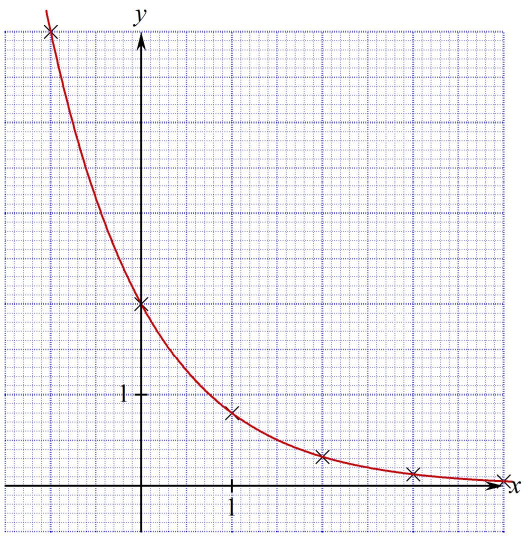
Eksponentielle funktioner

for C-niveau i hf



2017 Karsten Juul

Procent

Eksponentiel funktion: Forskrift

Eksponentiel funktion: Graf

Eksponentiel funktion: *a* og *b* fortæller

Eksponentiel funktion: Udregn *a* og *b*

  13/1 2018

Procent

1. Procenter på en ny måde.

1a. T er 34% **af** 600

$$T = 34\,\% \text{ af } 600$$
$$= 600 \cdot 0{,}34 \qquad \text{da } 34\% = \frac{34}{100} = 0{,}34$$
$$= 204$$

Du plejer nok at udregne 34% ved at dividere med 100 og gange med 34.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,34 for at udregne 34%.

1b. S er 34% **større end** 600

$$S = 134\,\% \text{ af } 600 \qquad \text{da } 100\% + 34\% = 134\%$$
$$= 600 \cdot 1{,}34 \qquad \text{da } 134\% = \frac{134}{100} = 1{,}34$$
$$= 804$$

Når du udregner det der er 34% større end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og lægge til tallet.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 1,34 for at udregne det der er 34% større.

1c. R er 34% **mindre end** 600

$$R = 66\,\% \text{ af } 600 \qquad \text{da } 100\% - 34\% = 66\%$$
$$= 600 \cdot 0{,}66 \qquad \text{da } 66\% = \frac{66}{100} = 0{,}66$$
$$= 396$$

Når du udregner det der er 34% mindre end et tal, så plejer du nok at udregne 34% af tallet og trække fra tallet.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

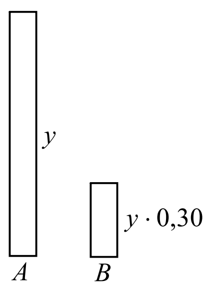
Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,66 for at udregne det der er 34% mindre.

1d. **Hvor mange procent** er 52 af 126 ?

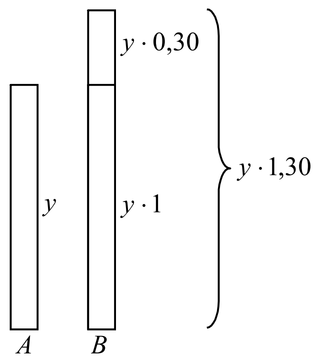
$$\frac{52}{126} = 0{,}412698 = 41{,}2698 \approx 41{,}3\%$$

52 er $\underline{\underline{41{,}3\%}}$ af 126 .

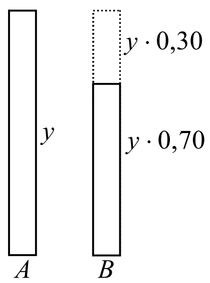
1e. Oversigt over grundlæggende procentregning



B er **30%** af A

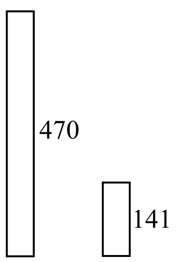


B er **30% større** end A
B er **130%** af A



$0{,}30 + 0{,}70 = 1$

B er **30% mindre** end A
B er **70%** af A



$$\frac{141}{470} = 0{,}30$$

141 er 30% af 470

2. Bestem procentvis ændring

Opgave 2 **Delprøve 2** **Mindstekravsopgave**

Efter en lovændring må en landmand ændre størrelsen på sin besætning af køer.

Antal køer før ændringen: 450
Antal køer efter ændringen: 280

Bestem den procentvise ændring af antal køer.

Besvarelse af opgave 2

Før er antal = 450 Efter er antal = 280

Ud fra disse tal bestemmer vi vækstraten:

Dette er formel (2) i formelsamlingen.

$$r = \frac{S}{B} - 1$$

S=Slutværdi B=Begyndelsesværdi r=vækstrate

$$r = \frac{280}{450} - 1 = -0.377778 \approx -0.38$$

Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

$$r = -0.38$$

Vi bestemmer procenten svarende til vækstraten $r = -0.38$:

Dette er formel (3) i formelsamlingen.

$$p\% = r \cdot 100\%$$

p = Procentvis ændring

$$p\% = -0.38 \cdot 100\ \%$$ $-0.38 \cdot 100 = -38.$

$$p\% = -38\ \%$$

Den procentvise ændring af antallet er $-38\ \%$

dvs. antallet er faldet med 38 % .

3. Bestem begyndelsesværdi

Opgave 3 **Delprøve 2** **Mindstekravsopgave**

Ved en udvidelse øges antallet af ansatte med 8 % så antallet kommer op på 431.
Hvor mange ansatte var der før udvidelsen?

Besvarelse af opgave 3

Ved en udvidelse øges antal ansatte med 8 % så antal ansatte kom op på 431.

Vi bestemmer hvor mange ansatte der var før udvidelsen.

Dette er formel (3) i formelsamlingen.

Vækstraten r svarende til 8 % bestemmes:

$$p\ \% = r \cdot 100\ \%$$

p = Procentvis ændring r=Vækstrate

$$8\ \% = r \cdot 100\ \%$$

kontrol: solve$(8\%=r\cdot 100\%, r)$ ▸ $r=0.08$

$$r = \frac{8}{100} = 0.08$$

Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

Dette er formel (1) i formelsamlingen.

Antallet B af ansatte før udvidelsen bestemmes:

$$S = B \cdot (1+r)$$

S=Slutværdi B=Begyndelsesværdi r=vækstrate

$$431 = B \cdot (1+0.08)$$

solve$(431=b\cdot(1+0.08), b)$ ▸ $b=399.074$ Nspire løser ovenstående ligning mht. B og får

$$B = 399.074$$

Dvs. antal ansatte før udvidelsen var 399 .

4. Bestem slutværdi

Opgave 4 **Delprøve 2** **Mindstekravsopgave**

I 2015 var boligens pris 235000 kr.
I 2016 var prisen 12 % mindre.

Bestem prisen i 2016.

Besvarelse af opgave 4

I 2015 var boligens pris 235000 kr. I 2016 var prisen 12 % mindre.

Dette er formel (3) i formelsamlingen.

Vi bestemmer vækstraten r svarende til -12 % :

$$p\ \% = r \cdot 100\ \%$$ p = Procentvis ændring r=Vækstrate

$$-12\ \% = r \cdot 100\ \%$$ kontrol: $\text{solve}(-12\% = r \cdot 100\%, r) \blacktriangleright r = -0.12$

$$r = \frac{-12}{100} = -0.12$$ Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

Dette er formel (1) i formelsamlingen.

