stigning fortæller hvor stor stigningen er i forhold til prisen, og det er det vi i dette tilfælde skal vide for at afgøre om stigningen er stor.

På en sti der går op ad en skråning, stiger højden over havets overflade 20 cm for hvert skridt.

Her er det den absolutte stigning 20 cm der er afgørende for om stigningen er stor.

Hvis vi er 100 cm over havets overflade, er stigningen på 20 %.
Hvis vi er 2 000 cm over havets overflade, så er stigningen på 1 %.

Den procentvise stigning fortæller ikke om stigningen er stor.

Eksempel 15.2 **Hvad betyder % ?**

16 % betyder **16 hundrededele**, altså $\mathbf{\frac{16}{100}}$.

Tegnet % læses *procent*.

Opgave 15.3: **Hvor mange procent er værdien steget?**

En variabels værdi stiger fra 64 til 80. Hvor mange procent er værdien steget?

Svar: Den absolutte stigning er $80-64=16$.

I procent er dette $\frac{16}{64}=0{,}25=\frac{25}{100}=25\%$.

Værdien er steget $\underline{\underline{25\,\%}}$ når den er steget fra 64 til 80.

Bemærkning: Når vi siger at værdien er steget 25%, så mener vi at den absolutte stigning 16 udgør 25 hundrededele **af startværdien** 64.

Opgave 15.4: **Hvor mange procent er værdien faldet?**

En variabels værdi falder fra 80 til 64. Hvor mange procent er værdien faldet?

Svar: Det absolutte fald er $80-64=16$.

I procent er dette $\frac{16}{80}=0{,}20=\frac{20}{100}=20\%$

Værdien er faldet $\underline{\underline{20\,\%}}$ når den er faldet fra 80 til 64.

Bemærkning: Når vi siger at værdien er faldet 20%, så mener vi at det absolutte fald 16 udgør 20 hundrededele **af startværdien** 80.

Opgave 15.5: **Bestem slutværdi når <u>stigningen er angivet i procent</u> og <u>startværdi er kendt.</u>**

På et tidspunkt er værdien af en variabel 250. Herefter stiger værdien 32%. Hvad bliver variablens nye værdi?

svar: **Metode 1:**

$32\,\%$ af 250 er $250\cdot\dfrac{32}{100} = 80$.

$250+80 = 330$.

$\underline{\underline{330}}$ er det tal der er 32% større end 250.

Metode 2:

$100\% + 32\% = 132\% = \dfrac{132}{100} = 1{,}32$

$250\cdot 1{,}32 = 330$

$\underline{\underline{330}}$ er det tal der er 32% større end 250.

Bemærkning: Begrundelse for at metode 2 virker:

250 er 100 % af 250, så 32 % mere er 132 % af 250.

Bemærkning: I nogle opgaver er det uoverkommeligt at bruge metode 1, så metode 2 er nødvendig. Desuden er metode 2 nødvendig for at forstå ligningen for en eksponentiel sammenhæng.

Opgave 15.6: **Bestem slutværdi når <u>faldet er angivet i procent</u> og <u>startværdi er kendt.</u>**

På et tidspunkt er værdien af en variabel 400. Herefter falder værdien 24 %. Hvad bliver variablens nye værdi?

Svar: **Metode 1:**

$24\,\%$ af 400 er $400\cdot\dfrac{24}{100} = 96$.

$400-96 = 304$.

$\underline{\underline{304}}$ er det tal der er 24 % mindre end 400.

Metode 2:

$100\% - 24\% = 76\% = \dfrac{76}{100} = 0{,}76$

$400\cdot 0{,}76 = 304$

$\underline{\underline{304}}$ er det tal der er 12 % mindre end 400.

Bemærkning: Begrundelse for at metode 2 virker:

400 er 100 % af 400, så 24 % mindre er 76 % af 400.

Bemærkning: I nogle opgaver er det uoverkommeligt at bruge metode 1, så metode 2 er nødvendig. Desuden er metode 2 nødvendig for at forstå ligningen for en eksponentiel sammenhæng.

Opgave 15. 7: Sluttallet fås ved at gange starttallet med 2,30 .
Hvor mange procent er sluttallet større end starttallet?

Svar:

$$2{,}30 = \frac{230}{100} = 230\%$$

$$230\% - 100\% = 130\%$$

Sluttallet er $\underline{\underline{130\%}}$ større end starttallet.

Bemærkning: Starttallet er 100% af starttallet, og sluttallet er 230% af starttallet, så forskellen er 130% af starttallet.

Opgave 15. 8 Sluttallet fås ved at gange starttallet med 0,18 .
Hvor mange procent er sluttallet mindre end starttallet?

Svar:

$$0{,}18 = \frac{18}{100} = 18\%$$

$$100\% - 18\% = 82\%$$

Sluttallet er $\underline{\underline{82\%}}$ mindre end starttallet.

Bemærkning: Starttallet er 100% af starttallet, og sluttallet er 18% af starttallet, så forskellen er 82% af starttallet.

Øvelse 15.9

Bestem hvor mange procent værdien af en variabel stiger når dens værdi stiger

(1) fra 1200 til 1500 (2) fra 1200 til 3000 (3) fra 0,20 til 0,35 .

Øvelse 15.10

Bestem hvor mange procent værdien af en variabel falder når dens værdi falder

(1) fra 1500 til 1200 (2) fra 50 til 45 (3) fra 45 til 40 .

Øvelse 15.11

Bestem hvor mange procent værdien af en variabel falder eller stiger når dens værdi ændres

(1) fra 200 til 800 (2) fra 800 til 200 (3) fra 1200 til 1800 .

Øvelse 15.12

Vis hvordan den metode 2 fra 15.5 og 15.6 kan bruges til at beregne

(1) det tal der er 60% større end 500.
(2) det tal der er 60% mindre end 800.
(3) det tal der er 140% større end 500.
(4) det tal der er 4,2% mindre end 20.

Øvelse 15.13

Brug metode 2 fra 15.5 og 15.6 i denne opgave.

(1) Bestem det tal der er 10% større end 300.

(2) Bestem det tal der er 10% større end 330.

(3) Bestem det tal der er 20% større end 300.

(4) Nu er højden 300 mm, og hver dag bliver højden 10% større end dagen før.
Hvad er højden om 14 dage?

Øvelse 15.14

Brug metode 2 fra 15.5 og 15.6 i denne øvelse.

(1) Bestem det tal der er 40% mindre end 500.

(2) Bestem det tal der er 40% mindre end 300.

(3) Bestem det tal der er 80% mindre end 500.

(4) Nu er der 500 gram af et stof, og hver måned forsvinder 40% af den mængde der var ved månedens start. Hvor mange gram er der tilbage om 12 måneder?

Øvelse 15.15

I denne øvelse står bogstaverne A og B for to tal. Det er oplyst at $A \cdot 1{,}085 = B$.
Hvor mange procent er B større end A?

Øvelse 15.16

I denne øvelse står bogstaverne A og B for to tal. Det er oplyst at $A \cdot 0{,}925 = B$.
Hvor mange procent er B mindre end A?

Øvelse 15.17

Angiv i hvert af følgende tilfælde hvor mange procent B større eller mindre end A.

(1) $A \cdot 1{,}1 = B$ (2) $A \cdot 0{,}11 = B$ (3) $A \cdot 2 = B$ (4) $A \cdot 1{,}234 = B$ (5) $A \cdot 0{,}086 = B$.

