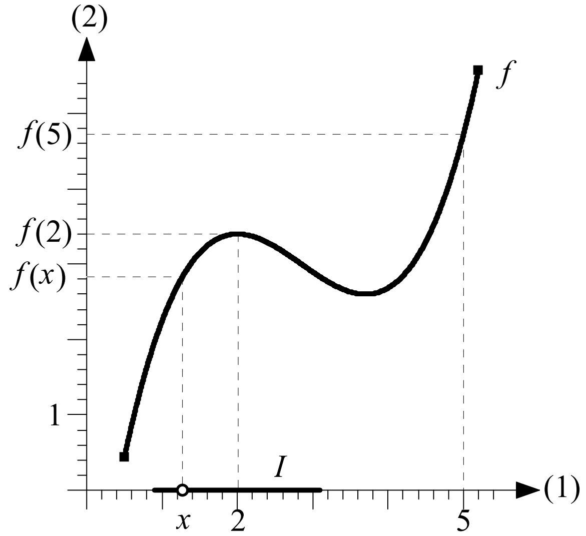
Differential-regning

2. del



2006 Karsten Juul

Indhold

Differentialregning 2. del

1. udgave 2006

6. Kontinuert funktion

6.01 Hvornår er $f(x)$ kontinuert i x_0 ?

(6a) Definition (foreløbig)

En funktion $f(x)$ siges at være kontinuert i et tal x_0 hvis der gælder

$f(x)$ er defineret i x_0 og

grafen for $f(x)$ har **ikke** et spring i x_0 .

Graf med hul

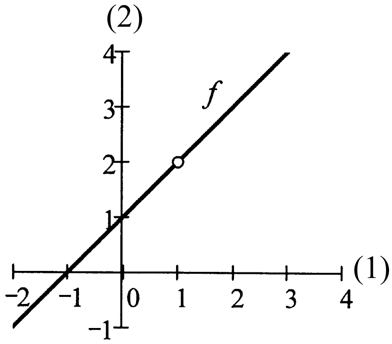
Figur 6b viser grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \; .$$

Om funktionen $f(x)$ gælder:

$f(x)$ er ikke kontinuert i 1
da $f(x)$ ikke er defineret i 1.

$f(x)$ er kontinuert i alle andre tal end 1.



Figur 6b

Den lille ring om punktet (1, 2) betyder at dette punkt ikke hører med til grafen.

(Sætningen " $f(x)$ er ikke defineret i 1" betyder som bekendt: "Der er ikke nogen funktionsværdi i 1", hvilket også kan formuleres sådan: " $f(1)$ eksisterer ikke").

Graf med spring

Figur 6c viser grafen for funktionen

$g(x) = \text{floor}(\tfrac{x}{2})$.

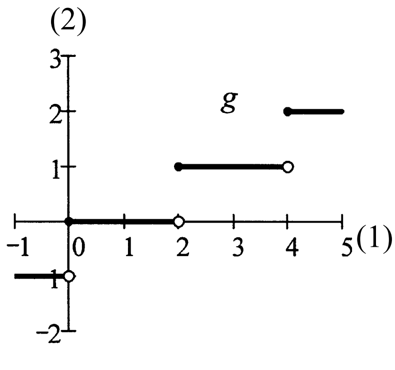
Om funktionen $g(x)$ gælder:

$g(x)$ er ikke kontinuert i tallene

$0, \; \pm 2, \; \pm 4, \; \cdots$

da grafen har et spring i hvert af disse tal.

$g(x)$ er kontinuert i alle andre tal.



Figur 6c

I øvelse 2.17 står hvad floor(x) betyder, og hvordan man får tegnet dens graf korrekt på lommeregneren.

6.02 Øvelse

(a) Ved aflæsning på figur 6c skal du bestemme tallene, $g(1{,}5)$, $g(2)$, $g(3{,}9)$ og $g(4)$.

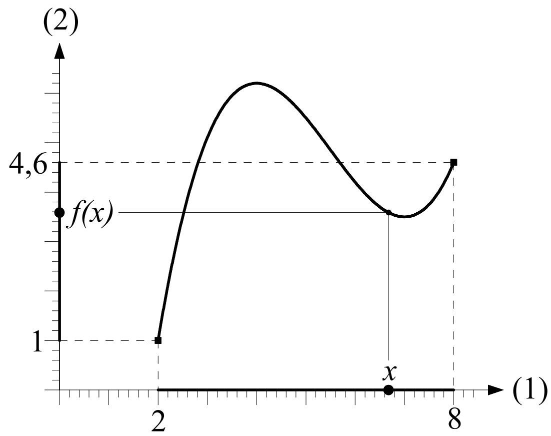
(b) Tegn grafen for en funktion $h(x)$ som er defineret i ethvert tal og både opfylder at $h(2) = -1$, at $h(4) = 1$ og at der ikke er noget tal x_0 mellem 2 og 4 hvor $h(x_0) = 0$.

6.03 Hvis $f(x)$ springer en værdi over, er der en x-værdi hvori $f(x)$ ikke er kontinuert

Figur 6d viser en interaktiv figur fra en computerskærm hvor man ved at trække x-punktet hen på et tal x kan aflæse funktionsværdien $f(x)$.

Når man lader x gennemløbe tallene fra 2 til 8, vil $f(x)$ bl.a. gennemløbe alle tal mellem $f(2) = 1$ og $f(8) = 4{,}6$, da der ikke er spring i grafen.

Dette anskueliggør gyldigheden af sætning (6e).



Figur 6d

(6e) Sætning

Når

en funktion $f(x)$ er kontinuert i to tal a og b samt i ethvert tal mellem a og b

gælder

ethvert tal mellem de to tal $f(a)$ og $f(b)$ er lig funktionsværdien $f(x)$ af et tal x mellem a og b.

6.04 Øvelse

Vedr.den interaktive skærmfigur på figur 6d.

(a) Fra 2 trækker vi x-punktet mod højre. Hvor langt ca. skal vi trække x-punktet før $f(x)$ har gennemløbet alle tal fra og med $f(2)$ til og med $f(8)$?

(b) Hvor mange gange antager $f(x)$ værdien 4 når x gennemløber intervallet $[2;8]$?

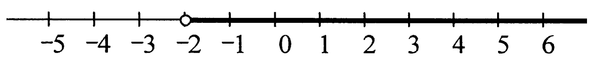
(c) Tegn en graf for en anden funktion $f(x)$ hvor $f(2)=1$ og $f(8)=4{,}6$, men hvor $f(x)$ ikke gennemløber alle tal mellem de to tal $f(2)$ og $f(8)$ når x gennemløber $[2;8]$.

6.05 Intervaller (repetition)

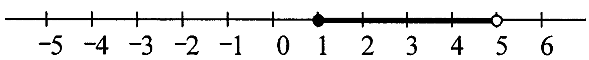
Ved et **interval** forstås som bekendt en **sammenhængende del af tallinjen**.