Vi bestemmer prisens slutværdi S i 2016 :

$$S = B \cdot (1 + r)$$ S=Slutværdi B=Begyndelsesværdi r=vækstrate

$$S = 235000 \cdot (1 + -0.12) = 206800.$$ Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

$$S = 206800.$$

Dvs. prisen i 2016 var 206800 kr.

5. Vækstrate.

5a. Hvad er vækstrate?

Sætningen den årlige vækstrate er 18 %
betyder stigningen er 18 % hvert årt

Sætningen den månedlige vækstrate er 3 %
betyder stigningen er 3 % hver måned

5b. Eksempel

Der gælder Antal ansatte skal stige med en årlig vækstrate på 45 %.
Dvs. Antal ansatte skal stige 45 % hvert år.

$100\,\% + 45\,\% = 145\,\% = \frac{145}{100} = 1{,}45$

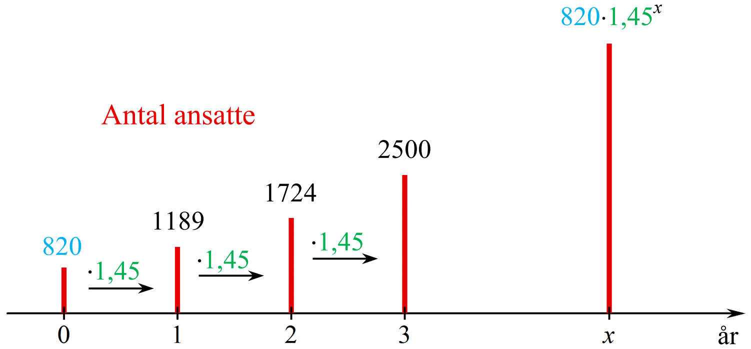
I år er antal ansatte 820

Om 1 år er antal ansatte $820 \cdot 1{,}45 = 1189$

Om 2 år er antal ansatte $820 \cdot 1{,}45 \cdot 1{,}45 = 1724$ $1{,}45 \cdot 1{,}45 = 1{,}45^2$

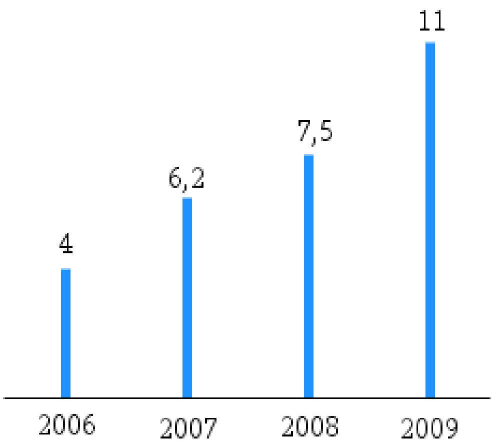
Om 6 år er antal ansatte $820 \cdot 1{,}45^6 = 7621$

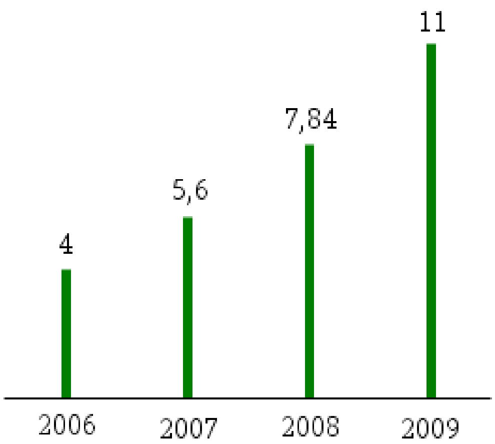
Om x år er antal ansatte $820 \cdot 1{,}45^x$



6. Gennemsnitlig procent

6a. Hvad er gennemsnitlig procent.





Hvert år fra 2006 til 2009 er de grønne stolper vokset med 40 %.

De blå stolper er ikke vokset med samme procent hvert år,
men de er vokset fra 4 til 11 ligesom de grønne,
så vi siger at for blå stolper gælder:

Den gennemsnitlige årlige procentvise stigning er 40 % .

6b. Metode til at udregne gennemsnitlig procent

Hvis en størrelse stiger fra et tal K_0 til et tal K på n år, så kan
den gennemsnitlige årlige procentvise stigning p
udregnes ved hjælp af formlen

$K = K_0 \cdot (1+r)^n$ hvor $r = \frac{p}{100}$ Dette er formel (4) i formelsamlingen.

Hvis der står ”brug modellen til at bestemme den gennemsnitlige årlige procentvise stigning”,
så skal du i stedet regne som vist i ramme 8 .

6c. Eksempel på udregning af gennemsnitlig procent

Hvis $K_0 = 158$, $K = 221$ og $n = 10$, er $221 = 158 \cdot (1+\frac{p}{100})^{10}$.

Nspire løser denne ligning mht. p for $p > -100$ og får $p = 3{,}4126$.

dvs. Den gennemsnitlige årlige procentvise stigning er $\underline{\underline{3{,}41\ \%}}$.

6d. Flere oplysninger om gennemsnitlig procent

Perioden behøver ikke være et år.
Fra uge 10 til 15 er indtægten steget fra 1,7 mio. kr. til 2,4 mio. kr.
Vi regner som vist ovenfor og får: Gennemsnitlig ugentlig procentvis stigning er 7,14 %.
Dette betyder: Ved at stige med 7,14 % hver uge kan et beløb stige fra 1,7 til 2,4 mio. kr.
Procentstigningen har måske ikke været den samme hver uge. Derfor ordet ”gennemsnit”.

6e. Advarsel om gennemsnitlig procent

Vi kan IKKE udregne gennemsnitlig procent ved at lægge procenter sammen og dividere med antallet.
Dette skyldes at procenterne ikke tages af lige store tal.

7. Bestem gennemsnitlig procentvis ændring ud fra to tal

Opgave 7 **Delprøve 2**

Prisen på en vare var 240 kr. i 2003 og 310 kr. i 2015.
Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i prisen for perioden 2003-2015.

Besvarelse af opgave 7

Prisen på en vare var 240 kr. i 2003 og 310 kr. i 2015.

Antal år er

$n = 2015-2003 = 12$ Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

Vi bestemmer prisens gennemsnitlige årlige procentvise stigning p :

$$K = K0 \cdot (1+r)^n \quad \text{hvor} \quad r = \frac{p}{100}$$

Dette er formel (4) i formelsamlingen.

$$310 = 240 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{12}$$

$\text{solve}\left(310=240\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{12},p\right)|p>-100 \;\blacktriangleright\; p=2.15568$ Nspire løser ligningen i foregående linje

mht. p for $p > -100$ og får $p = 2{,}1557 \approx 2{,}16$

Den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i prisen for perioden 2003−2015 er 2,16 % .

8. Bestem (gennemsnitlig) procentvis ændring ud fra model

Opgave 8 **Delprøve 1 og 2**

For perioden 2003-2015 bruges modellen $f(x) = 245 \cdot 1{,}018^x$
hvor $f(x)$ er prisen i kr, og x er antal år efter 2003 .

Benyt modellen til at bestemme den årlige procentvise stigning i prisen
i perioden 2003-2015.

Besvarelse af opgave 8

For perioden 2003−2015 bruges modellen

$f(x) = 245 \cdot 1{,}018^x$ hvor $f(x)$ er pris i kr. og x er år efter 2003 .

Forskriften er af typen $b \cdot (1+r)^x$

med $1+r = 1.018$

$r = 1.018-1 = 0.018$

Kun det blå er tastet i matematikfeltet.

