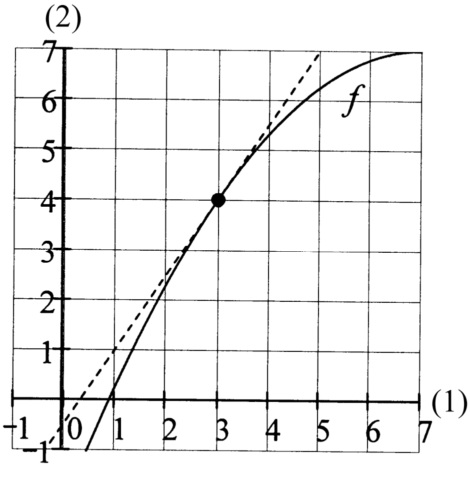
Differential-regning

1. del



2006 Karsten Juul

Indhold

Differentialregning 1. del

1. udgave 2006

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

1. Funktionsværdi, graf og tilvækst (repetition)

1.01 Funktionsværdi og graf

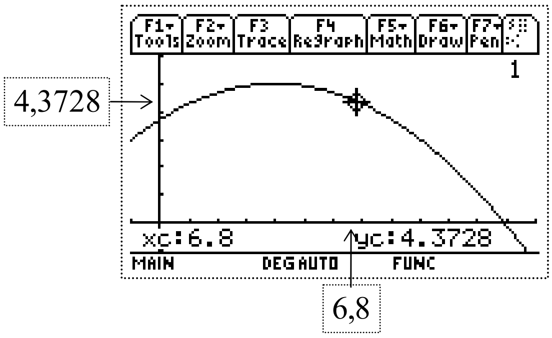
På TI-89 indtaster vi funktionen

$$f(x) = -0{,}08x^2 + 0{,}64x + 3{,}72$$

og anbringer markøren på

grafpunktet med 1.koord. 6,8

Funktionen indtastest på Y=-skærmen.
Udsnit vælges på WINDOW-skærmen.
På GRAPH-skærmen anbringes markøren ved at vælge Math/**Value** og taste 6.8 og <u>ENTER</u>.



Figur 1a

På skærmen ses:

(1b) Grafpunktet med førstekoordinat $6{,}8$ har andenkoordinat $4{,}3728$.

(1c) Funktionsværdien af $6{,}8$ er $4{,}3728$.

(1d) Når x er $6{,}8$, er $f(x)$ lig $4{,}3728$.

(1e) $f(6{,}8) = 4{,}3728$.

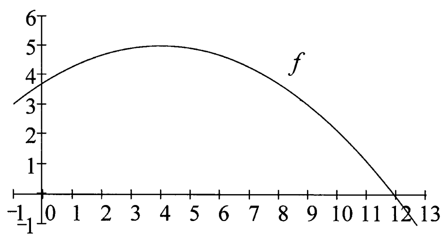
Det er absolut nødvendigt at <u>kunne udenad</u> at (1b) – (1e) er forskellige formuleringer af samme oplysning.

Fejl på grafregner

Grafen på figur 1a er hakket.

Alle grafregnere har denne fejl.

Husk at grafen skal se ud som figur 1f, der kan tegnes med et matematikprogram eller et grafprogram.



Figur 1f

1.02 Øvelse

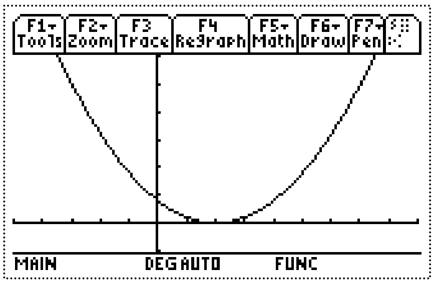
(a) Gennemfør det der er beskrevet i øverste halvdel af ramme 1.01 .

(b) Figur 1g viser grafen for

$$f(x) = 0{,}2x^2 - 0.8x + 0{,}8 .$$

Få det viste skærmbillede frem.

(c) Ved hjælp af grafen (dvs. ved at bruge Value) skal du for hver af påstandene (1) – (5) afgøre om den er sand.



Figur 1g

(1) 0,45 er funktionsværdien af 0,5 .

(2) $f(x)$ er 3,4 når x er $-2{,}2$.

(3) 0,18 er andenkoordinat til graf-punktet med førstekoordinat 3 .

(4) $f(4) = 0{,}8$.