Afsnit 16. Potenser

SÆTNING 16.1 Nogle regler om potenser

Når a, c, r og s står for tal hvor a og c er positive, gælder

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

osv.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$(a \cdot c)^r = a^r \cdot c^r$$

Når $a^r = c$ er $a = \sqrt[r]{c}$

Når $a^r = c$ er $r = \dfrac{\log(c)}{\log(a)}$, $a \neq 1$

<u>**Opgave 16.2:**</u> Omskriv følgende udtryk så det bliver nemmere at indtaste på lommeregneren:

$$B = 2500 \cdot 1{,}203 \cdot 1{,}203 \cdot 1{,}203 \cdot 1{,}203 \ .$$

<u>Svar:</u> $B = \underline{\underline{2500 \cdot 1{,}203^4}}$.

<u>**Øvelse 16.3**</u>

Omskriv følgende udtryk så de bliver nemmere at indtaste på lommeregneren:

$A = 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}027$ $C = 2 \cdot 300 \cdot 0{,}9261 \cdot 0{,}9261 \cdot 0{,}9261$.

<u>**Opgave 16.4:**</u> Reducér $3 \cdot 2^{t+1}$.

<u>Svar:</u> $3 \cdot 2^{t+1} = 3 \cdot 2^t \cdot 2^1 = 3 \cdot 2^t \cdot 2 = 6 \cdot 2^t$

<u>**Øvelse 16.5**</u>

Reducér hvert af udtrykkene $2 \cdot 0{,}5^{t+1}$ og $0{,}2 \cdot 2^{t+2}$.

Opgave 16.6: Hvad skal vi gange $1{,}3^t$ med for at få $1{,}3^{t+1}$?

Svar: $1{,}3^{t+1} \;=\; 1{,}3^t \cdot 1{,}3^1 \;=\; 1{,}3^t \cdot 1{,}3$

Heraf ser vi at vi skal gange $1{,}3^t$ med $\underline{\underline{1{,}3}}$ for at få $1{,}3^{t+1}$.

Øvelse 16.7

Hvad skal vi gange $4 \cdot 3^t$ med for at få $4 \cdot 3^{t+2}$?

Opgave 16.8: Reducér $10 \cdot (3 \cdot t)^2$.

Svar: $10 \cdot (3 \cdot t)^2 \;=\; 10 \cdot 3^2 \cdot t^2 \;=\; 10 \cdot 9 \cdot t^2 \;=\; 90t^2$.

Øvelse 16.9

Reducér hvert af udtrykkene $(t \cdot 2)^3 \cdot 0{,}5$ og $4(0{,}5t)^2$.

Opgave 16.10: Hvad skal vi gange t^2 med for at få $(4t)^2$?

Svar: $(4t)^2 \;=\; 4^2 \cdot t^2 \;=\; 16 \cdot t^2$

Heraf ser vi at vi skal gange t^2 med 16 for at få $(4t)^2$.

Øvelse 16.11

Hvad skal vi gange $0{,}7t^3$ med for at få $0{,}7(2t)^3$?

Opgave 16.12: Bestem x i ligningen $3x^{2,4} = 4{,}65$.

Svar: Vi vil bestemme x i ligningen

$$3x^{2,4} = 4{,}65$$

Ved at dividere begge sider med 3 får vi

$$x^{2,4} = 1{,}55$$

Heraf får vi

$$x = \sqrt[2,4]{1{,}55}$$

Ved at udregne højresiden på lommeregneren får vi at

$$x = 1{,}2003\cdots$$

dvs.

$$x = \underline{\underline{1{,}20}} \,.$$

Øvelse 16.13

Bestem x i ligningen $5{,}5x^3 = 62{,}7$.

<u>Opgave 16.14:</u> Bestem x i ligningen $10 \cdot 1{,}05^x = 11{,}3$.

Svar: Vi vil bestemme x i ligningen

$$10 \cdot 1{,}05^x = 11{,}3$$

Ved at dividere begge sider med 10 får vi

$$1{,}05^x = 1{,}13$$

Heraf får vi

$$x = \frac{\log(1{,}13)}{\log(1{,}05)}$$

Ved at udregne højresiden på lommeregner får vi

$$x = 2{,}5049\cdots$$

dvs.

$$x = \underline{\underline{2{,}5}}$$

<u>Øvelse 16.15</u>

Bestem x i ligningen $2 \cdot 1{,}5^x = 4{,}5$.

<u>Øvelse 16.16</u>

Løs hver af ligningerne $3^x = 2$ og $x^3 = 2$.

Afsnit 17. Renteformlen

<u>Eksempel 17.1</u> Forklaring af renteformlen

Vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8%.

Vi bruger metode 2 fra opgave 15.5:

$$100\% + 5{,}8\% = 105{,}8\% = \frac{105{,}8}{100} = 1{,}058$$

Heraf ser vi:

Vi skal gange beløbet på kontoen med 1,058 for at få det beløb der er 5,8% større.

Beløbene på kontoen kan beregnes sådan:

Beløbet $34\,000 \cdot 1{,}058$ skal ganges med 1,058 for at få det beløb der er $5{,}8\%$ større.

Start:	$34\,000$
Efter 1 år:	$34\,000 \cdot 1{,}058$
Efter 2 år:	$34\,000 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058$
$\vdots$	
Efter 6 år:	$34\,000 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}058$

Dette kan skrives kortere ved hjælp af potens:

(1) Efter 6 år: $34\,000 \cdot 1{,}058^6 \;=\; 47\,686{,}22$

I forbindelse med oplysninger som (1) bruges ofte følgende symboler:

$$K \;=\; K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

En termin er den tid der går mellem to rentetilskrivninger. I dette eksempel er en termin lig et år.

$n \;=\; 6$ er antallet af terminer.

$r \;=\; 5{,}8\% \;=\; 0{,}058$ er den procent der tilskrives i rente hver termin.

$K_0 \;=\; 34\,000$ er startkapitalen.

$K \;=\; 47\,686{,}22$ er kapitalen efter 6 terminer.

<u>SÆTNING 17.2</u> Renteformlen

Hvis vi indsætter et beløb på en konto, så er

$$K \;=\; K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

n er antallet af terminer.

r er den procent der tilskrives i rente hver termin.

K_0 er startkapitalen.

K er kapitalen efter n terminer.

Opgave 17.3: Vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8%. Efter hvor mange år er beløbet vokset til 70 000 kr.?

Svar: Vi bruger renteformlen

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

hvor

Antal terminer	n = det tal vi skal bestemme.
Renteprocenten	$r = 5{,}8\% = 0{,}058$
Startkapitalen	$K_0 = 34\,000$
Kapital efter n terminer	$K = 70\,000$

Ved at sætte disse tal ind i renteformlen får vi

$$70\,000 = 34\,000 \cdot (1+0{,}058)^n$$

Vi dividerer begge sider med $34\,000$:

$$\frac{70\,000}{34\,000} = 1{,}058^n$$

Heraf får vi

$$n = \frac{\log\left(\frac{70\,000}{34\,000}\right)}{\log(1{,}058)}$$

dvs.

$$n = 12{,}8$$

så

efter $\underline{\underline{13 \text{ år}}}$ er beløbet vokset til ca. 70 000 kr.

Øvelse 17.4

I hvert af tilfældene (1)-(4) skal du gøre følgende:

Skriv for hvert af symbolerne n, r, K_0 og K i renteformlen talværdien eller skriv at den er ukendt, og bestem det ukendte tal.

(1) Vi sætter 5 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 6 %.
Efter hvor mange år er beløbet vokset til 8 000 kr.?

(2) Vi sætter et beløb i banken til en fast årlig rente på 4,5 %. Efter 8 år er beløbet vokset til 1280 kr.
Hvor stort et beløb satte vi i banken?

(3) Vi sætter 500 kr. i banken til en fast årlig rente på 3 %.
Hvor stort et beløb står på kontoen efter efter 16 år?

(4) Vi sætter 700 kr. i banken til en fast årlig renteprocent. Efter 15 år er beløbet vokset til 1067 kr.
Bestem den årlige renteprocent.