Vi bestemmer procenten svarende til vækstraten $r = 0.018$:

$p\,\% = r \cdot 100\,\%$ p = Procentvis ændring

Dette er formel (3) i formelsamlingen.

$p\% = 0.018 \cdot 100\,\%$ $0.018 \cdot 100 = 1.8$

$p\% = 1.8\ \%$

Den årlige procentvise stigning i prisen for perioden 2003−2015 er 1,8 % .

Eksponentiel funktion: Forskrift

9. Oplæg nr. 1 til forskrift for eksponentiel funktion: celler der deler sig.

I en skål er nogle celler der formerer sig ved deling. Kl. 12 er der 2000 celler.
Fra kl. 12 til 13 stiger antal celler med **400** . Nu er der flere celler der kan dele sig.
Fra kl. 13 til 14 stiger antal celler med **480** . Hver time stiger antal celler med 20 %.
100 % + 20 % = 120 % = 1,20 så hver time ganges antal celler med 1,20 :

0 timer efter kl. 12 er antal celler lig 1200
1 time efter kl. 12 er antal celler lig $1200 \cdot 1{,}20$
2 timer efter kl. 12 er antal celler lig $1200 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}20 = 1200 \cdot 1{,}20^2$ ← $1{,}20 \cdot 1{,}20 = 1{,}20^2$
3 timer efter kl. 12 er antal celler lig $1200 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}20 = 1200 \cdot 1{,}20^3$
9 timer efter kl. 12 er antal celler lig $1200 \cdot 1{,}20^9$
x timer efter kl. 12 er antal celler lig $1200 \cdot 1{,}20^x$
Forskriften for antal celler er altså $1200 \cdot 1{,}20^x$ som er af typen $b \cdot a^x$.

En eksponentiel funktion har en forskrift af typen $b \cdot a^x$.

10. Oplæg nr. 2 til forskrift for eksponentiel funktion: alders-bestemmelse .

Når man finder noget der er lavet af træ,
så kan man bestemme dets alder ved at se på hvor meget kulstof-14 (C-14) der er tilbage i træet.

C-14 er radioaktivt, dvs. at et C-14 atom kan henfalde og blive til et andet stof.
I løbet af et år henfalder en vis mængde af den C-14 der er i træet.

Næste år er der mindre C-14 tilbage som kan henfalde, så næste år forsvinder en mindre mængde.
Princippet er det samme som i følgende eksperiment med terninger:

For en "terning" med 10 farvede sider er sandsynligheden for gul lig 10 % = 0,10 .
Vi har 1000000 terninger. Vi kaster dem og fjerner de der viser gul. Så er ca. 90 % tilbage:

$$1000000 \cdot 0.90 = 900000$$

Vi kaster de tilbageværende og fjerner igen de der viser gul. Efter andet kast er antal der er tilbage:

$$1000000 \cdot 0.90 \cdot 0.90 = 1000000 \cdot 0{,}90^2 = 810000$$

Efter kast nr. x er antal der er tilbage

$$1000000 \cdot 0{,}90^x$$

Denne forskrift er af typen $b \cdot a^x$. En eksponentiel funktion har en forskrift af typen $b \cdot a^x$.

11. Forskrift for eksponentiel funktion

11a. Definition En funktion er **eksponentiel** hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

a og b skal være positive tal. Alle tal kan indsættes for x .
Uanset hvilket tal vi indsætter for x , så bliver resultatet y et positivt tal.

11b. Opgave **Delprøve 1** **Mindstekravsopgave**
Udfyld en tabel som den viste for funktionen $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

x	1	2	3
$f(x)$			

Besvarelse af opgave 11b

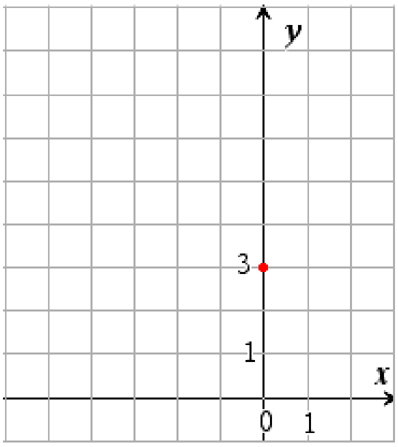
$f(x) = 2 \cdot 3^x$.
$f(1) = 2 \cdot 3^1 = 2 \cdot 3 = 6$.
$f(2) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$.
$f(3) = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 9 = 54$.

x	1	2	3
$f(x)$	6	18	54

Eksponentiel funktion: Graf

12. Oplæg til regler for graf

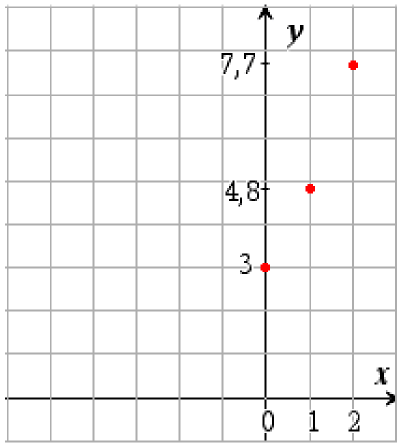
Vi udregner punkter på grafen for funktionen $y = 3 \cdot 1{,}6^x$.



Når $x = 0$ er $y = 3 \cdot (1.6)^0 = 3.$
så punktet (0 , 3) ligger på grafen.

Ovenfor har vi tegnet punktet med rødt.

Bemærk at skæring med y–akse altid er ved forskriftens b–tal.



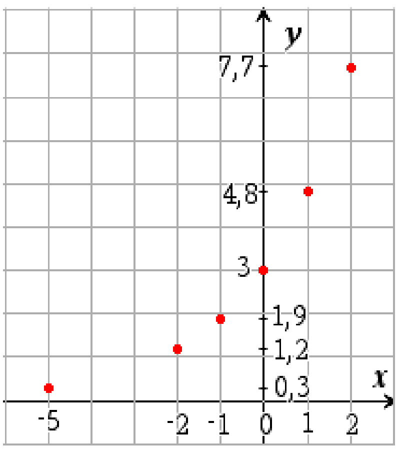
Når $x = 1$ er $y = 3 \cdot (1.6)^1 = 4.8$

Når $x = 2$ er $y = 3 \cdot (1.6)^2 = 7.68$

Ovenfor har vi tegnet punkterne med rødt.

Stigningen i y–værdi fra andet til tredje punkt er større end fra første til andet.

For hele grafen gælder at stigningen i y bliver større og større jo længere man kommer til højre.



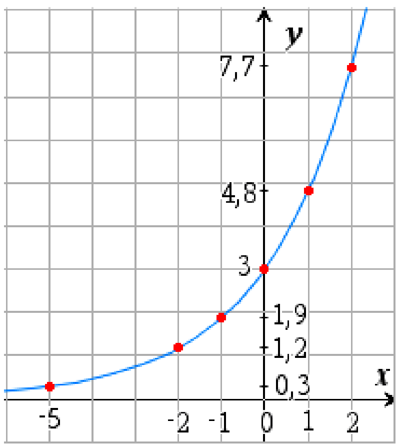
Når $x = -1$ er $y = 3 \cdot (1.6)^{-1} = 1.9$

Når $x = -2$ er $y = 3 \cdot (1.6)^{-2} = 1.2$

Når $x = -5$ er $y = 3 \cdot (1.6)^{-5} = 0.3$

Jo længere vi kommer til venstre, jo tættere kommer punkterne på x–aksen.