Eksempler på intervaller

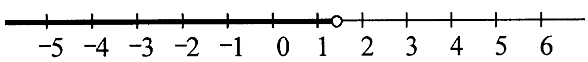
Tallene større end -2 udgør et interval der skrives $]-2;\infty[$.



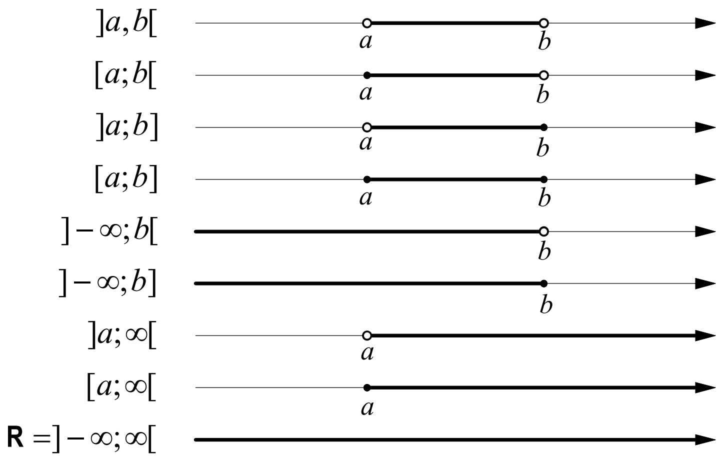
Tallet 1 sammen med tallene mellem 1 og 5 udgør et interval der skrives $[1;5[$.



Tallene mindre end $\sqrt{2}$ udgør et interval der skrives $]-\infty;\sqrt{2}[$.



Oversigt over alle intervaltyper



6.06 Sætning om konstant fortegn i interval

(6f) Sætning

Hvis

$(*)$ $f(x)$ er kontinuert og forskellig fra 0 i ethvert tal x i et interval

gælder:

$(**)$ $f(x)$ har samme fortegn for alle tal x i intervallet.

Bevis for sætning (6f)

Antag at $(*)$ gælder.

Antag desuden $(**)$ **ikke** gælder.

Når $(**)$ ikke gælder, må der være to tal x_0 og x_1 i intervallet så $f(x_0)$ og $f(x_1)$ har forskelligt fortegn.

Da 0 ligger mellem $f(x_0)$ og $f(x_1)$, følger af sætning (6e) at

0 er lig $f(x)$ for et tal x mellem x_0 og x_1.

Og dette er i modstrid med at der i $(*)$ står at $f(x)$ er forskellig fra 0 for ethvert tal x i intervallet.

Når $(*)$ gælder, fører det altså til en modstrid at antage at $(**)$ ikke gælder, dvs. $(**)$ må gælde når $(*)$ gælder, og det var dette der skulle vises.

6.07 Øvelse

Skitsér grafen for en funktion $f(x)$ der opfylder betingelserne

$f(x)$ er kontinuert i ethvert tal x

og

$f(7)=1$, $f(8)=4$, $f(9)=2$ og

ligningen $f(x)=3$ har kun én løsning

eller argumenter for at det ikke kan lade sig gøre.

6.08 Polynomier

Eksempler på polynomier:

Konstanter er polynomier:

$$f(x) = -\tfrac{1}{3} \qquad f(x) = \sqrt{5}$$

Førstegradspolynomier:

$$f(x) = x \qquad f(x) = 7x+1$$

Andengradspolynomier:

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad f(x) = 3x^2 - x + 4$$

Tredjegradspolynomier:

$$f(x) = -x^3 \qquad f(x) = x^3 + 2x^2 + x$$

Fjerdegradspolynomium:

$$f(x) = 0{,}13\,x^4 + 0{,}72\,x^3 - 1{,}5\,x^2 + 2{,}9\,x + 4{,}5$$

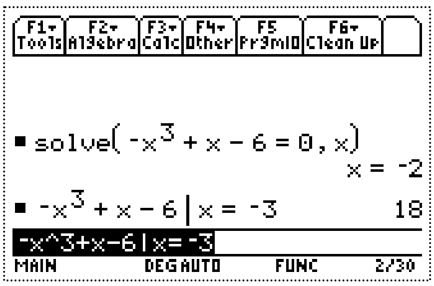
Osv.

(6g) Sætning

Et polynomium er kontinuert i ethvert tal.

6.09 Bestemme fortegn

På lommeregneren finder vi at polynomiet $-x^3 + x - 6$ kun har det ene nulpunkt -2 .



Figur 6h

Da $-x^3 + x - 6$ således er forskellig fra 0 og kontinuert i ethvert tal x i intervallet $]-\infty; -2[$, vil $-x^3 + x - 6$ have samme fortegn i alle tal x i $]-\infty; -2[$

På lommeregneren finder vi at når $x = -3$ er $-x^3 + x - 6$ lig 18, altså et positivt tal.

Altså er $-x^3 + x - 6$ et positivt tal når x er et tal i $]-\infty; -2[$.

$$\begin{array}{rcc}
x: & -3 & -2 \\
-x^3 + x - 6: & \underbrace{\qquad 18 \qquad}_{\text{konstant fortegn, dvs } +} & 0
\end{array}$$

6.10 Øvelse

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 6.09. Hvilket fortegn har $-x^3+x-6$ hvis x er større end -2 ?

(b) Bestem de intervaller hvor polynomiet x^4-x^2-2 har konstant fortegn, og bestem de værdier af x for hvilke x^4-x^2-2 er negativ.

6.11 Øvelse

En funktion er givet ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-1$.

(a) Bestem $f'(x)$.

(b) Løs ligningen $f'(x)=0$ og bestem de værdier af x for hvilke $f'(x)$ er positiv.

7. Monotoniforhold

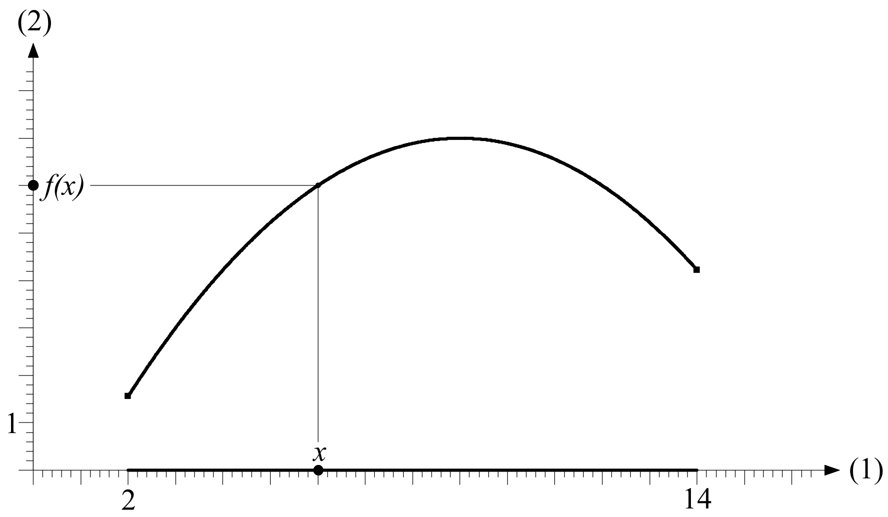
7.01 Begreberne "voksende" og "aftagende" (repetition)

Figur 7a viser en interaktiv figur fra en computerskærm hvor man ved at trække x-punktet hen på et tal x kan aflæse funktionsværdien $f(x)$.