(5) $f(3) + f(4) = 1$

1.03 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Tegn grafen for en funktion $f(x)$ som opfylder at

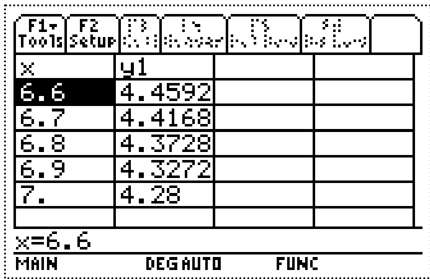
$$f(0) = 2 \ , \quad f(2) = f(0) + 1 \quad \text{og} \quad f(2) = f(4) - 1 \ .$$

1.04 Funktionsværdi og tabel

Fortsættelse af ramme 1.01

Vi skifter til tabel-skærmen (se figur 1h).

På TABLE-skærmen kan man vælge Setup og sætte tblStart og ∆tbl til hhv. 6,6 og 0,1.



Figur 1h

På skærmen ses bl. a.:

(1b) Graf-punktet med førstekoordinat 6,8 har andenkoordinat 4,3728 .

(1c) Funktionsværdien af 6,8 er 4,3728 .

(1d) Når x er 6,8 , er $f(x)$ lig 4,3728 .

(1e) $f(6{,}8) = 4{,}3728$.

1.05 Øvelse

(a) Gennemfør det der er beskrevet i ramme 1.04 .

(b) Indtast $f(x) = \dfrac{x}{2{,}5} - \dfrac{2{,}5}{x}$ og brug tabel-skærmen til at bestemme følgende tal:

(1) Andenkoordinaten til det graf-punkt der har førstekoordinat 4 .

(2) $f(x)$ når $x = 5$.

(3) $f(10)$.

(4) $f(2) + f(2)$.

(5) $f(2+2)$.

1.06 Øvelse (Uden hjælpemidler)

En funktion $f(x)$ opfylder følgende:

$f(3) = 5$ og for ethvert tal x er $f(x+1) = f(x) + 2$.

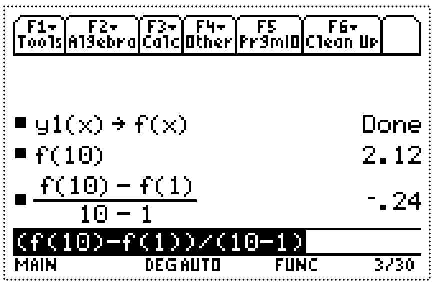
Skriv en tabel for denne funktion.

1.07 Funktionsværdi og symboludtryk

Fortsættelse af ramme 1.01

Vi taster at f skal være betegnelse for den indtastede funktion (se første linje på figur 1i).

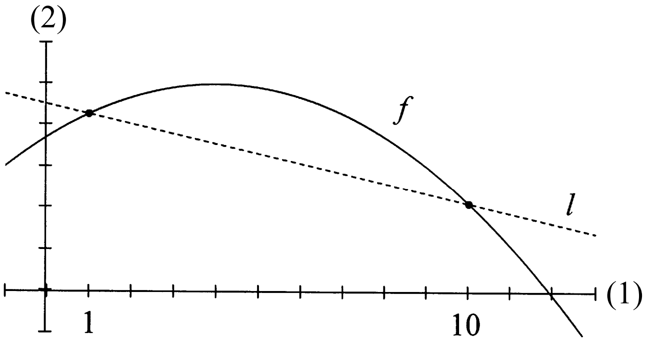
Hoved-skærmen, der er vist på figur 1i, fås frem ved at taste HOME. Da funktionen er intastet som graf nr. 1, hedder den y1. For at kunne taste f i stedet for y1 taster vi y1(x) STO f(x) ENTER.



Figur 1i

Andenkoordinaten til grafpunktet med førstekoordinat 10 er beregnet til 2,12 i anden linje på figur 1i.

Hældningskoefficienten for linjen l på figur 1j er beregnet til $-0{,}24$ i tredje linje på figur 1i. Der er sat ind i formlen $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ for hældningskoefficienten for linjen gennem to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) .



Figur 1j

1.08 Øvelse

Udfør det der er beskrevet i ramme 1.07 .

1.09 Øvelse

I denne øvelse skal du bestemme svarene ved hjælp af hovedskærmen (den der er vist på figur 1i).