Når $f(x)$ er eksponentielt voksende (dvs. $a > 1$):
Formelsamling: (52) $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$
Læses: $f(x)$ går mod uendelig for x gående mod uendelig.
Formelsamling: (53) $f(x) \to 0$ for $x \to -\infty$
Læses: $f(x)$ går mod nul for x gående mod minus uendelig.



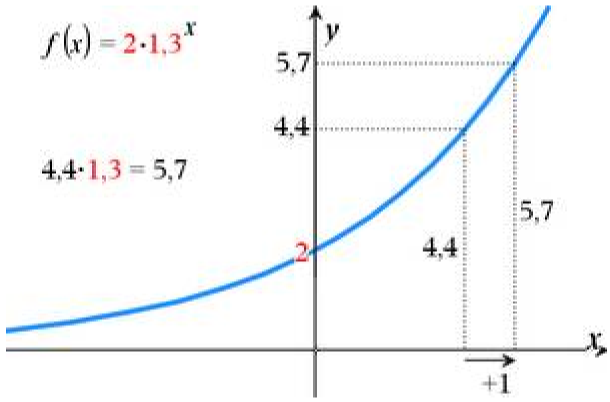
Den blå kurve er grafen for f .

Hvis et punkt kører mod venstre på grafen så x gennemløber hele venstre del af x–aksen, kommer y–koordinaten vilkårlig tæt på nul.
Dette skriver vi sådan: $y \to 0$ for $x \to -\infty$.

Hvis et punkt kører mod højre på grafen så x gennemløber hele højre del af x–aksen, bliver y–koordinaten vilkårlig stor.
Dette skriver vi sådan: $y \to \infty$ for $x \to \infty$.

13. Graf for eksponentiel funktion der er voksende ($a>1$)

Figuren viser grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ hvor forskriftens b-tal og a-tal er hhv. 2 og 1,3 .



Da a-tallet er større end 1, gælder

Funktionen er voksende.

dvs.

Når vi indsætter større og større tal for x i forskriften, så bliver de udregnede y-værdier hele tiden større.

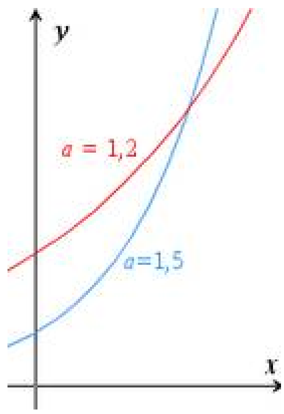
så

Grafen går opad mod højre, når a-tallet er større end 1.

Grafen skærer y-aksen ved 2, fordi 2 er b-tallet.

Når vi indsætter et tal for x som er 1 større end det foregående tal vi indsatte, så får vi en y-værdi der er 1,3 gange den foregående y-værdi, da 1,3 er forskriftens a-tal. Se figuren øverst.
Derfor kaldes a-tallet for fremskrivningsfaktoren.

For to voksende eksponentielle funktioner gælder at den med den største fremskrivningsfaktor a vil have den stejleste graf i grafernes skæringspunkt.
Se figuren til højre.



Uanset hvilket tal vi indsætter for x,
så vil den udregnede y-værdi være positiv
så

Grafen ligger over x-aksen.

Hvis et punkt kører mod venstre på grafen
så x-koordinaten gennemløber hele venstre del af x-aksen,
så kommer y-koordinaten vilkårlig tæt på nul.
Dette skriver vi sådan: $y \to 0$ for $x \to -\infty$.

Hvis et punkt kører mod højre på grafen
så x gennemløber hele højre del af x-aksen,
så bliver y-koordinaten vilkårlig stor.
Dette skriver vi sådan: $y \to \infty$ for $x \to -\infty$.

Når $f(x)$ er eksponentielt voksende (dvs. $a > 1$), gælder

$f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ Dette er formel (52) fra formelsamlingen.

Dette læses:

$f(x)$ går mod uendelig for x gående mod uendelig.

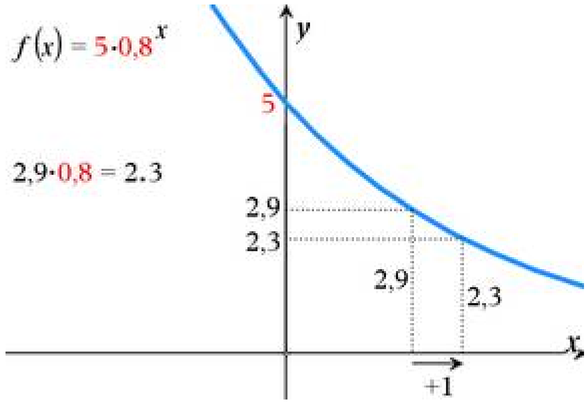
Når $f(x)$ er eksponentielt voksende (dvs. $a > 1$) gælder

$f(x) \to 0$ for $x \to -\infty$ Dette er formel (53) fra formelsamlingen.

Dette læses:

$f(x)$ går mod nul for x gående mod minus uendelig.

14. Graf for eksponentiel funktion der er aftagende ($0<a<1$)



Figuren viser grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ hvor forskriftens b-tal og a-tal er hhv. 5 og 0,8 .

Da a-tallet er mellem 0 og 1, gælder

Funktionen er aftagende.

dvs.

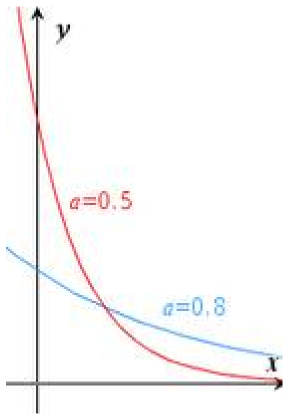
Når vi indsætter større og større tal for x i forskriften, så bliver de udregnede y-værdier hele tiden mindre.

så

Grafen går nedad mod højre, når a-tallet er mellem 0 og 1.

Grafen skærer y-aksen ved 5, fordi 5 er b-tallet.

Når vi indsætter et tal for x som er 1 større end det foregående tal vi indsatte,
så får vi en y-værdi der er 0,8 gange den foregående y-værdi,
da 0,8 er forskriftens a-tal. Se grafen øverst.
Derfor kaldes a-tallet for fremskrivningsfaktoren.



For to aftagende eksponentielle funktioner gælder
at den hvis fremskrivningsfaktor er tættest på nul,
vil have den stejleste graf i grafernes skæringspunkt.
Se figuren til højre.

Uanset hvilket tal vi indsætter for x,
så vil den udregnede y-værdi være positiv
så

Grafen ligger over x-aksen.

Hvis et punkt kører mod venstre på grafen
så x-koordinaten gennemløber hele venstre del af x-aksen,
så bliver y-koordinaten vilkårlig stor.
Dette skriver vi sådan: $y \to \infty$ for $x \to -\infty$.

Hvis et punkt kører mod højre på grafen
så x gennemløber hele højre del af x-aksen,
så kommer y-koordinaten vilkårlig tæt på nul.
Dette skriver vi sådan: $y \to 0$ for $x \to \infty$.

Her står at a er et tal mellem 0 og 1

Når $f(x)$ er eksponentielt aftagende (dvs. $0 < a < 1$), gælder

$f(x) \to 0$ for $x \to \infty$ Dette er formel (59) fra formelsamlingen.

Dette læses:

$f(x)$ går mod nul for x gående mod uendelig.

Når $f(x)$ er eksponentielt aftagende (dvs. $0 < a < 1$), gælder

$f(x) \to \infty$ for $x \to -\infty$ Dette er formel (60) fra formelsamlingen.