Bemærkning 17.5 Beløbet på kontoen vokser eksponentielt

Hvis vi sætter 34 000 kr. i banken til en fast årlig rente på 5,8%, så følger af renteformlen at kapitalen K efter n år er

$$K = 34\,000 \cdot 1{,}058^n \,.$$

Ifølge definition 14.1 er denne sammenhæng eksponentiel. Vi har blot brugt K og n i stedet for y og x.

Afsnit 18. Hvordan ser grafen ud for en eksponentiel sammenhæng?

Eksempel 18.1 Følgende tre sammenhænge er alle eksponentielle (ifølge definition 14.1):

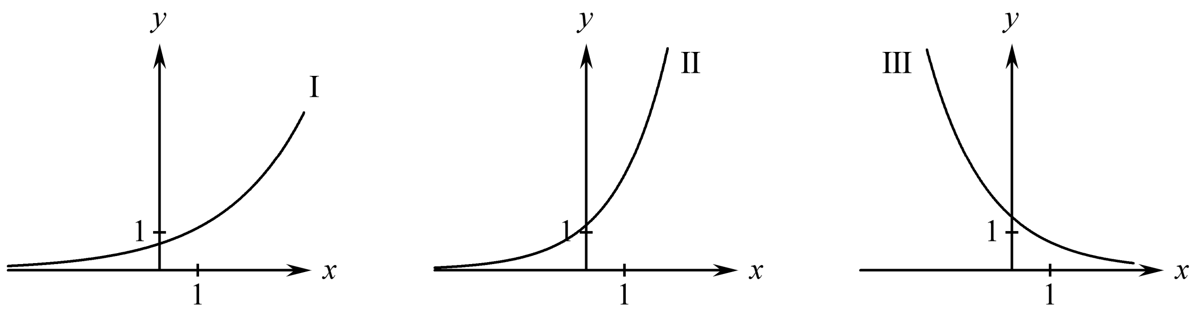
I: $y = 0{,}7 \cdot 1{,}6^x$

II: $y = 1{,}2 \cdot 2{,}1^x$

III: $y = 1{,}4 \cdot 0{,}53^x$

Opgave 18.2: Tegn graferne for de tre sammenhænge.

Svar: Ved hjælp af et elektronisk hjælpemiddel eller ved støttepunktsmetoden fra afsnit 4 kan vi tegne graferne:



SÆTNING 18.3 Hvordan ser grafen ud for en eksponentiel sammenhæng?

En eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ er

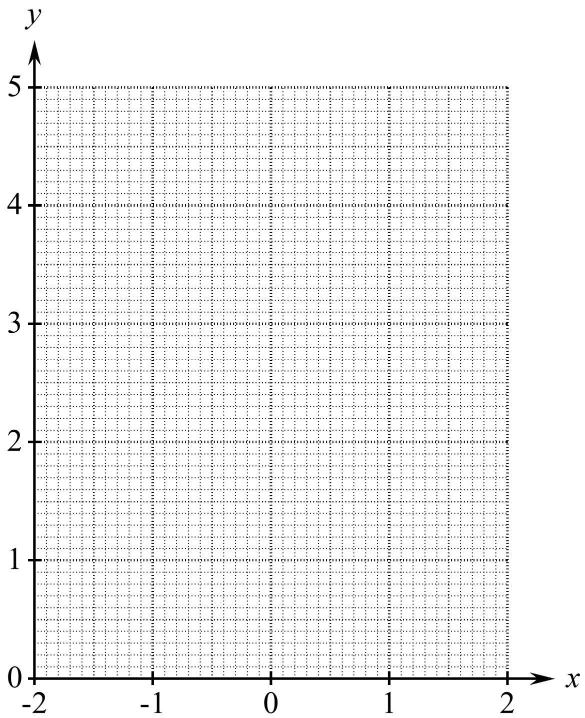
aftagende hvis a er mellem 0 og 1 og voksende hvis a er større end 1.

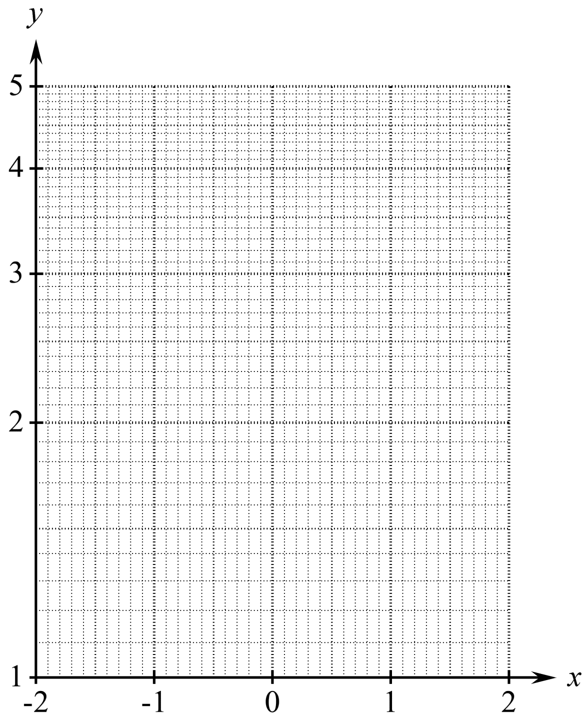
Grafen for en eksponentiel sammenhæng

ligger over x-aksen, men kommer vilkårlig tæt på x-aksen.

Enkeltlogaritmisk koordinatsystem

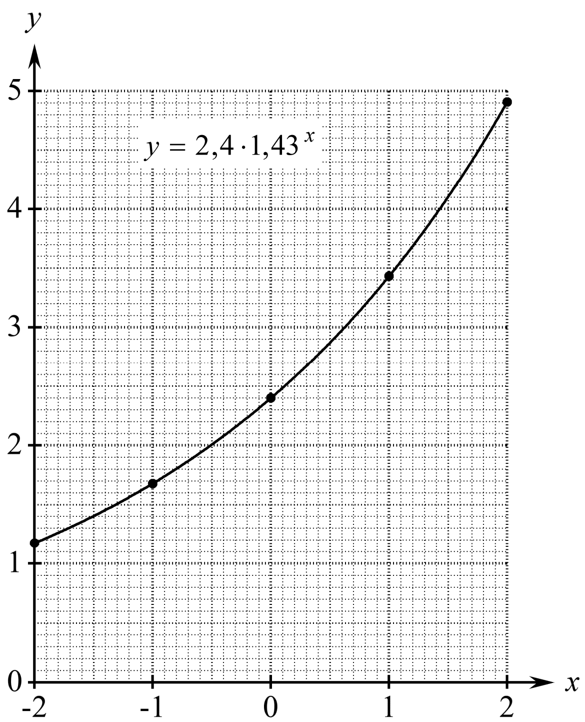
I koordinatsystemet nedenfor til højre er den lodrette akse en speciel type der kaldes en logaritmisk akse. Et koordinatsystem kaldes et enkeltlogaritmisk koordinatsystem hvis den vandrette akse er sædvanlig, og den lodrette er logaritmisk.