På figuren ses:

Når vi trækker x gennem tallene fra 2 til 9, vil $f(x)$ hele tiden øges.

Når vi trækker x gennem tallene fra 9 til 14, vil $f(x)$ hele tiden mindskes.



Figur 7a

Som bekendt siger man:

$f(x)$ er voksende i $[2;9]$

$f(x)$ er aftagende i $[9;14]$.

Er $f(x)$ både aftagende og voksende i 9 ?

Nej, vi taler ikke om at en funktion er voksende i **ét tal**. Vi taler om at en funktion er voksende i et **interval**.

At $f(x)$ er voksende i $[2;9]$ betyder at uanset hvordan man vælger to tal x_1 og x_2 i $[2;9]$ sådan at $x_1 < x_2$, så vil $f(x_1) < f(x_2)$.

At $f(x)$ er aftagende i $[9;14]$ betyder at uanset hvordan man vælger to tal x_1 og x_2 i $[9;14]$ sådan at $x_1 < x_2$, så vil $f(x_1) > f(x_2)$.

7.02 Øvelse

Vedr. funktionen $f(x)$ fra ramme 7.01 .

(a) Angiv to tal x_1 og x_2 i $[8{,}4; 9{,}4]$ som opfylder at $x_1 < x_2$ og $f(x_1) < f(x_2)$.

(b) Angiv to tal x_1 og x_2 i $[8{,}4; 9{,}4]$ som opfylder at $x_1 < x_2$ og $f(x_1) > f(x_2)$.

(c) Er $f(x)$ voksende i $[8{,}4; 9{,}4]$?

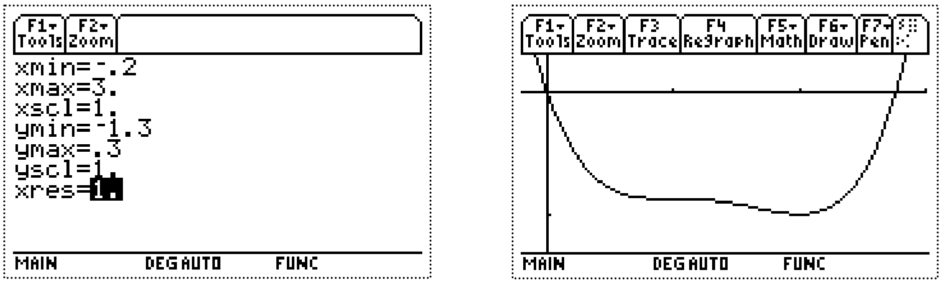
(d) Er $f(x)$ aftagende i $[8{,}4; 9{,}4]$?

7.03 Øvelse

Indtast funktionen $f(x) = 0{,}375x^4 - 2x^3 + 3{,}75x^2 - 3x$ og få grafvinduet på figur 7b frem.

(a) Brug `Value` til at bestemme funktionsværdien $f(1)$.

(b) Hvor stor kan b være når der skal gælde at $f(x)$ er aftagende i $[0; b]$? (Gæt svaret efter at have bestemt relevante funktionsværdier).



Figur 7b

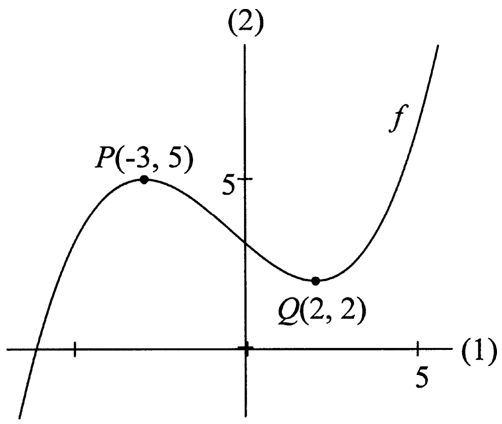
7.04 Monotoniforhold

At angive **monotoniforholdene** for en funktion $f(x)$ vil sige at angive i hvilke **x-intervaller** $f(x)$ hhv. **aftager**, **vokser** eller er **konstant**.

På figur 7c er vist grafen for et tredjegrads-polynomium $f(x)$. Grafens toppunkter er $P(-3, 5)$ og $Q(2, 2)$.

Monotonoforholdene kan angives sådan:

$f(x)$ er voksende i $]-\infty; -3]$,
aftagende i $[-3; 2]$ og
voksende i $[2; \infty[$.



Figur 7c

7.05 Øvelse

Om andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ oplyses at a er negativ, og at grafens toppunkt er $P(1-\sqrt{2}\,,-2)$.

Angiv monotoniforholdene for $f(x)$.

7.06 Øvelse

Få tegnet grafen for $f(x) = 0{,}25x^3 + 1{,}5x^2 + 3{,}75x$ på lommeregneren, og eksperimenter med at vælge forskellige udsnit så du får overblik over grafens forløb.

Gæt ud fra grafen hvordan monotoniforholdene er, og angiv disse.

7.07 Øvelse

Tegn grafen for en funktion $f(x)$ som opfylder:

> $f(x)$ er negativ og kontinuert i ethvert tal x
>
> $f(x)$ er aftagende i $]-\infty;0]$ og voksende i $[0;\infty[$.

7.08 Øvelse

(a) Tegn grafen for en funktion $f(x)$ sådan at der gælder:

> $f(x)$ er aftagende i intervallet $I = [0;8]$,
>
> $f(x)$ er kontinuert i ethvert tal i I, og
>
> $f'(4) = 0$,

eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

(b) Tegn grafen for en funktion $f(x)$ sådan at der gælder:

> $f(x)$ er ikke voksende i intervallet $I = [0;8]$, og
>
> $f'(x)$ er ikke negativ for noget tal x i I,

eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

(c) Tegn grafen for en funktion $f(x)$ sådan at der gælder:

> $f(x)$ er ikke voksende i intervallet $I = [0;8]$, og
>
> $f'(x)$ er positiv for hvert tal x i I,

eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

7.09 Monotoniforhold og tangenthældning $f'(x)$

Hvis $f'(x)$ er positiv

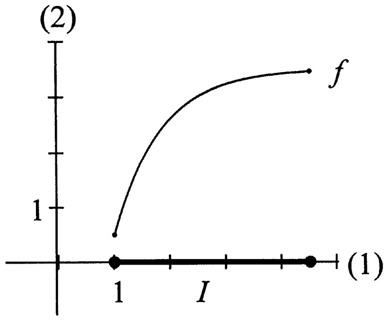
Grafen på figur 7d er tegnet sådan at der gælder

$(*)$ tangenthældningen $f'(x)$ er positiv for hvert tal x i intervallet I .