Figur 1k viser grafen for funktionen

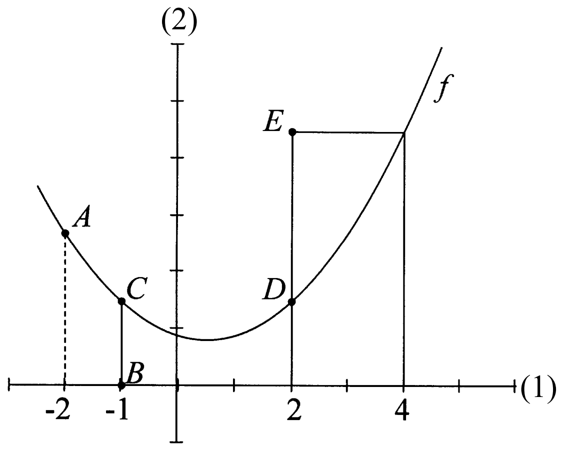
$f(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}3x + 0{,}875$.

Hvert af følgende tal skal bestemmes ved at taste ét udtryk med f :

(a) Andenkoordinaten til A.

(b) |BC|.

(c) |DE|.



Figur 1k

1.10 Funktionsværdi og regneforskrift

I forskriften

$$f(x) = 3x^2 - x + 9 .$$

indsætter vi -2 for x :

$$f(-2) \;=\; 3\cdot(-2)^2 - (-2) - 9 \;=\; 5 .$$

Heraf ses:

Grafpunktet med førstekoordinat -2 har andenkoordinat 5 .

Funktionsværdien af -2 er 5 .

Når $x = -2$ er $f(x) = 5$.

$f(-2) = 5$.

1.11 Øvelse (Uden hjælpemidler)

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 1.10 .

Et punkt P har førstekoordinat -7 . Grafen for $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ går gennem P og skærer andenaksen i et punkt Q .

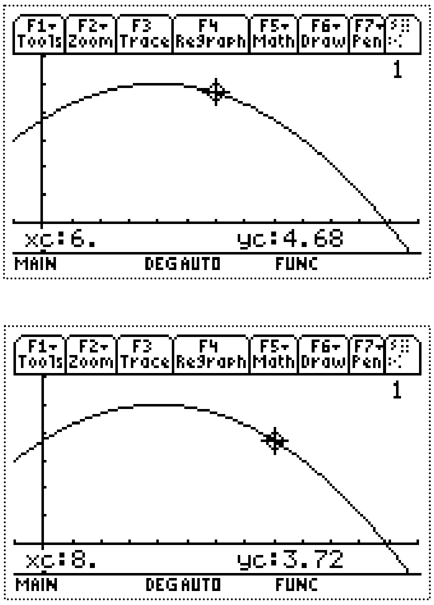
(b) Bestem andenkoordinaten til hvert af punkterne P og Q .

1.12 Tilvækst og graf

Bemærk: En "tilvækst" er et tal der lægges til.

Figur 1m viser grafen for funktionen fra ramme 1.01. Markøren er først anbragt på grafpunktet med *x*-koordinat 6 og derefter på grafpunktet med *x*-koordinat 8.

For at få markøren anbragt de to steder vælger vi Math/Value, taster 6 ENTER og 8 ENTER. Der skal altså kun vælges Math/Value én gang.



Figur 1m

Af figur 1m ses:

(1n) Når x er 6 og får en tilvækst på 2,
så får $f(x)$ en tilvækst på $-0{,}96$.

$(6+2=8$ og $4{,}68+(-0{,}96) = 3{,}72)$.

En anden skrivemåde

De tilvækster som x og $f(x)$ øges med, betegnes hhv. Δx og Δy, som læses "delta x" og "delta y".

Oplysningen (1n) kan også udtrykkes sådan:

Når udgangspunktet for x er 6, gælder:
Når $\Delta x = 2$ er $\Delta y = -0{,}96$.

1.13 Øvelse

(a) Først i ramme 1.12 er beskrevet en undersøgelse ved hjælp af graf-skærmen. Udfør denne undersøgelse.

(b) Indtast funktionen $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 7{,}2$ og brug metoden fra spørgsmål (a) til at bestemme tallene (1) – (3) nedenfor, men vælg først vinduet sådan at den del af grafen der skal bruges, ikke er for lille.

(1) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 3$ og x får tilvæksten $0{,}1$.