Dette læses:

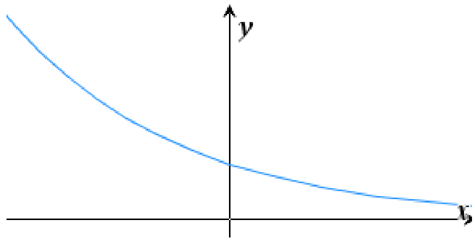
$f(x)$ går mod uendelig for x gående mod minus uendelig.

15. Hvilken graf, forklar. Eksempel 1

Opgave 15 **Delprøve 1** **Mindste kravs opgave**

Forklar hvorfor den viste graf ikke kan være grafen for funktionen

$$f(x) = 40 \cdot 1{,}08^x \,.$$



Besvarelse af opgave 15

I forskriften $f(x) = 40 \cdot 1{,}08^x$ er fremskrivningsfaktoren $a = 1{,}08$.
Da a er større end 1, er f voksende.
Figuren viser grafen for en aftagende funktion (da grafen går nedad mod højre).
Altså kan den viste graf ikke være graf for f .

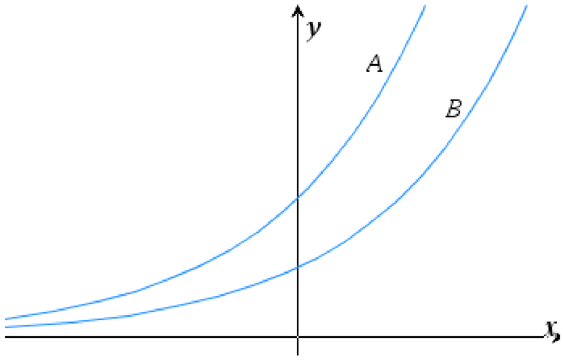
16. Hvilken graf, forklar. Eksempel 2

Opgave 16 **Delprøve 1** **Mindste kravs opgave**

Figuren viser graferne for funktionerne

$$f(x) = 5 \cdot 1{,}1^x \quad \text{og} \quad g(x) = 10 \cdot 1{,}1^x \,.$$

Angiv hvilken af graferne der er graf for f , og forklar hvordan man kan se det.



Besvarelse af opgave 16

$$f(x) = 5 \cdot 1{,}1^x \quad \text{og} \quad g(x) = 10 \cdot 1{,}1^x \,.$$

I forskriften for f er b-tallet 5 ,
og i forskriften for g er b-tallet 10 .
Da b-tallet viser skæring med y-aksen, vil g-grafens skæring med y-aksen ligge over f-grafens.
Derfor er det B der er graf for f, da figuren viser at A-grafs skæring med y-aksen ligger over B-grafens skæring med y-aksen.

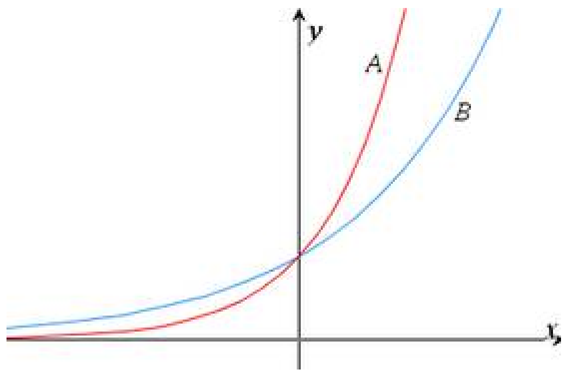
17. Hvilken graf, forklar. Eksempel 3

Opgave 17 **Delprøve 1** **Mindste kravs opgave**

Figuren viser graferne for funktionerne

$$f(x) = 6 \cdot 1{,}2^x \quad \text{og} \quad g(x) = 6 \cdot 1{,}1^x \,.$$

Angiv hvilken af graferne der er graf for f , og forklar hvordan man kan se det.



Besvarelse af opgave 17

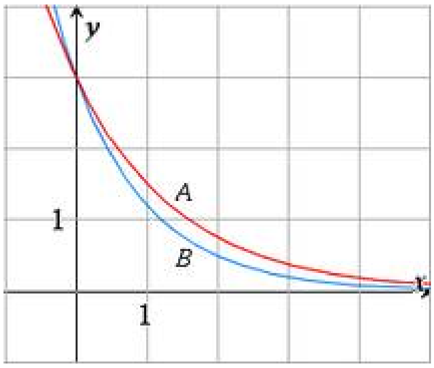
$$f(x) = 6 \cdot 1{,}2^x \quad \text{og} \quad g(x) = 6 \cdot 1{,}1^x \,.$$

Fremskrivningsfaktoren a er 1,2 for f, og 1,1 for g .

Funktionerne er voksende, og i grafernes skæringspunkt er A stejlest, så da f har størst a, gælder: A er graf for f .

18. Hvilken graf, forklar. Eksempel 4

Opgave 18 **Delprøve 1** **Mindstekravsopgave**



En af graferne på figuren er grafen for funktionen

$f(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$.

Angiv hvilken af graferne der er graf for f,
og forklar hvorfor det ikke kan være den anden. .

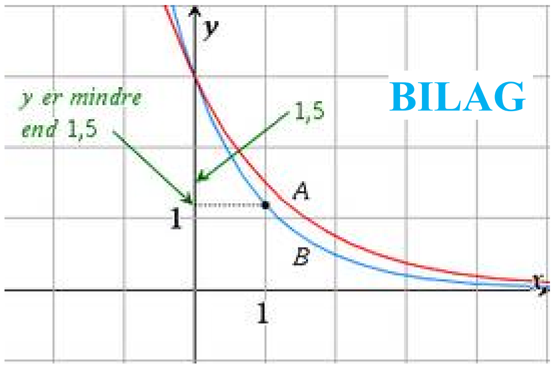
Besvarelse af opgave 18

$f(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$.

Vi ser på det punkt på f-grafen hvor $x = 1$
(fordi det er nemt at regne med 1).
Vi udregner y for punktet:

$y = 3 \cdot 0{,}5^1 = 3 \cdot 0.5 = 1{,}5$.

På bilaget har vi på kurven B afsat det punkt hvor $x = 1$.
Vi ser at y er mindre end 1,5 .
Altså er det A der er graf for f.



Eksponentiel funktion: *a* og *b* fortæller

19. Reglerne for hvad *a* og *b* fortæller

19a. $y = b \cdot a^x$ Reglen for hvad a fortæller (dvs. reglen for eksponentiel vækst):
Hver gang vi gør x én enhed større, bliver værdien af y ganget med a.

19b. $y = b \cdot a^x$ Reglen for hvad b fortæller:
Når x er 0, er y lig b.

19c. $f(x) = 24 \cdot 1{,}5^x$ Følgende viser reglerne 19a og 19b:

	+1	+1	+1		
x :	-1	0	1	2	x
y :	16	24	36	54	$24 \cdot 1{,}5^x$
	$\cdot 1{,}5$	$\cdot 1{,}5$	$\cdot 1{,}5$		

19d. Opgave **Delprøve 1** **Mindstekravsopgave**

Udfyld resten af tabellen når det oplyses at f er en eksponentiel funktion.

x		2	3	4
$f(x)$	1	3	9	

Besvarelse af opgave 19d. Hver gang der lægges 1 til x-værdien, så ganges $f(x)$-værdien (y-værdien) med fremskrivningsfaktoren a. Af de to midterste søjler ser vi at $3 \cdot a = 9$, så $a = 3$.