Det ses at der gælder

$(**)$ $f(x)$ er voksende i intervallet I .

Hvis man prøver at tegne grafen sådan at $(*)$, men ikke $(**)$ gælder, så bliver man overbevist om at det ikke kan lade sig gøre. Man kan bevise at hvis $(*)$ gælder, så gælder $(**)$ også.

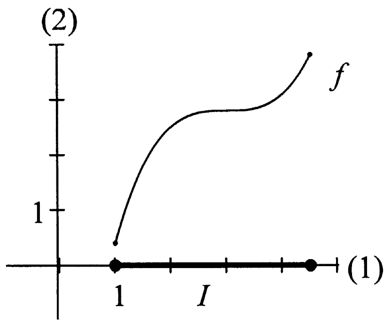


Figur 7d

Hvis der er undtagelser fra at $f'(x)$ er positiv

Funktionen $f(x)$ hvis graf er vist på figur 7e, er voksende selv om der er ét punkt hvori tangenthældningen er 0.

Selv om der er enkelte undtagelser fra $(*)$, kan man slutte at $(**)$ gælder.



Figur 7e

(7f) Sætning

Laf $f(x)$ være en funktion der er differentiabel i ethvert tal x i et interval I .

Hvis $f'(x)$ er positiv for alle x i I , evt. med endeligt mange undtagelser, **så** er $f(x)$ voksende i I .

Hvis $f'(x)$ er negativ for alle x i I , evt. med endeligt mange undtagelser, **så** er $f(x)$ aftagende i I .

7.10 Øvelse

(a) Om en funktion $f(x)$ er oplyst at $f'(x) = x^3$ for alle x i intervallet $]-\infty; 0[$.
Brug sætning (7f) til at gøre rede for at $f(x)$ er aftagende i $]-\infty; 0[$.

(b) Om en funktion $g(x)$ er oplyst at $g(x) = x^3$ for alle x i **R**.
Som bekendt er $g(x)$ voksende i **R**. Brug sætning (7f) til at gøre rede for dette.

7.11 Øvelse

Om en funktion $f(x)$ er oplyst at $f'(x)=x^3-2x^2$ og at løsningerne til ligningen $f'(x)=0$ er 0 og 2.

Brug sætningerne (6f) og (7f) til at bestemme monotoniforholdene for $f(x)$.

7.12 Bestemme monotoniforhold med differentialregning

Opgaven

Vi vil bestemme monotoniforhold for funktionen

$$f(x)=-\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3-2x^2\ .$$

Besvarelse

Vi finder

$$f'(x)=-x^3-4x^2-4x\ .$$

> **Her skal indføjes en redegørelse** for hvordan løsningerne -2 og 0 er bestemt. Disse løsninger kan fx bestemmes med solve på lommeregneren. De kan også bestemmes ved at sætte x uden for en parentes og derefter bruge nulreglen.

Løsningerne til ligningen $f'(x)=0$ er -2 og 0.

Tallene -2 og 0 deler tallinjen op i tre intervaller. $f'(x)$ har konstant fortegn i hvert af disse da der i hvert af dem gælder at $f'(x)$ er kontinuert og forskellig fra 0. For hvert interval bestemmes fortegnet:

$$f'(-3)=3\ ,\qquad f'(-1)=1\ ,\qquad f'(1)=-9\ .$$

Heraf ses:

I $]-\infty;0]$ er $f'(x)$ positiv bortset fra i -2 og 0, og

i $[0;\infty[$ er $f'(x)$ negativ bortset fra i 0.

Af dette følger:

$f(x)$ er voksende i $]-\infty;0]$ og aftagende i $[0;\infty[$.

Oversigt:

x :		-2		0	
$f'(x)$:	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$:	↗		↗		↘

7.13 Øvelse

Vedr. opgaveløsningen i ramme 7.12 .

(a) Opgaveløseren påstår bl.a. at $f'(x)$ er forskellig fra 0 når x er et tal mellem -2 og 0. Hvilken af sætningerne (1) – (3) nedenfor er opgaveløserens begrundelse herfor?

(1) $f'(x)$ har konstant fortegn i hvert af de intervaller som -2 og 0 deler tallinjen op i.

(2) $f'(x)$ er kontinuert i ethvert tal mellem -2 og 0.

(3) Løsningerne til ligningen $f'(x)=0$ er -2 og 0 .

(b) Opgaveløseren siger at $f'(x)$ ikke er positiv for ethvert tal x i intervallet $]-\infty;0]$, men påstår alligevel at $f(x)$ er voksende i $]-\infty;0]$. Kommentér dette.

7.14 Øvelse

Vedr. ramme 7.12 .

Der er omtalt to måder hvorpå ligningen $f'(x)=0$ kan løses. Løs ligningen på begge måder.

7.15 Øvelse

Brug metoden fra ramme 7.12 til at bestemme monotoniforholdene for funktionen

$$f(x)=\tfrac{1}{2}x^4-2x+\tfrac{1}{2}\ .$$

7.16 Øvelse

En funktion f opfylder følgende betingelser:

f er differentiabel i **R** og opfylder følgende:

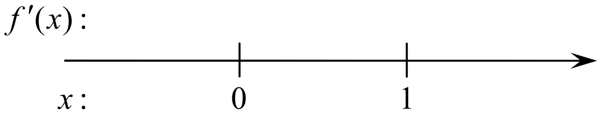
$$\begin{array}{lccccccc} x: & & -12 & & -6 & & -2 & \\ \hline f'(x): & + & 0 & - & 0 & - & 0 & - \end{array}$$

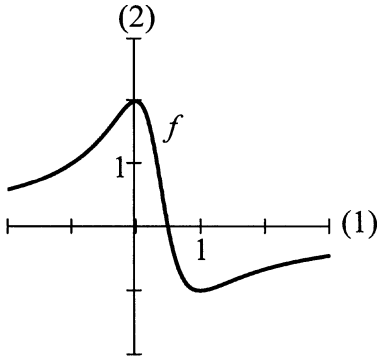
(a) Angiv monotoniforholdene for f .

(b) Tegn grafen for en eller anden funktion f som opfylder ovenstående betingelser.

7.17 Øvelse

Lav en nøjagtig kopi af følgende tallinje og tilføj det manglende så den bliver i overensstemmelse med grafen på figur 7g .





Figur 7g

8. Lokale ekstrema

8.01 Lokalt maksimum

Oplæg

Figur 8a viser en interaktiv figur fra en computerskærm hvor man ved at trække x-punktet hen på et tal x kan aflæse funktionsværdien $f(x)$.