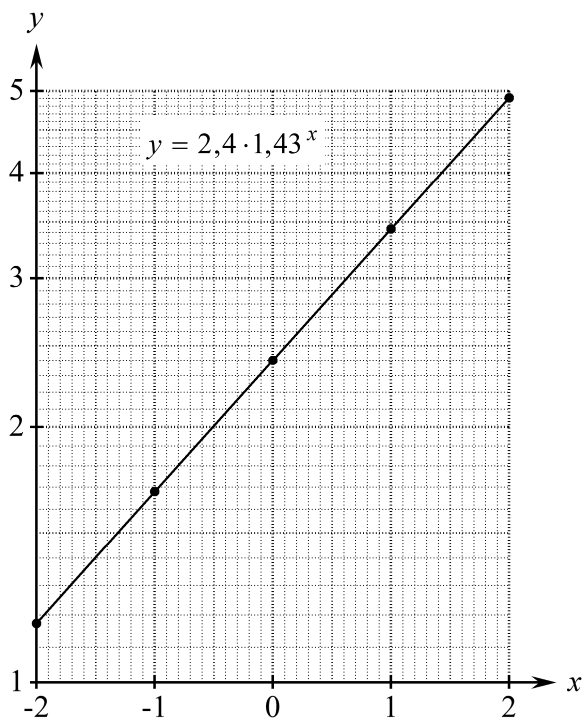




Opgave 18.4: Tegn grafen for sammenhængen $y = 2{,}4 \cdot 1{,}43^x$ i begge koordinatsystemerne ovenfor.

Svar: Vi bruger metoden fra afsnit 4 og afsætter de fundne støttepunkter i begge koordinatsystemer:





SÆTNING 18.5

Grafen for en eksponentiel sammenhæng er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bemærkning

Når vi ser koordinatsystemer i aviser, tidsskrifter og lærebøger i forskellige fag, skal vi se efter om akserne er sædvanlige, så vi ikke tror at en sammenhæng er lineær når grafen er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Afsnit 19. Opgaver hvor vi skal bestemme x eller y i $y = b \cdot a^x$

Eksempel 19.1: For nogle dyr gælder

(1) $\quad y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$

hvor y er vægten, målt i gram, og x er alderen, målt i uger.

Opgave 19.2: Hvad er vægten af et dyr hvis alder er 13 uger? (*Se eksempel 19.1*)

Svar: Under ligningen (1) står at x er alderen, så da det oplyste tal 13 er alderen, skal 13 indsættes på x's plads:

$$y = 0{,}3 \cdot 1{,}2^{13}$$

Ved at udregne dette får vi

$$y = 3{,}2$$

Under ligningen (1) står at y er vægten, så

et 13 uger gammelt dyr vejer $\underline{\underline{3{,}2\ \text{g}}}$.

Opgave 19.3: Hvilken alder har et dyr hvis vægt er 6,7 g? (*Se eksempel 19.1*)

Svar: Under ligningen (1) står at y er vægten, så da det oplyste tal 6,7 er vægten, skal 6,7 indsættes på y's plads:

$$6{,}7 = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$$

For at løse denne ligning starter vi med at dividere begge sider med 0,3:

$$\frac{6{,}7}{0{,}3} = \frac{0{,}3 \cdot 1{,}2^x}{0{,}3}$$

Vi forkorter brøken på højre side og får

$$\frac{6{,}7}{0{,}3} = 1{,}2^x$$

Denne ligning har løsningen

$$x = \frac{\log\left(\frac{6{,}7}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)}$$

Ved at udregne dette får vi

$$x = 17$$

Under ligningen (1) står at x er alderen, så

et dyr hvis vægt er $6{,}7\,\text{g}$, har alderen $\underline{\underline{17\ \text{uger}}}$.

Øvelse 19.4

For et firma gælder

$$y = 68 \cdot 1{,}14^x$$

hvor y er antal ansatte, og x er antal år efter 2002.

Hvor mange ansatte er der i 2005?

Hvilket år er antallet af ansatte ca. 150?

I det følgende lader vi t stå for et tal som endnu ikke er oplyst.

Opgave 19.5: Hvilken alder har et dyr hvis vægt er t gram? (*Se eksempel 19.1*)

Svar: Under ligningen (1) står at y er vægten, så da det oplyste tal t er en vægt, skal t indsættes på y's plads:

$$t = 0{,}3 \cdot 1{,}2^x$$

For at løse denne ligning starter vi med at dividere begge sider med 0,3:

$$\frac{t}{0{,}3} = \frac{0{,}3 \cdot 1{,}2^x}{0{,}3}$$

Vi forkorter brøken på højre side og får

$$\frac{t}{0{,}3} = 1{,}2^x$$

Denne ligning har løsningen

$$x = \frac{\log\left(\frac{t}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)}$$

Under ligningen (1) står at x er alderen, så for et dyr hvis vægt er t gram, er alderen i uger

$$\underline{\underline{\frac{\log\left(\frac{t}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)}}} \quad . \tag{2}$$

Bemærkning: Hvis $t = 6{,}7$ får vi af (2) at alderen i uger er

$$\frac{\log\left(\frac{6{,}7}{0{,}3}\right)}{\log(1{,}2)} = 17 \quad .$$

Øvelse 19.6

Mellem to variable x og y er der følgende sammenhæng:

$$y = 24 \cdot 0{,}73^x \; .$$

Hvad er x når y er $48k$?

(k står for et tal vi ikke har fået oplyst. Svaret er et udtryk der indeholder k).

Afsnit 20. Hvordan kan vi beregne ændringer i *y* og *x* for en eksponentiel sammenhæng?

<u>Eksempel 20.1:</u> For en plante gælder

(1) $y = 50 \cdot 1{,}2^x$

hvor y er prisen i kr, og x er vægten, målt i gram.

<u>Opgave 20.2:</u> Nu er plantens vægt 2 gram. Hvor meget højere end nu vil prisen være når planten er blevet 1 gram tungere? (*Se eksempel 20.1*)

<u>Svar:</u> x er 2. Spørgsmålet er: hvor meget større bliver y når x bliver 1 enhed større?

Når x er blevet 1 enheder større, så har x størrelsen 3.

Vi bestemmer y når x er 2 og 3:

Når $x = 2$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^2 = 72$.

Når $x = 3$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^3 = 86{,}4$.

Da x voksede fra 2 til 3, så voksede y altså fra 7,2 til 8,64.
Nu kan vi nemt regne ud hvor meget større y er blevet:

$$86{,}4 - 72 = 14{,}4$$

Der gælder altså:

Prisen steg $\underline{\underline{14{,}4\text{ kr.}}}$ da vægten steg fra 2 gram til 3 gram.

<u>Bemærkning:</u> På samme måde som ovenfor kan vi beregne hvor meget prisen stiger når vægten stiger fra 3 gram til 4 gram. Se tabellen nedenfor.

Vi ser: <u>prisen stiger stiger ikke med samme beløb hver gang vægten stiger 1 gram</u>.

Hvis der havde været tale om en lineær sammenhæng $y = ax + b$, så ville prisen stige med a kr. hver gang vægten stiger med 1 gram.

$$\xrightarrow{+1} \qquad \xrightarrow{+1}$$

x	2	3	4
y	72	86,4	103,68

$$\xrightarrow[+14{,}4]{} \qquad \xrightarrow[+17{,}28]{}$$

I tabellen på foregående side kan vi se hvor mange kr. prisen stiger når vægten stiger fra 2 gram til 3 gram, og fra 3 gram til 4 gram.

Opgave 20.3: Hvor mange procent stiger prisen når vægten stiger fra 2 gram til 3 gram? (*Se eksempel 20.1*)

Svar: Prisen stiger fra 72 kr., og stigningen er 14,4 kr. I procent er denne stigning

$$\frac{14{,}4}{72} = 0{,}2 = 20\%.$$

Prisen stiger $\underline{\underline{20\%}}$ når vægten stiger fra 2 gram til 3 gram.

Bemærkning: På samme måde som ovenfor kan vi beregne hvor mange procent prisen stiger når vægten stiger fra 3 gram til 4 gram. Se tabellen nedenfor.

Vi ser: prisen stiger med samme procent ved de to vægtstigninger på 1 gram.