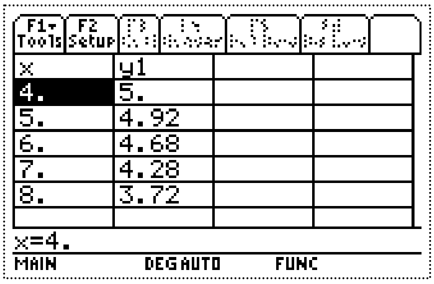
(2) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 3$ og x får tilvæksten $0{,}2$.

(3) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 3$ og x får tilvæksten $0{,}3$.

1.14 Tilvækst og tabel

Fortsættelse af ramme 1.12

Vi går ind på tabel-skærmen og sætter x-start til 4 og x-spring til 1 (se figur 1m).



Figur 1m

Af tabellen ses:

Når udgangspunktet for x er 4, gælder:
Når $\Delta x = 2$ er $\Delta y = -0{,}32$.

$(\Delta y = f(6) - f(4) = 4{,}68 - 5 = -0{,}32)$.

På tilsvarende måde fås:

(1p) Når udgangspunktet for x er 4, gælder:
Når $\Delta x = 4$ er $\Delta y = -1{,}28$.

1.15 Øvelse

(a) I ramme 1.14 er beskrevet en undersøgelse ved hjælp af tabel-skærmen. Udfør denne undersøgelse.

(b) Indtast funktionen $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 7{,}2$ og brug metoden fra spørgsmål (a) til at bestemme tallene (1) – (3) nedenfor.

(1) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 4$ og x får tilvæksten $0{,}01$.

(2) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 4$ og x får tilvæksten $0{,}02$.

(3) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 4$ og x får tilvæksten $0{,}03$.

1.16 Tilvækst og forskrift

En tilvækst kan også bestemmes ved direkte brug af forskriften. Fx kan tilvæksten fra (1p) bestemmes sådan:

$$\Delta y = f(8) - f(4)$$
$$\Delta y = \left(-0{,}08 \cdot 8^2 + 0{,}64 \cdot 8 + 3{,}72\right) - \left(-0{,}08 \cdot 4^2 + 0{,}64 \cdot 4 + 3{,}72\right)$$
$$\Delta y = -1{,}28$$

1.17 Øvelse (Uden hjælpemidler)

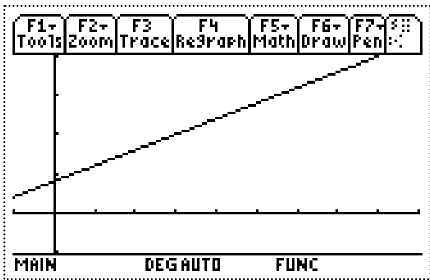
(a) I ramme 1.16 er en tilvækst udregnet ved at indsætte i forskriften. Brug denne metode til for funktionen $f(x) = x^2 + 3$ at bestemme tallene (1) – (2) nedenfor.

(1) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 1$ og x får tilvæksten 1 .

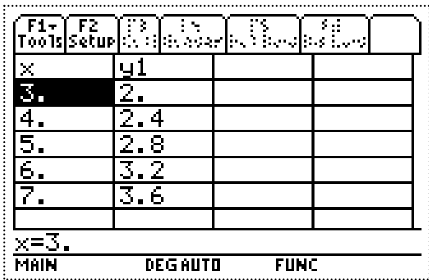
(2) Tilvæksten af $f(x)$ når udgangspunktet er $x = 1$ og x får tilvæksten h .
(Udtrykket skal reduceres).

1.18 Lineær funktion

Forskriften for en lineær funktion $f(x) = ax + b$ er indtastet.
Figur 1q og 1r viser graf og tabel.



Figur 1q



Figur 1r

Af figur 1r fås med udgangspunkt $x = 3$:

Når $\Delta x = 1$ er $\Delta y = 0{,}4$.

Når $\Delta x = 2$ er $\Delta y = 0{,}8$.

Når $\Delta x = 3$ er $\Delta y = 1{,}2$.

Vi ser at
Δy er $0{,}4$ gange Δx.
Altså er $a = 0{,}4$.

For en lineær funktion $f(x) = ax + b$ er

$$\boldsymbol{\Delta y = a \cdot \Delta x}$$

uanset hvilken værdi af x der er udgangspunkt.

1.19 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Uden at bestemme forskriften for funktionen $f(x)$ i ramme 1.18 skal du bestemme følgende tal:

(1) Tilvæksten som $f(x)$ får når x får tilvæksten $0{,}2$.

(2) Værdien af Δy når Δx er -2 .