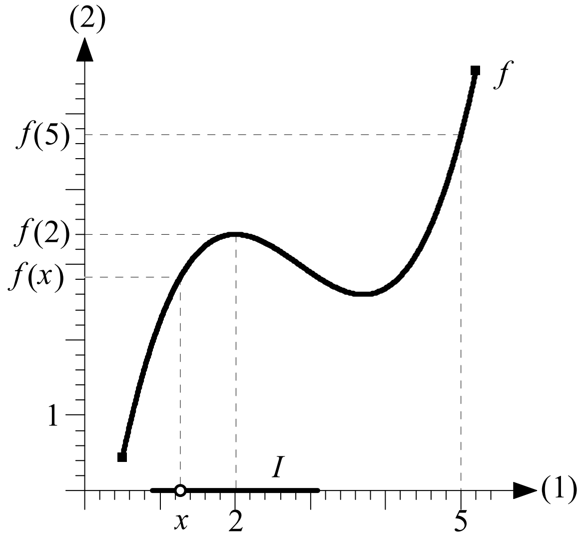
På førsteaksen er markeret et interval I.

På figuren ser vi:

For alle tal x i I er $f(x)$ mindre end eller lig $f(2)$.

Tallet $f(2)$, altså 3,4, er **ikke maksimum** (størsteværdi) for $f(x)$ da der uden for I er tal x hvori $f(x)$ er større end $f(2)$. Fx er $f(5)$ større end $f(2)$.

Man siger at der er **lokalt maksimum i** 2. Det **lokale maksimum er** 3,4.



Figur 8a

(8b) Definition af lokalt maksimum

Hvis der for en funktion $f(x)$ gælder at

$f(x) \leq f(x_0)$ for alle x i et interval omkring x_0

siger man at

$f(x)$ har lokalt maksimum i x_0

og at

det lokale maksimum er tallet $f(x_0)$.

8.02 Øvelse

Vedr. figur 8a.

(a) Kunne intervallet I være valgt større når der skal gælde at $f(x) \le f(2)$ for alle tal x i I ?

(b) Angiv et interval I omkring 3 så $f(x) \le f(3)$ for alle tal x i I, eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

(c) Angiv et interval I omkring 3,7 så $f(x) \ge f(3{,}7)$ for alle tal x i I, eller sig at det ikke kan lade sig gøre.

8.03 Lokalt minimum

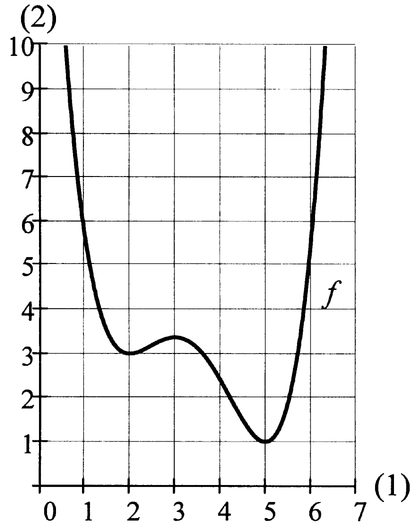
Oplæg

På figur 8c er vist grafen for et fjerdegradspolynomium.

Der findes et interval om 2 så der for alle x i intervallet gælder at $f(x) \ge f(2)$. Man siger derfor at $f(x)$ har lokalt minimum i 2. Det lokale minimum er tallet $f(2)$, altså 3.

Der findes et interval om 5 så der for alle x i intervallet gælder at $f(x) \ge f(5)$. Altså har $f(x)$ lokalt minimum i 5. Det lokale minimum er 1.

For alle x i **R** gælder $f(x) \ge 1$, så $f(x)$ har minimum i 5 og minimum (mindsteværdien) er 1.



Figur 8c

(8d) Definition af lokalt minimum

Hvis der for en funktion $f(x)$ gælder at

$f(x) \ge f(x_0)$ for alle x i et interval omkring x_0

siger man at

$f(x)$ har lokalt minimum i x_0

og at

det lokale minimum er tallet $f(x_0)$.

8.04 Øvelse

Vedr. figur 8c.

Angiv er tal x_0 og et interval omkring x_0 så det for alle x i intervallet gælder at $f(x) \le f(x_0)$.

8.05 Lokale ekstrema

(8e) Definition

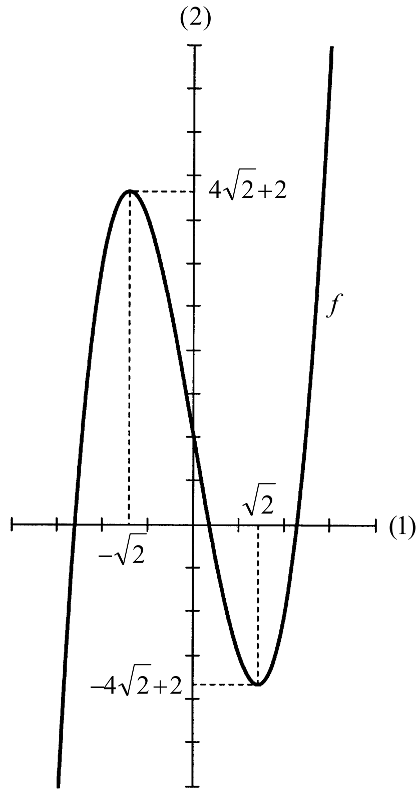
Ordet **ekstremum** er en fællesbetegnelse for maksimum og minimum. I flertal hedder det **ekstrema**.

Figur 8f viser grafen for en funktion $f(x)$.

De **lokale ekstrema** kan angives sådan:

Der er lokalt maksimum i $-\sqrt{2}$ og det lokale maksimum er $4\sqrt{2}+2$.

Der er lokalt minimum i $\sqrt{2}$ og det lokale minimum er $-4\sqrt{2}+2$.



Figur 8f

8.06 Øvelse

(a) Tegn grafen for en funktion $f(x)$ der opfylder følgende:

$f(x)$ er differentiabel i **R**

$f'(-1)=0$, men der er ikke lokalt ekstremum i $x=-1$

der er lokalt ekstremum i $x=-7$ og i $x=1$.

(b) Angiv eventuelle lokale ekstrema for funktionen i ramme 7.12 .

8.07 Bestemme lokale ekstrema

Opgaven

Vi vil bestemme de lokale ekstrema for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 18x - 90 \ .$$

For at kunne afgøre i hvilke *x*-værdier der er lokale ekstrema, må vi kende monotoniforholdene for $f(x)$. Derfor starter vi med at bestemme disse.

Besvarelse

Her skal indføjes en redegørelse for hvordan løsningerne -6 og 3 er bestemt.