	$\xrightarrow{+1}$		$\xrightarrow{+1}$	
x	2		3	4
y	72		86,4	103,68
	$\xrightarrow[+20\%]{}$		$\xrightarrow[+20\%]{}$	

Øvelse 20.4

En pakke står i et koldt lokale. Der gælder

$$y = 83 \cdot 0{,}62^x$$

hvor y er temperaturen i $°C$ af pakkens indhold, og x er antal timer siden midnat.

Hvor mange grader og hvor mange procent falder temperaturen fra kl. 1 til 2 ?

Hvor mange grader og hvor mange procent falder temperaturen fra kl. 2 til 3 ?

I følgende opgave står t for et tal som endnu ikke er kendt. Vi ser stadig på sammenhængen (1) i eksempel 20.1.

Opgave 20.5: Når x starter med at have værdien t og derefter bliver gjort 1 enhed større, hvor mange procent større bliver så y ?

Af potensreglen $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ får vi $1{,}2^{t+1} = 1{,}2^t \cdot 1{,}2^1$.

Af potensreglen $a^1 = a$ får vi $1{,}2^1 = 1{,}2$.

Svar: Værdien af x øges fra t til $t+1$.

Når $x = \underline{t}$ er $y = \underline{50 \cdot 1{,}2^t}$

Når $x = \underline{t+1}$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^{t+1} = 50 \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2^1 = \underline{50 \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2}$

Når vi ganger $50 \cdot 1{,}2^t$ med 1,2 , får vi $50 \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2$.

Dvs. y bliver 20% større når x fra værdien t øges med 1.

Bemærkning: t kan stå for ethvert tal, så

y bliver 20% større når vi gør x én enhed større

uanset hvilken værdi x starter med.

	$\xrightarrow{+1}$	
x		
y		
	$\xrightarrow[+20\%]{}$	

Øvelse 20.6

En pakke står i et koldt lokale. Der gælder

$$y = 97 \cdot 0{,}53^x$$

hvor y er temperaturen i $°\mathrm{C}$ af pakkens indhold, og x er antal timer siden midnat.

Hvor mange procent falder temperaturen fra kl. t til kl. $t+1$?

Opgave 20.7: Nu er plantens vægt $0{,}6$ gram. Hvor mange procent højere end nu vil prisen være når planten er blevet $0{,}4$ gram tungere? (*Se eksempel 20.1*)

Svar: x er 0,6. Spørgsmålet er: hvor meget større bliver y når x bliver 0,4 enheder større?

Når x er blevet 0,4 enheder større, så har x størrelsen 1.

Vi bestemmer y når x er 0,6 og 1:

Når $x = 0{,}6$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^{0{,}6} = 55{,}78$.

Når $x = 1$ er $y = 50 \cdot 1{,}2^1 = 60{,}00$.

Da x voksede fra 0,6 til 1, så voksede y altså fra 55,78 til 60,00.
Nu kan vi regne ud hvor meget større y er blevet:

$$60{,}00 - 55{,}78 = 4{,}22 \ .$$

I procent er denne stigning

$$\frac{4{,}22}{55{,}78} = 0{,}076 = 7{,}6\% \ .$$

Der gælder altså:

Prisen steg $\underline{\underline{7{,}6\%}}$ da vægten steg fra 0,6 gram til 1 gram.

Bemærkning: I tabellen er anskueliggjort hvad det er vi har regnet ud ovenfor.

$\xrightarrow{+\,0{,}4}$

x	0,6	1
y	55,78	60,00

$\xrightarrow[+\,7{,}6\%]{}$

Øvelse 20.8

Om en plante er oplyst at

$$y = 15 \cdot 1{,}08^x$$

hvor y er højden i cm, og x er antal uger efter udplantningen.

Hvor mange cm og hvor mange procent bliver planten højere i de første 5 uger efter udplantningen?

Øvelse 20.9

Et radioaktivt stof anbringes i en beholder. Der gælder

$$y = 130 \cdot 0{,}89^x$$

hvor y er antal gram der er tilbage, og x er antal år efter at stoffet blev anbragt i beholderen.

Hvor mange gram og hvor mange procent aftager mængden af det radioaktive stof i løbet af de første 10 år?

Hvor mange gram og hvor mange procent aftager mængden af det radioaktive stof i løbet af de næste 10 år?

Opgave 20.10: Nu er prisen 160 kr. Hvor meget tungere end nu vil planten være når den er blevet 31 % dyrere? (*Se eksempel 20.1*)

Svar: y er 160. Når y er blevet 31 % større, så har y størrelsen $160 \cdot 1{,}31 = 209{,}6$.

Vi bestemmer x når y er 160 og 209,6 :

Ved at løse ligningen $160 = 50 \cdot 1{,}2^x$ får vi $x = 6{,}38$.

Ved at løse ligningen $209{,}6 = 50 \cdot 1{,}2^x$ får vi $x = 7{,}86$.

Vi udregner hvor meget større x er blevet:

$7{,}86 - 6{,}38 = 1{,}48$.

Der gælder altså

Når planten er bevet 31 % dyrere, så vil den være $\underline{\underline{1{,}48 \text{ gram}}}$ tungere.

Øvelse 20.11

Et radioaktivt stof anbringes i en beholder. Der gælder

$$y = 130 \cdot 0{,}89^x$$

hvor y er antal gram der er tilbage, og x er antal år efter at stoffet blev anbragt i beholderen.

På et tidspunkt er der 110 gram tilbage. Hvor lang tid går der efter dette tidspunkt før mængden der er tilbage, er 25 % mindre?

Øvelse 20.12

Om en plante er oplyst at

$$y = 15 \cdot 1{,}08^x$$

hvor y er højden i cm, og x er antal uger efter udplantningen.

På et tidspunkt er højden 18 cm. Hvor lang tid går der efter dette tidspunkt før højden er blevet 30 % højere end den er på dette tidspunkt?

Afsnit 21. Hvad fortæller *a* og *b* om den eksponentielle sammenhæng $y = b \cdot a^x$?

I dette afsnit står både *a*, *b* og *t* for tal som endnu ikke er oplyst.

<u>Eksempel 21.1:</u> Ligningen

(1) $\quad y = b \cdot a^x$

viser sammenhængen mellem to variable *y* og *x*.

<u>Opgave 21.2:</u> Hvilken ændring sker i værdien af y, når x ændrer værdi fra t til $t+1$?

<u>Svar:</u> Vi regner ud hvad y er når x er t og $t+1$:

Når $x = t$ er $y = b \cdot a^t$

Når $x = t+1$ er $y = b \cdot a^{t+1} = b \cdot a^t \cdot a^1 = b \cdot a^t \cdot a$

Vi ser at når værdien af *x* ændres fra t til $t+1$, så ændres værdien af y

fra $b \cdot a^t$ til $b \cdot a^t \cdot a$.

Dvs. værdien af y $\underline{\underline{\text{bliver ganget med a}}}$ når x ændrer værdi fra t til $t+1$.

<u>Bemærkning:</u> Da *t* ikke indgår i svaret, gælder altså at ligegyldig hvilken værdi *x* starter med at have, så vil *y* blive ganget med *a* når *x* bliver 1 enhed større:

$$\xrightarrow{+1}$$

x		
y		

$$\xrightarrow[\cdot\, a]{}$$

Hvis a er $0{,}3$, er $a - 1 = -0{,}7 = \underline{-70\,\%}$ så hver gang *x* bliver 1 enhed større, vil *y* blive $\underline{70\%\ \text{mindre}}$.

<u>Bemærkning:</u> Ovenstående udregning viser at følgende regel gælder:

SÆTNING 21.3 Hvad fortæller *a* i $y = b \cdot a^x$?

Hvis $y = b \cdot a^x$, fortæller *a* at

hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver 1 enhed større, bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{a}$.

Dette formuleres normalt ved hjælp af procent. I opgaverne 15.7 og 15.8 er vist hvordan vi kan finde procenten når vi kender *a*.