(3) Funktionsværdien $f(x)$ når x er 8.

(4) Funktionsværdien $f(3{,}1)$.

2. Differentialkvotient og tangent

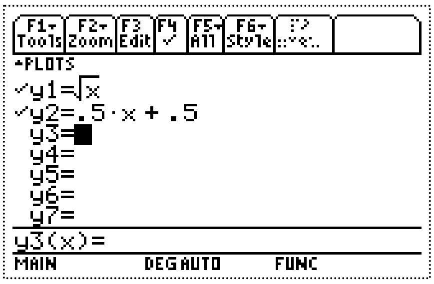
2.01 Tangent og graf

Flytte markør mellem to grafer

Vi taster $f(x)=\sqrt{x}$ som funktion nr. 1 og $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ som funktion nr. 2 (se figur 2a).

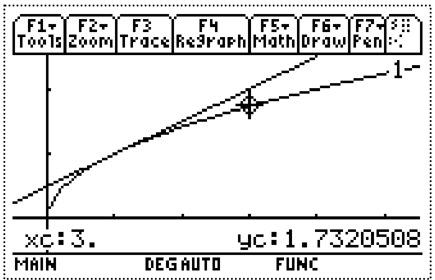
Tallet 1 øverst til højre på figur 2b viser at markøren står på grafen for funktion nr. 1, og tallet 2 øverst til højre på figur 2c viser at markøren står på grafen for funktion nr. 2

Anbring markøren på graf 1 med Math/Value 3 ENTER. Tryk på ned-pil for at flytte markøren til graf 2. Ny førstekoordinat kan tastes uden at vælge Math/Value.

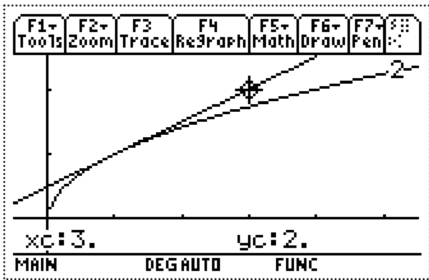


Figur 2a

Nederst på skærmen står koordinaterne til det grafpunkt markøren står på.



Figur 2b



Figur 2c

Næsten sammenfaldende grafer

På figur 2b ser det ud som om de to funktioner er ens for x-værdier fra ca. 0,7 til ca. 1,2.

Ved metoden som er beskrevet ovenfor i denne ramme, finder vi at det ser ud til at:

Når $x=1$ er $f(x)=g(x)$.

Når $x\neq 1$ er $f(x)\neq g(x)$.

Når x er nær 1, er $f(x)$ nær $g(x)$.

Tangent

Lad P være det punkt på grafen for f som har førstekoordinat 1, og lad l være den rette linje som er graf for g.

Du vil senere blive i stand til at regne dig frem til at

l er den linje gennem P som tilnærmer grafen for f godt nær P.

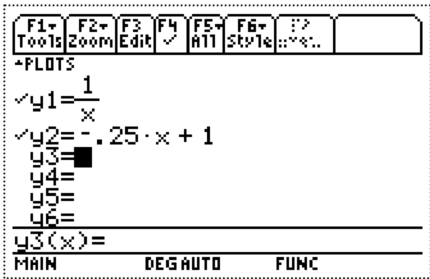
Denne linje kaldes

tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 1.

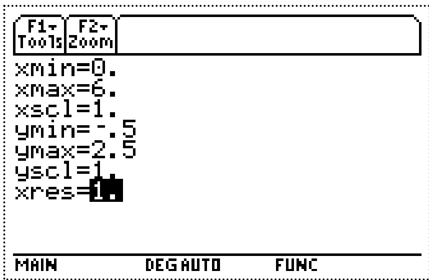
2.02 Øvelse

(a) Gennemfør den undersøgelse af to grafer som er beskrevet i ramme 2.01.

(b) Indtast forskrifter og vælg vindue som vist på figurerne 2d og 2e. Skift til grafskærmen og undersøg graferne på samme måde som de to grafer i ramme 2.01 blev undersøgt.



Figur 2d



Figur 2e

2.03 Tangent og tabel

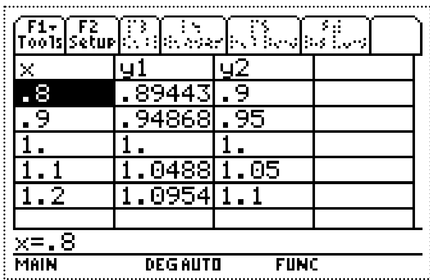
Fortsættelse af ramme 2.01

På figur 2f har vi skiftet til tabel-skærmen.
Det ser ud til at

Når $x = 1$ er $f(x) = g(x)$.