+1 +1 +1

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	9	27

$\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3$

20. Opstil formel ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst. Eksempel 1

20. Opgave **Delprøve 1 og 2** **Mindste kravs opgave**

(voksende) Kl. 9 er der 300 celler,
og hver time bliver antal celler 20 % større.

Indfør passende variable,
og opstil en formel til at bestemme antallet af celler når man kender tidspunktet.

Svar Passende variable:

x = **antal timer efter kl. 9**
y = **antal celler**

Antallet stiger med **samme procent** hver time,
så det er en **eksponentiel funktion** $y = b \cdot a^x$.

Der står:	Når **antal timer** bliver én større, bliver **antal celler** 20 % større	
dvs.	når x bliver én større, bliver y 20 % større	
så	når x bliver én større, bliver y ganget med 1,20	100 % + 20 % = 120 %
Derfor:	$a = 1{,}20$	*ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 19a)*

Der står:	Når klokken er 9 , er **antal celler** lig 300	
dvs.	når x er 0 , er y lig 300	
Derfor:	$b = 300$	*ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 19b)*

$y = 300 \cdot 1{,}20^x$ hvor y = antal celler og x = antal timer efter kl. 9

21. Opstil formel ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst. Eksempel 2

21. Opgave **Delprøve 1 og 2** **Mindste kravs opgave**

(aftagende) Den 1. maj er afgiften 800 kr.
og afgiften nedsættes med 10 % pr. uge

Indfør passende variable,
og opstil en formel til at bestemme afgiften når man kender tidspunktet.

Svar Passende variable:

x = **antal uger efter 1.maj**
y = **afgiften i kr.**

Afgiften falder med **samme procent** hver uge,
så det er en **eksponentiel funktion** $y = b \cdot a^x$.

Der står:	Når **antal uger** bliver én større, bliver **afgiften** 10 % mindre	
dvs.	når x bliver én større, bliver y 10 % mindre	
så	når x bliver én større, bliver y ganget med 0,90	100 % – 10 % = 90 %
Derfor:	$a = 0{,}90$	*ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 19a)*

Der står:	Den 1. maj er **afgiften** lig 800 kr.	
dvs.	når x er 0 , er y lig 800	
Derfor:	$b = 800$	*ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 19b)*

$y = 800 \cdot 0{,}90^x$ hvor y = afgiften i kr. og x = antal uger efter 1. maj

22. Opstil formel ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst. Eksempel 3

22. Opgave (aftagende) **Delprøve 1 og 2**

I 2006 var der 1270 cyklister.
Hvert år falder antallet af cyklister med 1,35 %.

Indfør passende variable,
og opstil en formel til at bestemme antal cyklister i årene efter 2006.

Svar Passende variable:

x = **antal år efter 2006**
y = **antal cyklister**

Afgiften falder med **samme procent** hver uge,
så det er en **eksponentiel funktion** $y = b \cdot a^x$.

Der står:	Når **antal år** bliver én større, bliver **antal** 1,35 % mindre
dvs.	når x bliver én større, bliver y 1,35 % mindre
så	når x bliver én større, bliver y ganget med 0,9865
Derfor:	$a = 0{,}9865$ *ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 19a)*

Tallet 0,9865 kan udregnes sådan:

$$p\,\% = r \cdot 100\,\%$$ Dette er formel (3) i formelsamlingen.

$$-1{,}35\,\% = r \cdot 100\,\%$$

$$\frac{-1{,}35}{100} = r$$

$$-0{,}0135 = r$$

$$a = 1 + r$$ Fra formel (51) i formelsamlingen.

$$a = 1 + (-0{,}0135)$$

$$a = 0{,}9865$$

Der står:	I 2006 er **antal** lig 1270 .
dvs.	når x er 0 , er y lig 1270
Derfor:	$b = 1270$ *ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 19b)*

$y = 1270 \cdot 0{,}9865^x$ hvor y = antal cyklister og x = antal år efter 2006

23. Opstil formel ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst. Eksempel 4

23. Opgave **Delprøve 1 og 2**

(voksende)

Nogle planter med højden 8 cm udplantes. Herefter stiger planternes gennemsnitlige højde med 20 % hver uge.

Indfør passende variable, og opstil en formel til at bestemme planternes gennemsnitlige højde i perioden efter udplantningen..

Svar Passende variable:

x = **antal uger efter udplantning**

y = **planternes gennemsnitlige højde**

Planternes gennemsnitlige højde stiger med **samme procent** hver uge,
så det er en **eksponentiel funktion** $y = b \cdot a^{x}$.

Der står:	Når **antal uger** bliver én større, bliver **gennemsnitlig højde** 20 % større	
dvs.	når x bliver én større, bliver y 20 % større	
så	når x bliver én større, bliver y ganget med 1,20	100 % + 20 % = 120 %
Derfor:	$a = 1{,}20$	*ifølge reglen om hvad a fortæller (regel 19a)*

Der står:	Ved udplantningen er **gennemsnitlig højde** lig 8 .	
dvs.	når x er 0 , er y lig 8	
Derfor:	$b = 8$	*ifølge reglen om hvad b fortæller (regel 19b)*

$y = 8 \cdot 1{,}20^{x}$ hvor y = planternes gennemsnitlige højde
og x = antal uger efter udplantning

24. Skriv hvad a og b i $y = b \cdot a^x$ fortæller. Eksempel 1

24. Opgave (voksende) **Delprøve 1 og 2** **Mindstekravsopgave**

Om en figur på skærmen gælder at

$$y = 300 \cdot 1{,}40^x$$

hvor x = temperaturen og y = arealet i cm^2

Hvad fortæller tallene 300 og 1,40 om figuren?

Svar 140 % – 100 % = 40 %

Ligningen er af typen $y = b \cdot a^x$, så

når ***x*** bliver én enhed større, bliver ***y*** ganget med ***a*** . *Se 19a*

Dvs. Når **temperaturen** bliver én grad højere, bliver **arealet** ganget med **1,40** .

Så Når **temperaturen** bliver én grad højere, bliver **arealet** 40 % større.

Dette er hvad tallet 1,40 fortæller om figuren.

Når ***x*** er 0 , er ***y*** lig ***b*** . *Se 19b*

Dvs. Når **temperaturen** er 0 grader, er **arealet** **300** cm^2.

Dette er hvad tallet 300 fortæller om figuren.

25. Skriv hvad a og b i $y = b \cdot a^x$ fortæller. Eksempel 2

25. Opgave (voksende) **Delprøve 1 og 2**

Antal lån kan beskrives ved

$$y = 247 \cdot 1{,}016^x$$

hvor x = antal uger efter firmaets åbning og y = antal lån

Hvad fortæller tallene 247 og 1,016 om antal lån?

Svar Ligningen er af typen $y = b \cdot a^x$, så

Når ***x*** bliver én større, bliver ***y*** ganget med ***a*** . *Se 19a*

Dvs. Når **antal uger** bliver én større, bliver **antal lån** ganget med **1,016** .

Så Hver uge stiger antallet af lån med 1,6 %.

Dette er hvad tallet 1,016 fortæller om antal lån.

De 1,6 % kan udregnes sådan:

$$\begin{aligned} 1+r &= a \\ 1+r &= 1{,}016 \\ 1+r-1 &= 1{,}016-1 \\ r &= 0{,}016 \end{aligned}$$

Fra formel (51) i formelsamlingen.

$$\begin{aligned} p\,\% &= r \cdot 100\,\% \\ p\,\% &= 0{,}016 \cdot 100\,\% \\ p\,\% &= 1{,}6\,\% \end{aligned}$$

Dette er formel (3) i formelsamlingen.