Differentialkvotienten er

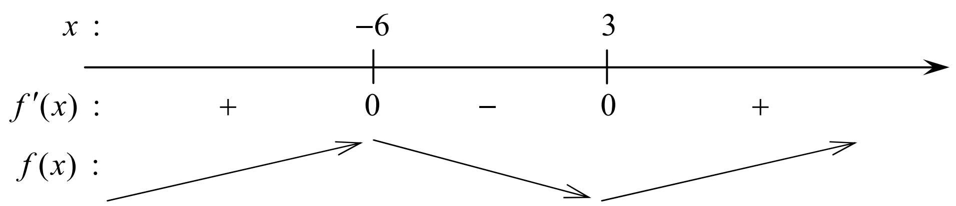
$$f'(x) = x^2 + 3x - 18 \ .$$

Løsningerne til ligningen $f'(x) = 0$ er -6 og 3 .

Tallene -6 og 3 deler tallinjen op i tre intervaller. $f'(x)$ har konstant fortegn i hvert af disse da der i hvert af dem gælder at $f'(x)$ er kontinuert og forskellig fra 0. For hvert interval bestemmes fortegnet:

$$f'(-7) = 10 \ , \quad f'(0) = -18 \ , \quad f'(4) = 10 \, .$$

Vi kan slutte følgende:



Da $f(-6) = 0$ og $f(3) = -\frac{243}{2}$, fås

$f(x)$ har lokalt maksimum i -6 og det lokale maksimum er 0

$f(x)$ har lokalt minimum i 3 og det lokale minimum er $-\frac{243}{2}$.

8.08 Øvelse

Bestem lokale ekstrema for funktionen $f(x) = 2x^2 - x^4$.

8.09 Øvelse

Figur 8a i ramme 8.01 er et billede af en interaktiv figur. Når x trækkes gennem værdierne fra 0,5 til 5,2 , så kan man for hver værdi af x aflæse værdien af $f(x)$ på andenaksen.

(a) For hvor mange værdier af x vil $f(x) = 3$?

(b) Hvis vi i $f(x) = a$ erstatter a med et bestemt tal, så får vi en ligning vi kan løse. Vi vil vælge tallet a sådan at den fremkomne ligning har præcis to løsninger. Hvad kan vi så fx sætte a til?

8.10 Øvelse

(a) I ramme 8.07 er fandt vi frem til visse oplysninger om en funktion $f(x)$. Benyt disse oplysninger til at skitsere grafen. Der er ikke brug for at udregne flere punkter på grafen da den kun skal bruges som et hjælpemiddel til at besvare spørgsmål (b).

(b) For hvilke værdier af a har ligningen $f(x) = a$ kun én løsning?

8.11 Bestemme ekstremum med differentialregning

Vi vil bestemme minimum for funktionen

$$f(x) = 0{,}50x^3 - 0{,}39x + 1{,}4 \;, \quad x > 0 \;.$$

Differentialkvotienten er

$$f'(x) = 1{,}50x^2 - 0{,}39 \;.$$

Da $x > 0$, er løsningen til ligningen $f'(x) = 0$ tallet

$$x = \sqrt{\frac{0{,}39}{1{,}50}} = 0{,}50990\cdots \approx 0{,}51$$

$f'(x)$ er kontinuert og har derfor konstant fortegn på hver side af 0,51 . Da $f'(0{,}1) = -0{,}375$ og $f'(1) = 1{,}11$ fås:

x :	0		0,51		$\rightarrow$
$f'(x)$:	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$f(x)$:		$\searrow$		$\nearrow$	

Da $f(0{,}50990\cdots) = 1{,}267\cdots \approx 1{,}3$ fås af tallinjen:

$\underline{\underline{f(x) \text{ har minimum i } 0{,}51 \text{ og minimum er } 1{,}3}}$

8.12 Øvelse

Funktionen

$$f(x) = 0{,}50x^3 - 0{,}39x + 1{,}4 \ , \quad x < 0$$

har samme forskrift som funktionen i ramme 8.11 , men definitionsmængden er en anden.

Brug differentialregning til at bestemme maksimum for $f(x)$.

8.13 To typer ekstremumsopgaver

For en bestemt type figurer er rumfanget $f(x)$, målt i m^3, bestemt ved

$$f(x) = 0{,}50x^3 - 0{,}39x + 1{,}4 \ , \quad x > 0 \ ,$$

hvor x er figurens bredde, målt i m.

Funktionen $f(x)$ blev behandlet i ramme 8.11.

Om de omtalte figurer kan man fx stille spørgsmålet

(∗) Hvad skal bredden være for at rumfanget bliver mindst muligt?

eller spørgsmålet

(∗∗) Hvad er det mindst mulige rumfang?

Hvis spørgsmålet er (∗), er svaret $\underline{\underline{0{,}51\ \text{m}}}$, og det er ikke nødvendigt at udregne $f(0{,}50990\cdots)$.

Hvis spørgsmålet er (∗∗), er svaret $\underline{\underline{1{,}3\ \text{m}^3}}$.

8.14 Øvelse

I en bestemt type konstruktion er der en sammenhæng mellem størrelsen af et rørs overflade og dets afstand fra et andet rør. Antag at der er givet en regneforskrift for afstanden $f(x)$, målt i cm, som funktion af overfladen x, målt i cm^2.

Antag at konstruktionen er udført så afstanden er den størst mulige. Hvis man skal bestemme overfladens størrelse, skal man så

bestemme maksimum for $f(x)$

eller

bestemme det tal hvori $f(x)$ har maksimum?

8.15 Bestemme ekstrema på grafregner (repetition)

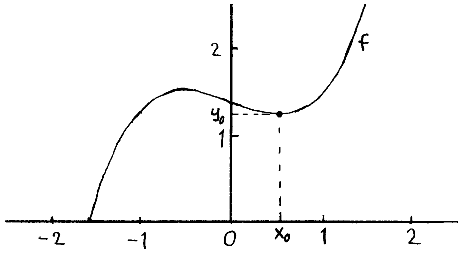
Som bekendt kan maksimum og minimum bestemmes på lommeregneren ved hjælp af Math/Maximum og Math/Minimum.

Minimum for funktion kan bestemmes sådan:
- Fra grafskærm vælges Math/Minimum
- Om nødvendigt trykkes PilNed til markør står på rigtige graf
- Som svar på "Lower Bound?" flyttes markør til grafpunkt lidt til venstre for søgte grafpunkt (med pilrast eller ved at taste x-koordinat) og der trykkes ENTER
- På tilsvarende måde besvares "Upper Bound?"
- Søgte punkts koordinater fremkommer nederst på skærmen

Besvarelse af spørgsmålet (∗∗) i ramme 8.13

Forskriften for $f(x)$ indtastes. På figuren er skærmbilledet skitseret. Da grafen for et tredjegradspolynomium ikke kan have flere sving end den viste del af grafen, og da vi kun ser på $x > 0$, er y_0 det søgte tal. Ved hjælp af Math/Minimum fås $y_0 = 1{,}2674\cdots$, dvs.

det mindste rumfang er $\underline{\underline{1{,}3\ \text{m}^3}}$.