Når $x \neq 1$ er $f(x) \neq g(x)$.

Når x er nær 1, er $f(x)$ nær $g(x)$.



Figur 2f

2.04 Definition af tangent (Foreløbig formulering)

Lad f være en funktion, lad P være et punkt på f-grafen, og lad l være en linje der ikke er lodret.

At

l er tangent til grafen for f i P

betyder at

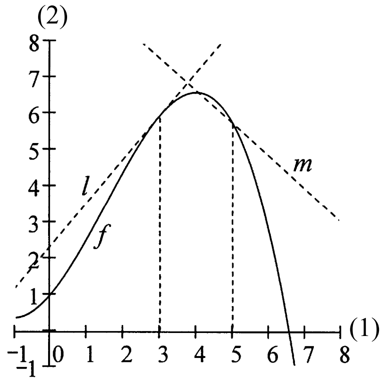
l går gennem P og tilnærmer grafen godt nær P.

På figur 2g er vist hvad der menes med "tilnærmer godt".

Det vil blive præciseret senere.

l tilnærmerer grafen godt nær grafpunktet med førstekoordinat 3.

m tilnærmer **ikke** grafen godt nær grafpunktet med førstekoordinat 5.



Figur 2g

2.05 Definition af differentialkvotient

Lad f være en funktion, og lad x være førstekoordinat til et grafpunkt hvor der er en tangent.

Ved

differentialkvotienten for f i x

forstås

hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat x.

Denne differentialkvotient betegnes $f'(x)$.

2.06 Bestemme differentialkvotient ud fra graf på papir

Når grafen for en funktion er tegnet på papir og vi ikke ved andet om funktionen, så er vi nødt til at tegne en tangent på øjemål for at bestemme en differentialkvotient.

Eksempel

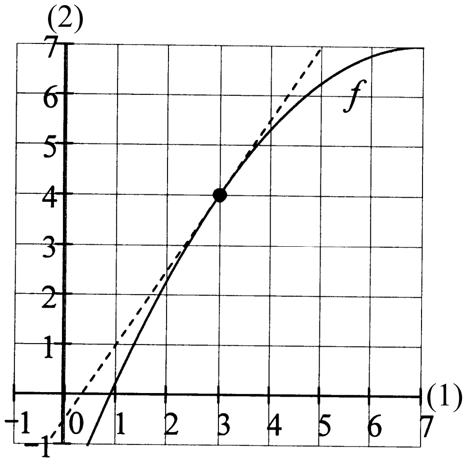
En funktion f er givet ved den graf der er vist på figur 2h. For at bestemme funktionens differentialkvotient i 3 har vi på øjemål tegnet tangenten i grafpunktet med førstekoordinat 3.

Vi aflæser koordinaterne til to punkter på tangenten og udregner dens hældningskoefficient til 1,5:

Når x er 3, er $f'(x)$ lig 1,5 .

Dette kan også skrives sådan:

$f'(3) = 1{,}5$.



Figur 2h

Tilføjelse

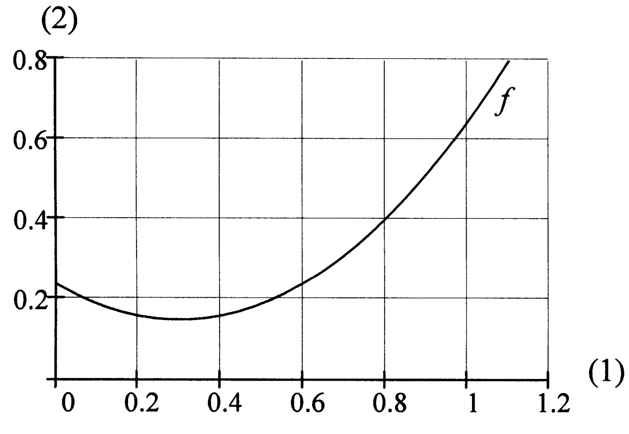
Af grafen ses at $f'(x)$ bliver mindre jo større x bliver.

2.07 Øvelse

Figur 2i viser grafen for en funktion f .

(a) Bestem $f'(0{,}8)$.