Når ***x*** er 0 , er ***y*** lig ***b*** . *Se 19b*

Når **antal uger** er 0, er **antal lån** **247**.

Dvs. Ved firmaets åbning var antal lån 247.

Dette er hvad tallet 247 fortæller om antal lån.

26. Skriv hvad a og b i $y = b \cdot a^x$ fortæller. Eksempel 3

26. Opgave **Delprøve 1 og 2** **Mindste kravs opgave**

(aftagende) Antallet af dyr ændres sådan at $y = 270 \cdot 0{,}90^x$ hvor

x = antal dage efter 1. juni og y = antal dyr

Hvad fortæller tallene 270 og 0,90 om antallet af dyr?

Svar Ligningen er af typen $y = b \cdot a^x$ så

Når x bliver én større, bliver y ganget med a *Se 19a*

Dvs. Når **antal dage** bliver én større, bliver **antal dyr** ganget med **0,90** .

Så Når **antal dage** bliver én større, bliver **antal dyr** 10 % mindre.

Dvs. Hver dag bliver antallet af dyr 10 % mindre.
Dette er hvad tallet 0,90 fortæller om antallet af dyr.

De $-10\,\%$ kan udregnes sådan:

$$1+r = a$$ Fra formel (51) i formelsamlingen.

$$1+r = 0{,}90$$
$$1+r-1 = 0{,}90-1$$
$$r = -0{,}10$$

$$p\,\% = r \cdot 100\,\%$$ Dette er formel (3) i formelsamlingen.

$$p\,\% = -0{,}10 \cdot 100\,\%$$
$$p\,\% = -10\,\%$$

Når x er 0 , er y lig **b** . *ifølge regel 19b om hvad b fortæller*

Dvs. Når **antal dage** er 0, er **antal dyr** **270** .

Dvs. Den 1. juni er antallet af dyr 270 .
Dette er hvad tallet 270 fortæller om figuren.

27. Skriv hvad a og b i $y = b \cdot a^x$ fortæller. Eksempel 4

27. Opgave **Delprøve 1 og 2**

(voksende) Om overskuddet gælder $y = 25 \cdot 1{,}072^x$

hvor y er overskuddet (mio. kr.) og x er antal år efter 2005

Hvad fortæller tallet 1,072 om overskuddet?

Svar Forskriften er af typen $y = b \cdot a^x$, så

når x bliver én enhed større, bliver y ganget med a . *Se 19a*

Dvs. Når **antal år** bliver én større, bliver **overskuddet** ganget med 1,072 .

Så Når **antal år** bliver én større, bliver **overskuddet** 7,2 % større.

Dvs. Hvert år stiger overskuddet med 7,2 % .
Dette er hvad tallet 1,072 fortæller om overskuddet.

De $7{,}2\,\%$ kan udregnes sådan:

$$1+r = a$$ Fra formel (51) i formelsamlingen.

$$1+r = 1{,}072$$
$$1+r-1 = 1{,}072-1$$
$$r = 0{,}072$$

$$p\,\% = r \cdot 100\,\%$$ Dette er formel (3) i formelsamlingen.

$$p\,\% = 0{,}072 \cdot 100\,\%$$
$$p\,\% = 7{,}2\,\%$$

Eksponentiel funktion: Udregn a og b

28. Udregn a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra to oplysninger.

Opgave 28 **Delprøve 2**

En plantes vægt kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen $y = b \cdot a^x$
hvor y er vægt i kg, og x er år efter udplantning.
Efter 2 år er vægten 1,60 kg. Efter 5 år er vægten 4,10 kg.

Udregn a og b.

Svar Der står: Efter 2 **år** er **vægten** 1,60 kg. Efter 5 **år** er **vægten** 4,10 kg.

Dvs. Når $x = 2$ er $y = 1{,}60$. Når $x = 5$ er $y = 4{,}10$.

Så $1{,}60 = b \cdot a^2$ og $4.10 = b \cdot a^5$

Nspire løser ligningssystemet $1.6 = b \cdot a^2$ og $4.1 = b \cdot a^5$ mht. a og b

og får $a = 1{,}36843 \approx 1{,}368$ og $b = 0{,}854432 \approx 0{,}854$.

$$\text{solve}\left(1.6 = b \cdot a^2 \text{ and } 4.1 = b \cdot a^5, a, b\right) \blacktriangleright a = 1.36843 \text{ and } b = 0.854432$$

$a = 1{,}368$ og $b = 0{,}854$.

29a. Eksponentiel regression, residualplot, punktplot.

Opgave 29 **Delprøve 2 . Spørgsmål a) og b) er Mindste kravs opgaver**

Tabellen viser antallet af indbyggere i et område i perioden 2000-2005.

Årstal	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Antal	80	110	140	170	200	240

I en model beskrives antallet ved en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$

hvor $f(x)$ er antallet af indbyggere, og x er antal år efter 2000.

a) Tegn et punktplot af tabellens data.

b) Bestem tallene a og b ved eksponentiel regression.

c) Tegn et residualplot, og kommentér på baggrund heraf den eksponentielle models anvendelighed til at beskrive antal indbyggere som funktion af tiden.

Se fortsættelsen i rammerne 29b og 29c.

29b. Brugsanvisning til opgave 29

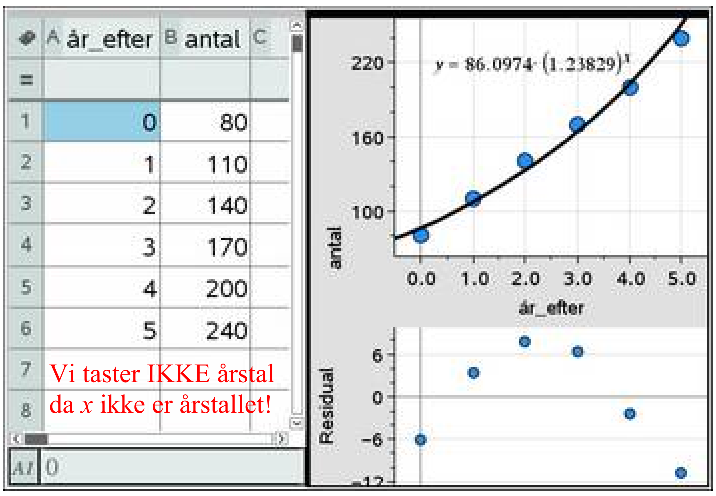
Start på ny opgave i Nspire.

Vælg et vindue af typen Lister og regneark .
Navngiv en søjle i søjlens øverste grå felt (som vist til højre) og tast x-værdier i den.
Navngiv en søjle og tast y-værdier i den.

Tilføj et vindue af typen Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.

Vælg i værktøjsmenuen
Undersøg data / Regression / eksponentiel .
Forskrift og punktplot (og graf) fremkommer.

Vælg i værktøjsmenuen
Undersøg data / Residualer / Residualplot .



Se fortsættelsen i ramme 29c.

29c. Besvarelse af opgave 29

Udregnet:	År efter 2000:	0	1	2	3	4	5
Oplyst:	Årstal:	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Oplyst:	Antal indbyggere:	80	110	140	170	200	240

I en model beskrives antallet ved en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$
hvor $f(x)$ er antallet af indbyggere, og x er antal år efter 2000.