Figur 8g

8.16 Øvelse

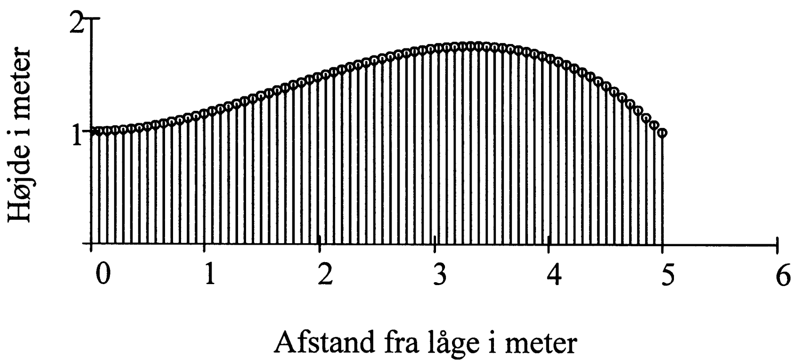
En haveejer har lavet et raftehegn hvor højden af en rafte, målt i meter, er givet ved

$$f(x) = -0{,}0416x^3 + 0{,}208x^2 + 1 \quad , \qquad 0 < x < 5$$

hvor x er raftens afstand fra lågen, målt i meter. Se figur 8h .

(a) Bestem den værdi af x hvori $f(x)$ har maksimum, og forklar hvad du herved har fundet ud af om raftehegnet.

(b) Bestem maksimum for $f(x)$, og forklar hvad du herved har fundet ud af om raftehegnet.



Figur 8h

8.17 Øvelse

En funktion $f(x)$ er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - kx \quad , \quad x > 0$$

hvor k er et positivt tal. Det oplyses at $f(x)$ har minimum i 3.

Bestem k .

8.18 Øvelse

En funktion $f(x)$ er givet ved

$$f(x) = -x^4 + 32x + k$$

hvor k er et reelt tal. Det oplyses at maksimum for $f(x)$ er 50.

Bestem k .

9. Grænseværdi

9.01 Oplæg om grænseværdi

I tabellen er vist værdien af $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ for forskellige værdier af x.

x :	0,60	0,90	0,98	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,02	1,10	1,40
$\frac{x^2 - x}{2x - 2}$:	0,30	0,45	0,49		0,51	0,55	0,70

Som ovenstående antyder, gælder:

Vi kan få $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ så tæt på $\frac{1}{2}$ det skal være
ved at vælge x tæt nok på 1.

Derfor siger vi at

$\frac{1}{2}$ er grænseværdien af $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ for x gående mod 1 .

Med symboler skrives grænseværdien sådan:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{2x - 2} .$$

Dette symbol betegner altså tallet $\frac{1}{2}$.

9.02 Øvelse

I ramme 9.01 omtales størrelsen $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x - 2}$.

Det påstås at vi kan få $f(x)$ så tæt på $\frac{1}{2}$ det skal være, ved at vælge x tæt nok på 1.

Antag at vi vil have at afstanden mellem $f(x)$ og $\frac{1}{2}$ skal være mindre end 0,0001.
Angiv et lille interval om 1 så dette er opfyldt for alle x der ligger i intervallet og er forskellig fra 1. (Du skal blot gætte intervallet ved at udregne $f(x)$ for nogle tal x der ligger tæt på 1).

9.03 Definition af grænseværdi

Lad $f(x)$ være en funktion, og lad a og x_0 være tal.

Man siger at

a er grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod x_0

hvis

man kan få $f(x)$ så tæt det skal være på a
ved kun at bruge tal x der ligger i et lille interval om x_0 og er forskellig fra x_0.

Denne grænseværdi betegnes $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

9.04 Øvelse

Udregn nogle funktionsværdier for funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad .$$

så du kan gætte svar på spørgsmålene nedenfor.

(a) Hvad er grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod 2 ?

(b) Angiv et interval om 2 så det for alle x der ligger i intervallet og er forskellig fra 2, gælder at afstanden mellem $f(x)$ og grænseværdien er mindre end $0{,}001$.

9.05 Øvelse

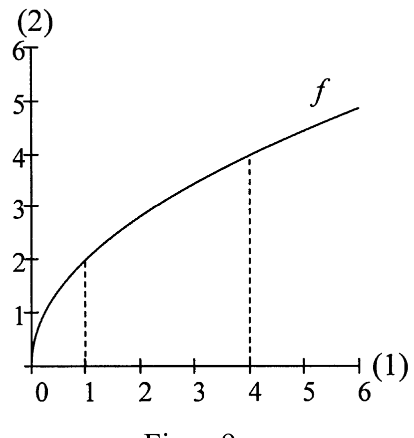
Figur 9a viser grafen for funktionen

$$f(x) = 2\sqrt{x} \quad .$$

(a) Bestem andenkoordinaterne til de to grafpunkter hvis førstekoordinater er 1 og 4.

(b) Bestem hældningskoefficienten for linjen gennem disse to punkter.

Lad $hk(x)$ betegne hældningskoefficienten for linjen gennem grafpunktet med førstekoordinat 1 og et andet grafpunkt med førstekoordinat x.
Tallet $hk(4)$ er altså det tal der er svaret på (b).



Figur 9a

(c) Beregn $hk(1{,}1)$, $hk(1{,}01)$ og $hk(0{,}999)$.

(d) Gæt ud fra svarene i (c) grænseværdien af $hk(x)$ for x gående mod 1. Se om dit svar kan passe med figuren.

9.06 Vilkårlig store værdier: ingen grænseværdi

I tabellen er vist værdien af $\frac{1}{x^2}$ for forskellige værdier af x .

x :	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$\rightarrow\ 0\ \leftarrow$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$
$\frac{1}{x^2}$:	100	10000	1000000		1000000	10000	100

Som ovenstående antyder, gælder:

Uanset hvilket tal a vi vælger, så kan vi få $\frac{1}{x^2}$ til at være meget større end a ved at vælge x tæt nok på 0.

Der er altså ikke noget tal a som er grænseværdi for $\frac{1}{x^2}$ for x gående mod 0 .

9.07 Øvelse

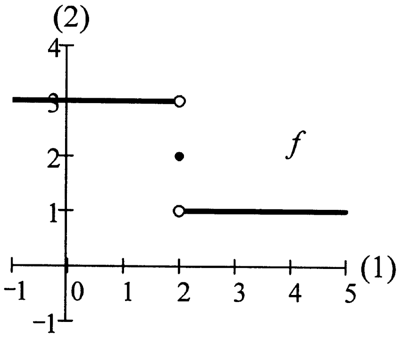
I ramme 9.06 omtales størrelsen $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Angiv et interval om 0 så det for alle x der ligger i intervallet og er forskellig fra 0 , gælder at $f(x) > 10^{10}$.