Eksempel 21.4: Ligningen

(2) $y = 80 \cdot 0{,}95^x$

viser sammenhængen mellem følgende to variable

(3) x = dybden (målt i cm) under væskens overflade
y = lysintensiteten

Opgave 21.5: I ligningen (2) står tallet 0,95. Hvad fortæller tallet 0,95 om lysintensiteten? (*Se eksempel 21.4*)

Svar: Reglen om hvad a fortæller (sætning 21.3) siger at

hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver 1 enhed større, bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{a}$.

Heri erstatter vi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ med oplysningerne fra (2) og (3):

(4) Hver gang **dybden** bliver 1 enhed større, bliver **lysintensiteten** ganget med **0,95** .

Hvis vi måler lysintensiteten et sted i væsken, og derefter måler dem 1 cm længere nede, så vil den sidste måling altså være 95 % af den første, dvs. den sidste måling er 5 % mindre end den første.

For hver cm dybden øges, bliver lysintensiteten 5 % mindre

Dette er hvad tallet 0,95 fortæller om lysintensiteten.

Øvelse 21.6

På en skærm kan vi ændre et rektangel ved at trække med musen. Der gælder

$$y = 30 \cdot 0{,}44^x$$

hvor y er højden (i mm) og x er bredden (i mm).

Hvad fortæller tallet 0,44 om højden og bredden?

Øvelse 21.7

Om nogle bakterier i en næringsopløsning gælder

$$y = 2000 \cdot 1{,}43^x$$

hvor y er antallet af bakterier og x er antal timer efter at bakterierne blev anbragt i skålen.

Hvad fortæller tallet 1,43 om antallet af bakterier?

Opgave 21.8: Hvad er y når x er 0? (Se eksempel 21.1)

Svar: Når $x = 0$ er $y = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$.
Dvs. y er $\underline{\underline{b}}$ når x er 0 .

Bemærkning: Denne udregning viser at følgende regel gælder:

SÆTNING 21.9 Hvad fortæller $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{y = b \cdot a^x}$?

Hvis $y = b \cdot a^x$, fortæller b at

når $\boldsymbol{x}$ er 0 , er $\boldsymbol{y}$ lig $\boldsymbol{b}$.

Opgave 21.10: I ligningen (2) står tallet 80. Hvad fortæller tallet 80 om lysstyrken? (*Se eksempel 21.4*)

Svar: Reglen om hvad b fortæller (sætning 21.9) siger at

når $\boldsymbol{x}$ er 0 , er $\boldsymbol{y}$ lig $\boldsymbol{b}$.

Heri erstatter vi $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ med oplysningerne fra (2) og (3):

Når **dybden under overfladen** er 0, er **lysstyrken** lig 80.

Vi omformulerer dette til

$$\underline{\underline{\text{Ved væskens overflade er lysstyrken 80}}} \; .$$

Dette er hvad tallet 80 i ligningen (2) fortæller os om lysstyrken.

Øvelse 21.11

I et computerspil afhænger gevinsten af den temperatur der opnås. Der gælder

$$y = 110 \cdot 0{,}98^{x}$$

hvor x er temperaturen (i $°C$) og y er antal mønter man vinder.

Hvad fortæller tallet 110 om spillet?

Øvelse 21.12

Om nogle bakterier i en næringsopløsning gælder

$$y = 2\,000 \cdot 1{,}43^{x}$$

hvor y er antallet af bakterier og x er antal timer efter at bakterierne blev anbragt i skålen.

Hvad fortæller tallet $2\,000$ om antallet af bakterier?

Bemærkning (*Se eksempel 21.4*)

Nedenfor er anskueliggjort hvad tallene 0,95 og 80 i ligning (2) fortæller om lysstyrken:

	$\xrightarrow{+1}$		$\xrightarrow{+1}$		$\xrightarrow{+1}$	
Dybde (cm)	0		1	2		3
Lysintensiteten	**80**		76	72,2		68,6
	$\xrightarrow[-5\%]{}$		$\xrightarrow[-5\%]{}$		$\xrightarrow[-5\%]{}$	

Øvelse 21.13

Man har indsprøjtet et antal enheder af et stof i et dyr. Der gælder

$$y = 24 \cdot 0{,}79^{x}$$

hvor y er antal enheder i kroppen, og x er antal timer efter indsprøjtningen.

Hvad fortæller tallene 24 og $0{,}79$ om mængden af stoffet i kroppen?

Afsnit 22. Hvordan kan vi opskrive en ligning for en eksponentiel sammenhæng?

<u>**Opgave 22.1:**</u> Om en plante oplyses:

(1) højden vokser med 5,6 % pr. uge

(2) højden var 27,0 cm da planten blev købt.

Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem plantens højde og tidspunktet.

<u>Svar:</u> Vi vælger følgende betegnelser:

x = antal uger efter at planten blev købt

y = højden (i cm)

Oplysningen (1) kan nu formuleres sådan:

Hver gang x bliver 1 enhed større, så bliver y 5,6 % større.

Dvs.

Hver gang x bliver 1 enhed større, så bliver y ganget med 1,056 .

Af reglen om hvad a fortæller (sætning 21.3), følger at $a = 1{,}056$.

Oplysningen (2) kan formuleres sådan:

Når x er 0, så er y lig 27,0.

Af reglen om hvad b fortæller (sætning 21.7), følger at $b = 27{,}0$.

Sammenhængen mellem plantens højde og tidspunktet beskrives altså med ligningen

$$\underline{\underline{y = 27{,}0 \cdot 1{,}056^x \quad \text{hvor } y \text{ er højde i cm og } x \text{ er antal uger efter køb}}}$$

<u>Bemærkning:</u> Det er vigtigt at vi skriver hvad vi har valgt at lade x og y stå for ("antal uger efter køb" og "højde i cm") da ligningen er ubrugelig hvis læseren ikke ved hvad der skal indsættes for x, og ikke ved hvad det er man beregner ved udregne ligningens højre side.

<u>**Øvelse 22.2**</u>

Om en vare oplyses:

I år 2000 er forbruget 38 ton, og forbruget vokser 13,8 % hvert år.

Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem forbrug og tidspunkt.

<u>**Øvelse 22.3**</u>

Når man på en skærm ændrer afstanden mellem to punkter A og B, så ændres automatisk afstanden mellem to andre punkter C og D. Følgende er oplyst:

Afstanden mellem C og D bliver 14,2 % mindre hver gang afstanden mellem A og B bliver 1 enhed større, og når A og B er sammenfaldende, er afstanden mellem C og D lig 3,7 enheder.

Opskriv en ligning der viser sammenhængen mellem afstand fra A til B og afstand fra C til D.

Afsnit 23. Fordoblingskonstant og halveringskonstant

Øvelse 23.1

Tabellen viser hvordan mængden af et stof i en opløsning er aftaget.

Timer efter at opløsningen blev lavet:	0	2	4	6	8	10	12
Mængde i gram:	14	12	10	8	7	6	5

(1) Hvis vi når opløsningen lige er lavet, stiller spørgsmålet "Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er", hvad er så svaret?

(2) Hvis vi 2 time after at opløsningen er lavet, stiller spørgsmålet " Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er ", hvad er så svaret?

(3) Hvis vi 4 time after at opløsningen er lavet, stiller spørgsmålet " Om hvor mange timer er mængden halvdelen af hvad den nu er ", hvad er så svaret?

Opgave 23.2: Oplæg til emnet fordoblingskonstant

Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

Antal uger efter køb:	0	1	2	3	4	5	6
Højde i cm:	12	15	19	24	30	38	48

På tidspunktet 2 uger efter købet spørger køberen:

(1) Om hvor mange uger er planten dobbelt så høj som nu?

Hvad er svaret?