Er vist i ramme 29b.

Vi åbner et regneark og taster år efter 2000 i x-søjlen, og antal indbyggere i y-søjlen (se næste vindue).

a) Ud fra dette tegner Nspire et punktplot (se næste vindue). Er vist i ramme 29b.

b) Nspire laver eksponentiel regression ud fra de to søjler og får forskriften

$$f(x) = 86{,}0974 \cdot 1{,}23829^x$$

dvs. $a = 1{,}23829$ og $b = 86{,}0974$.

c) Ud fra dette laver Nspire residualplottet (se næste vindue). Er vist i ramme 29b.
Punkterne ligger på kæde, så en eksponentiel model er ikke specielt egnet til at beskrive antal indbyggere som funktion af tiden.

Eksponentiel funktion: Fordoblingskonstant og halveringskonstant

30. Hvad er fordoblingskonstant og halveringskonstant.

Eksempel 30a Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

Antal uger efter køb:	0	1	2	3	4	5	6
Højde i cm:	12	15	19	24	30	38	48

I tabellen ser vi:

1 uge efter købet er højden 15 cm.
3 uger senere er højden 30 cm, som er det dobbelte af 15 cm.

2 uger efter købet er højden 19 cm.
3 uger senere er højden 38 cm, som er det dobbelte af 19 cm.

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet.

Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

30b En eksponentielt voksende funktion har en fordoblingskonstant T_2 .

Når x bliver T_2 enheder større, så bliver y fordoblet.

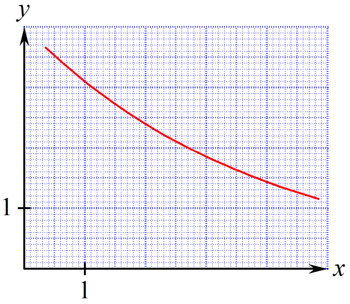
30c En eksponentielt aftagende funktion har en halveringskonstant $T_{0,5}$.

Når x bliver $T_{0,5}$ enheder større, så bliver y halveret.

31. Aflæs fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf.

Opgave 31a **Delprøve 1 og 2** **Mindste kravs opgave**

(halvering) Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende funktion.
Hvad er halveringskonstanten for denne sammenhæng?



Besvarelse af opgave 31a

Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende funktion.
Vi vil bestemme halveringskonstanten ved aflæsning.
Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan f.eks. starte med $x = 1$:

Når $x = 1$ er $y = 3{,}1$ (se nederste figur)

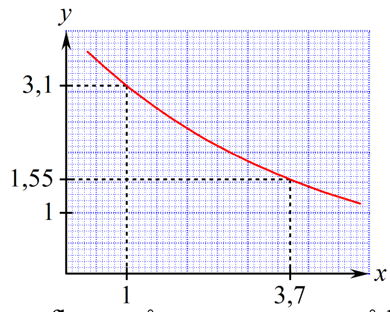
Det halve af 3,1 er $\frac{3{,}1}{2} = 1{,}55$.

Når $y = 1{,}55$ er $x = 3{,}7$ (se nederste figur)

For at halvere y skal vi altså øge x med

$3{,}7 - 1 = 2{,}7$ ← Vi har brugt (63) (graf og formel) i formelsamlingen.

så halveringskonstanten er 2,7 .



Bemærkning 31b (fordobling)

Hvis funktionen er eksponentielt voksende, kan fordoblingskonstanten aflæses på næsten samme måde:
Vi finder to grafpunkter hvor y-koordinaten til det ene er 2 gange y-koordinaten til det andet. Forskellen på de to punkters x-koordinater er fordoblingskonstanten.
Vi bruger altså (56) (graf og formel) i formelsamlingen.

32. Skriv hvad fordoblings- og halveringskonstant fortæller.

Opgave 32a **Delprøve 1 og 2** **Mindste kravs opgave**

(fordobling) Antallet af syge kan med tilnærmelse beskrives ved en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ hvor x er antal dage efter 1. maj og y er antal syge.
I avisen står at fordoblingskonstanten er 9 .
Hvad fortæller dette om antallet af syge?

Når x er tiden, kan vi sige fordoblingstid i stedet for fordoblingskonstant .

Besvarelse af opgave 32a

$y = b \cdot a^x$ hvor x er antal dage efter 1. maj og y er antal syge.

At fordoblingskonstanten er 9 betyder:

	Når	x	bliver 9 større, så bliver	y	fordoblet.
Dvs:	Når	**antal dage**	bliver 9 større, så bliver	**antal syge**	fordoblet.

Så: Antal syge fordobles på 9 dage.

Opgave 32b **Delprøve 1 og 2** **Mindste kravs opgave**

(halvering) Antallet af syge kan med tilnærmelse beskrives ved en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ hvor x er antal dage efter 1. maj og y er antal syge.
I avisen står at halveringskonstanten er 9 .
Hvad fortæller dette om antallet af syge?

Når x er tiden, kan vi sige halveringstid i stedet for halveringskonstant .

Besvarelse af opgave 32b

$y = b \cdot a^x$ hvor x er antal dage efter 1. maj og y er antal syge.

At halveringskonstanten er 9 betyder:

	Når	x	bliver 9 større, så bliver	y	halveret.
Dvs:	Når	**antal dage**	bliver 9 større, så bliver	**antal syge**	halveret.

Så: Antal syge halveres på 9 dage.

33. Udregn y-værdier med T_2 og $T_{0,5}$.

Opgave 33a **Delprøve 1**

For en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ er fordoblingskonstanten $T_2 = 3$.
Gør direkte brug af dette til at udfylde de tomme felter.

x		1		
y		7		

Besvarelse af opgave 33a

+3 +3 +3

x	–2	1	4	7
y	3,5	7	14	28

·2 ·2 ·2

Opgave 33b **Delprøve 1**

For en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ er $T_{0,5} = 1,6$.
Gør direkte brug af dette til at udfylde de tomme felter.

x		4,8		
y		6		

Besvarelse af opgave 33b

+1,6 +1,6 +1,6

x	3,2	4,8	6,4	8
y	12	6	3	1,5

·0,5 ·0,5 ·0,5

34. Udregn T_2 og $T_{0,5}$ når vi kender ligningen $y = b \cdot a^x$.

Opgave 34a **Delprøve 2** **Mindstekravs opgave**

Bestem halveringskonstanten for funktionen $f(x) = 5 \cdot 0{,}92^x$.

Besvarelse af opgave 34a

Funktionen $f(x) = 5 \cdot 0{,}92^x$ er af typen $f(x) = b \cdot a^x$ med $a = 0{,}92$.

Halveringskonstanten er

$$T0.5 = \frac{\ln(0.5)}{\ln(a)}$$

Dette er formel (64) i formelsamlingen.

$$T0.5 = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.92)} = 8.31295$$

Halveringskonstanten for f er 8,3 .

I symbolet $T0.5$ er brugt større skriftstørrelse til T end til 0.5 . Der er ikke brugt sænket skrift.

Opgave 34b **Delprøve 1** **Mindstekravs opgave**

Antal ansatte vokser eksponentielt med 18 % om året.
Opstil en ligning til at bestemme hvor lang tid der går før antallet af ansatte er fordoblet.

Besvarelse af opgave 34b

Antal ansatte vokser 18 % om året, så forskriften for antal ansatte som funktion af af antal år er af typen $f(x) = b \cdot a^x$ med $a = 1{,}18$.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Dette er formel (57) i formelsamlingen.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}18)}$$

er antal år før antallet af ansatte er fordoblet.