9.08 Øvelse

Figur 9b viser grafen for en funktion $f(x)$. Lad $hk(x)$ betegne hældningskoefficienten for linjen der går gennem grafpunktet med førstekoordinat 2 og et andet grafpunkt med førstekoordinat x .

(a) Bestem $hk(3)$, $hk(2{,}1)$ og $hk(2{,}001)$.

(b) Ser det ud til at $hk(x)$ har en grænseværdi for x gående mod 2 ? (Begrund svaret).



Figur 9b

9.09 Forskellig værdi fra højre og venstre: ingen grænseværdi

I tabellen er vist værdien af $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ for forskellige værdier af x.

x :	$-0{,}5$	$-0{,}02$	$\to\ 0\ \leftarrow$	$0{,}02$	$0{,}5$
$\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$:	-1	-1		1	1

Som ovenstående antyder, gælder:

> Uanset hvor lille et x-interval om 0 vi begrænser os til, så vil $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ både antage værdien -1 og værdien 1.

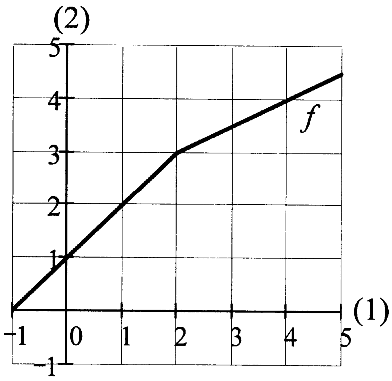
Der er altså ikke noget tal a som er grænseværdi for $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ for x gående mod 0.

9.10 Øvelse

Figur 9c viser grafen for en funktion $f(x)$. Lad $hk(x)$ betegne hældningskoefficienten for linjen der går gennem grafpunktet med førstekoordinat 2 og et andet grafpunkt med førstekoordinat x.

(a) Bestem $hk(3)$, $hk(2{,}1)$ og $hk(1{,}9)$.

(b) Ser det ud til at $hk(x)$ har en grænseværdi for x gående mod 2? (Begrund svaret).



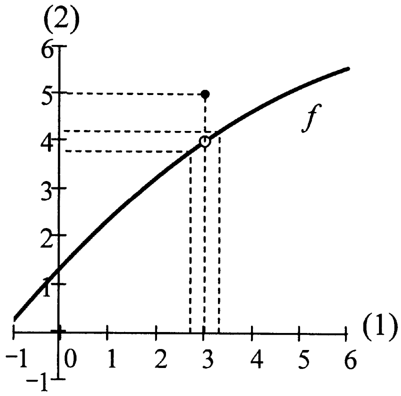
Figur 9c

9.11 Definition af "kontinuert"

Funktionsværdi ≠ grænseværdi

Den funktion $f(x)$ hvis graf er vist på figur 9d, er ikke kontinuert i 3 da grafen har et spring ved grafpunktet med førstekoordinat 3 .

Det ses at $f(3)$ og $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ er hhv. 5 og 4, altså forskellige.

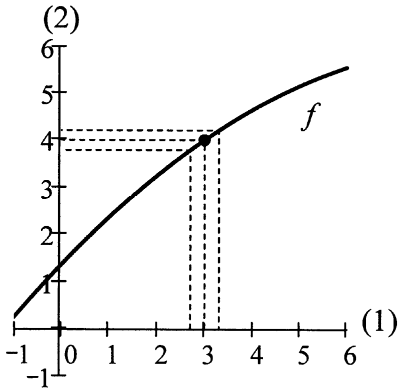


Figur 9d

Funktionsværdi = grænseværdi

Den funktion $f(x)$ hvis graf er vist på figur 9e, er kontinuert i 3 da grafen ikke har et spring ved grafpunktet med førstekoordinat 3 .

Det ses at $f(3)$ og $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ begge er 4 , altså ens.



Figur 9e

(9f) Definition af "kontinuert"

En funktion $f(x)$ siges at være kontinuert i et tal x_0 hvis

$f(x)$ er defineret i x_0 ,

$f(x)$ har en grænseværdi for x gående mod x_0 , og

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ .$$

9.12 Øvelse

Vedr. funktionen på figur 9f .

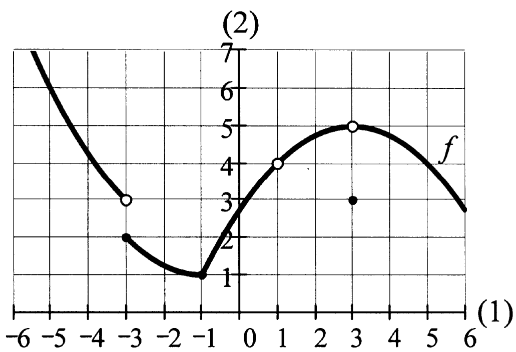
(a) Bestem hvert af følgende tal eller sig at det ikke eksisterer.

$f(-3)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$,

$f(-1)$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$,

$f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$,

$f(3)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.



Figur 9f

(b) I hvilke tal er $f(x)$ ikke kontinuert?

9.13 Beregning af grænseværdi

Oplæg

Da

$$\frac{x^2-x}{2x-2} = \frac{x\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)} = \frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}x$$

vil de to funktioner

$$f(x) = \frac{x^2-x}{2x-2} \quad , \qquad x \neq 1$$

$$g(x) = \tfrac{1}{2}x$$

være ens for alle x undtagen 1.

Ifølge definitionen af grænseværdi (se ramme 9.03) er grænseværdien for x gående mod 1 fastlagt ved funktionsværdierne i de x der er forskellig fra 1, så da $f(x)$ og $g(x)$ er ens for disse x, må

$$(*) \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) \ .$$

Da $g(x)$ er et polynomium, er $g(x)$ kontinuert, så ifølge definitionen på at være kontinuert (se ramme 9.11) er

$$(**) \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \ .$$

Da $g(1) = \tfrac{1}{2}\cdot 1 = \tfrac{1}{2}$, fås af $(*)$ og $(**)$ at

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \tfrac{1}{2}$$

Metode

Hvis $f(x) = g(x)$ for $x \neq x_0$ og $g(x)$ er kontinuert i x_0, så er $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g(x_0)$.

Eksempel

Vi vil finde grænseværdien af $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ for x gående mod -1.

Da

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x+1} = x-1$$

fås grænseværdien ved at sætte -1 ind for x i $x-1$, dvs. grænseværdien er -2.

9.14 Øvelse

Tegn i hvert sit koordinatsystem graferne for de to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ som er omtalt i oplægget øverst i ramme 9.13 .

9.15 Øvelse

Brug metoden fra ramme 9.13 til at beregne grænseværdierne

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2+3x} \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{6-3x} \; .$$