Svar: Af tabellen ses at på tidspunktet 2 er højden 19.

Den dobbelte højde er $2 \cdot 19 = 38$.

Af tabellen ses at højden er 38 på tidspunktet 5.

Da $5 - 2 = 3$ må svaret på spørgsmålet (1) være: $\underline{\underline{\text{3 uger}}}$.

Bemærkning: Af tabellen ses at hvis spørgsmålet (1) var stillet 1 uge efter købet, så ville vi også være kommet frem til svaret "3 uger".

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet. Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

DEFINITION 23.3 Hvad er fordoblingskonstant og halveringskonstant?

Vi ser på en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$.

Hvis sammenhængen er voksende (dvs. $a > 1$) definerer vi at
fordoblingskonstanten er det antal enheder vi skal gøre x større for at fordoble y.

Hvis sammenhængen er aftagende (dvs. $0 < a < 1$) definerer vi at
halveringskonstanten er det antal enheder vi skal gøre x større for at halvere y.

Øvelse 23.4

For en eksponentielt voksende sammenhæng med fordoblingskonstant 5 oplyses:

Når $x = 3$ er $y = 7$.

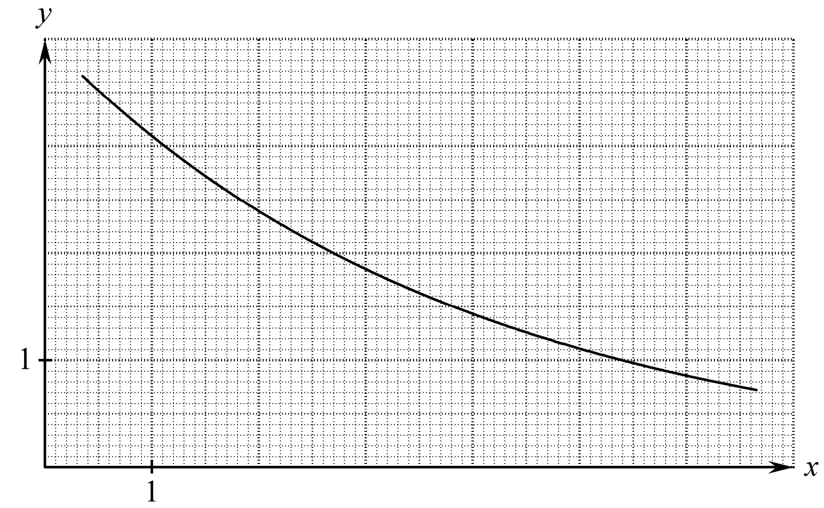
Brug oplysningen om fordoblingskonstant til at bestemme flere eksempler på sammenhørende værdier af x og y:

Når $x =$ ___ er $y =$ ___ . Når $x =$ ___ er $y =$ ___ .

Opgave 23.5: **Hvordan kan vi aflæse fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf?**

Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.

Hvad er fordoblingskonstanten for denne sammenhæng?



Svar: Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan fx starte med $x = 1$:

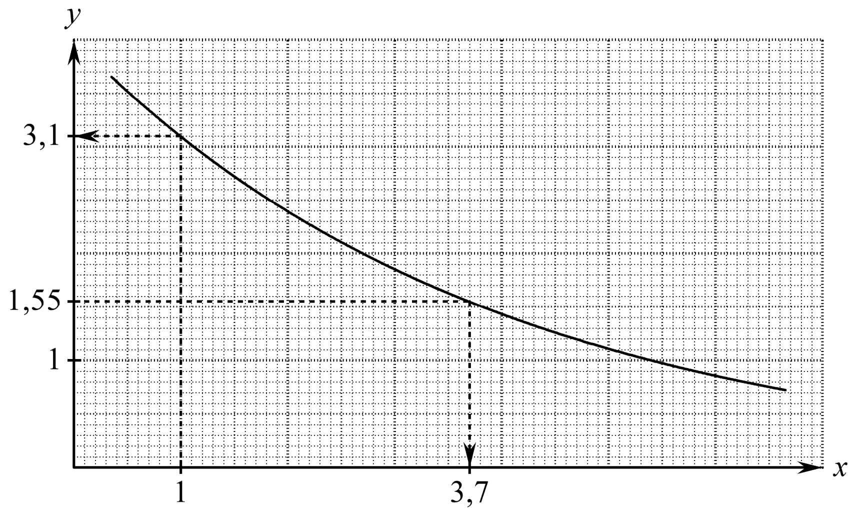
Som vist på figuren nedenfor aflæser vi at når $x = 1$ er $y = 3{,}1$.

Det halve af 3,1 er $\frac{3{,}1}{2} = 1{,}55$.

Som vist på figuren nedenfor aflæser vi at når $y = 1{,}55$ er $x = 3{,}7$.

For at halvere y skal vi altså øge x med $3{,}7 - 1 = 2{,}7$ så

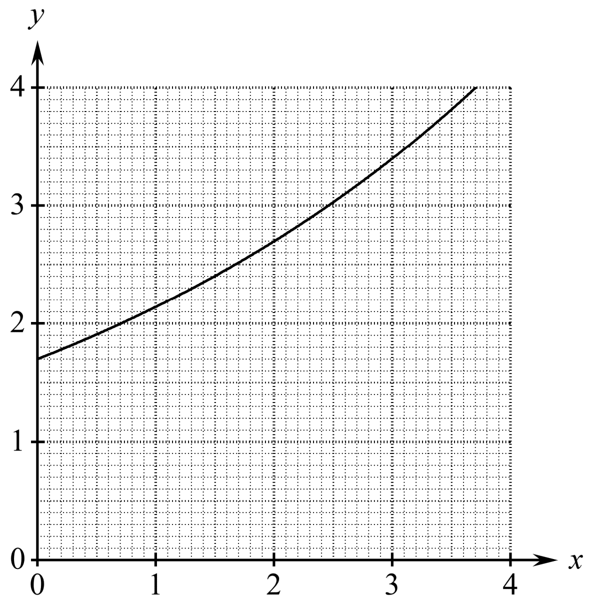
halveringskonstanten er $\underline{\underline{2{,}7}}$.

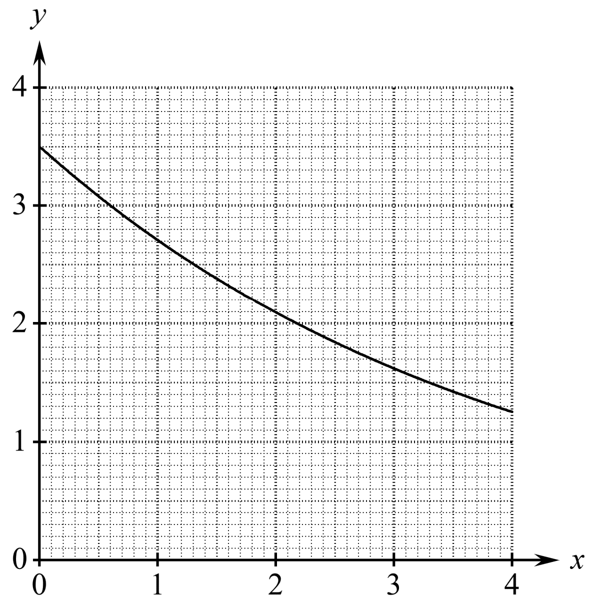


Bemærkning: Vi kan aflæse fordoblingskonstant på tilsvarende måde.

Øvelse 23.6

Figuren nedenfor til venstre viser grafen for en eksponentielt voksende sammenhæng. Aflæs fordoblingskonstanten.



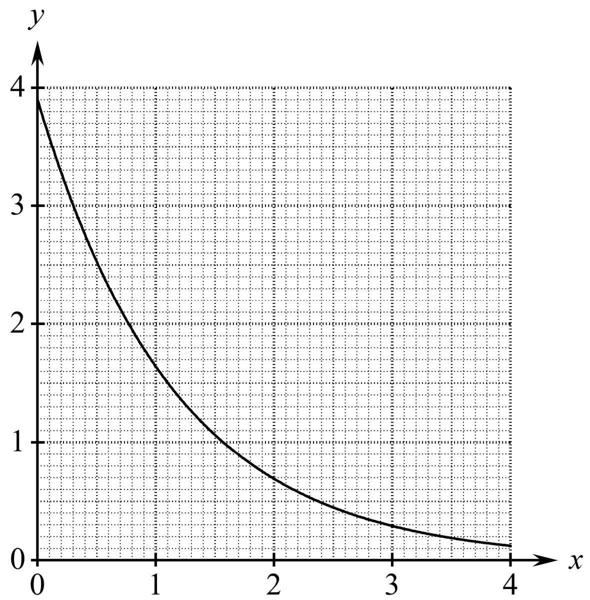


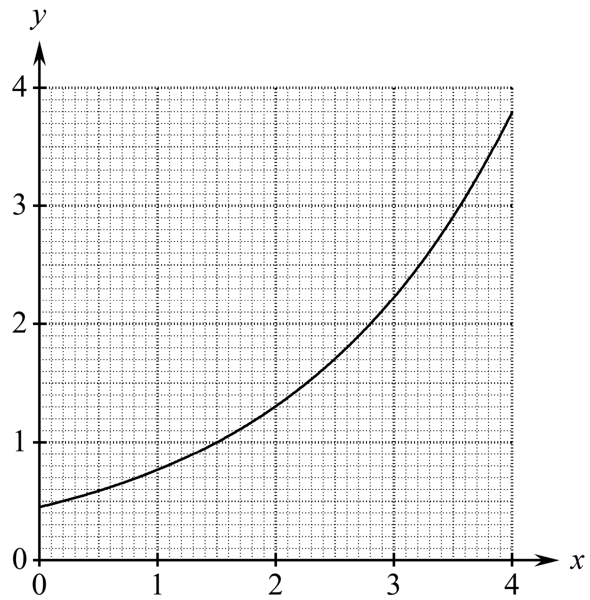
Øvelse 23.7

Figuren ovenfor til højre viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng. Aflæs halveringskonstanten.

Øvelse 23.8

Figuren nedenfor til venstre viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng. Aflæs halveringskonstanten.





Øvelse 23.9

Figuren ovenfor til højre viser grafen for en eksponentielt voksende sammenhæng. Aflæs fordoblingskonstanten.

Opgave 23.10: **Oplæg til opgave 23.11**

En sammenhæng mellem to variable y og x er givet ved ligningen

$$y = 2{,}7 \cdot 1{,}14^x \ .$$

Hvad er fordoblingskonstanten for denne sammenhæng?

Svar: Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan fx starte med $x = 3$:

Når $x = 3$ er $y = 2{,}7 \cdot 1{,}14^3 = 4$.

Vi bestemmer hvad x er når y er det dobbelte af 4, altså 8:

$$8 = 2{,}7 \cdot 1{,}14^x$$

$$\frac{8}{2{,}7} = \frac{2{,}7 \cdot 1{,}14^x}{2{,}7}$$

$$\frac{8}{2{,}7} = 1{,}14^x$$

$$x = \frac{\log(\frac{8}{2{,}7})}{\log(1{,}14)}$$

$$x = 8{,}29 \ .$$

For at fordoble y skal vi altså øge x med $8{,}29 - 3 = 5{,}29$ så

fordoblingskonstanten er $\underline{\underline{5{,}29}}$.

I det følgende lader vi a og b stå for tal der endnu ikke er oplyst.

Opgave 23.11: **Bevis for sætning 23.12**

En sammenhæng mellem to variable y og x er givet ved ligningen

(2) $y = b \cdot a^x$.

Hvad er fordoblingskonstanten for denne sammenhæng?

Svar: Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan fx starte med $x = 0$. Af (2) får vi at

når $x = 0$ er $y = b$.

Det dobbelte af b er $2{\cdot}b$. Vi indsætter dette i (2) og finder hvad x er når y er $2{\cdot}b$:

$$2{\cdot}b = b \cdot a^x$$

$$\frac{2{\cdot}b}{b} = \frac{b \cdot a^x}{b}$$

$$2 = a^x$$

$$x = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Besvarelsen fortsætter på næste side!

For at fordoble y skal vi altså øge x fra 0 til $\dfrac{\log(2)}{\log(a)}$, dvs. med $\dfrac{\log(2)}{\log(a)}$, så

$$\text{fordoblingskonstanten er } \underline{\underline{\frac{\log(2)}{\log(a)}}} \,.$$

Bemærkning: I ovenstående svar har vi bevist første del af sætningen på næste side. Sætningens anden del kan bevises på tilsvarende måde.

SÆTNING 23.12 Formler til beregning af fordoblingskonstant og halveringskonstant

Vi ser på en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$.

Hvis sammenhængen er voksende (dvs. $a > 1$) gælder at

$$\text{fordoblingskonstanten er } \frac{\log(2)}{\log(a)} \,.$$

Hvis sammenhængen er aftagende (dvs. $0 < a < 1$) gælder at

$$\text{halveringskonstanten er } \frac{\log(0{,}5)}{\log(a)} \,.$$

Opgave 23.13: Hvad er halveringskonstanten for sammenhængen $y = 240 \cdot 0{,}94^x$.

Svar: Vi indsætter $a = 0{,}94$ i formlen

$$\text{halveringskonstant} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(a)}$$

og får

$$\frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}94)} = 11{,}2$$

dvs. halveringskonstanten er $\underline{\underline{11{,}2}}$.

Øvelse 23.14

Bestem halveringskonstanten for den eksponentielt aftagende sammenhæng $y = 0{,}95 \cdot 0{,}23^x$.

Øvelse 23.15

Bestem fordoblingskonstanten for den eksponentielt voksende sammenhæng $y = 0{,}13 \cdot 1{,}016^x$.

Opgave 23.16: Hvad fortæller fordoblingskonstanten?

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

(1) x = længden (i cm)
y = omkredsen (i cm)

Det er oplyst at

(2) fordoblingskonstanten er 7 cm.

Hvad fortæller tallet 7 om omkredsen og længden?

Svar: Definitionen på fordoblingskonstant siger:

(3) **fordoblingskonstanten** er det antal enheder
vi skal gøre $\boldsymbol{x}$ større for at fordoble $\boldsymbol{y}$.

Ved at sætte oplysningerne (1) og (2) ind i (3) får vi:

(4) **7** er det antal enheder
vi skal gøre **længden** større for at fordoble **omkredsen** .

Ved at omformulere (4) får vi:

$$\underline{\underline{\text{Omkredsen fordobles når længden bliver 7 cm længere}}}\ .$$

Dette er hvad tallet 7 fortæller.

Øvelse 23.17

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = antal år efter 2000
y = antal indbyggere

Det oplyses at fordoblingskonstanten er 4,2 .

Hvad fortæller tallet 4,2 om antallet af indbyggere?

Øvelse 23.18

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = forsøgets varighed (i minutter)
y = mængde der er tilbage (målt i gram når forsøget er slut)

Det oplyses at halveringskonstanten er 18 .

Hvad fortæller tallet 18 om mængden der er tilbage?

Øvelse 23.19

På en skærm kan vi ændre en trekant ved at trække med musen. Der gælder

$$y = 4 \cdot 1{,}06^x$$

hvor y er højden (i cm) og x er grundlinjen (i cm).

Bestem fordoblingskonstanten, og skriv hvad dette tal fortæller om højden og grundlinjen.