(b) Bestem den værdi af x for hvilken $f'(x) = 0$.

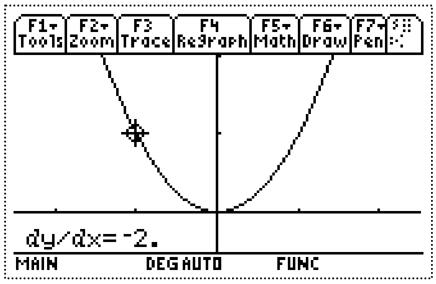


Figur 2i

2.08 Bestemme differentialkvotient på graf-skærm

Vi indtaster funktionen $f(x) = x^2$, skifter til graf-skærmen og får bestemt $f'(x)$ når x er -1.

Dette kan gøres ved at vælge Math / Derivatives / dy/dx og taste -1 ENTER.



Figur 2j

På skærmbilledet på figur 2j står at

$$f'(-1) = -2$$

dvs.

tangenten i grafpunktet med 1.koord. -1
har hældningskoefficient -2 .

(På graf-skærmen er brugt betegnelsen $\frac{dy}{dx}$ for differentialkvotienten. Dette er en anden almindelig betegnelse for differentialkvotienten. Symbolet $\frac{dy}{dx}$ læses d y d x).

2.09 Øvelse

(a) Gennemfør det der er beskrevet i ramme 2.08.

(b) Lad P være det punkt på figur 2j som markøren står på. Hvad er førstekoordinaten til P, hvad er andenkoordinaten til P, og hvad er hældningskoefficienten for tangenten til grafen i P?

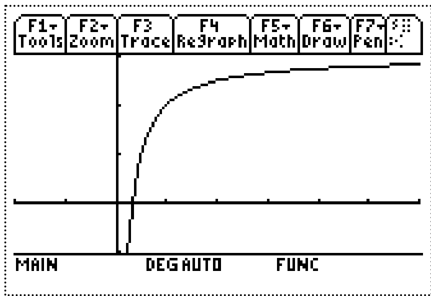
2.10 Øvelse

Indtast funktionen $f(x) = \dfrac{3x-1}{x}$ og få det skærmbillede frem som er vist på figur 2k. Brug så metoden fra ramme 2.08 til at bestemme følgende tal:

(1) $f'(x)$ når $x = 0{,}5$.

(2) $f'(1)$.

(3) Hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 2.



Figur 2k

2.11 Begrebet "differentiabel"

Definition

En funktion siges at være **differentiabel** i et tal x hvis

grafen har en tangent i grafpunktet med førstekoordinat x

og

tangenten ikke er lodret.

2.12 Graf med knæk

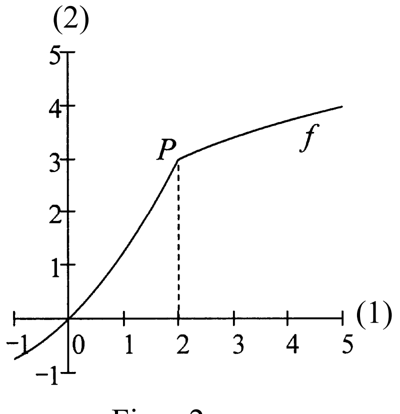
Grafen på figur 2m har et knæk i grafpunktet P med førstekoordinat 2. På figur 2n er tegnet en linje gennem P som tilnærmer grafen godt til til højre for P, men ikke til venstre for P. Der gælder:

– Der ikke er nogen linje gennem grafpunktet med første-koordinat 2 som tilnærmer grafen godt nær dette punkt.

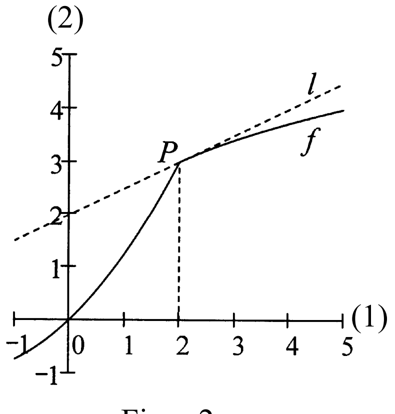
– Grafen har ikke nogen tangent i punktet med første-koordinat 2.

– Funktionen f er ikke differentiabel i 2.

Funktionen f er differentiabel i ethvert tal bortset fra 2.



Figur 2m



Figur 2n

2.13 Graf med spring

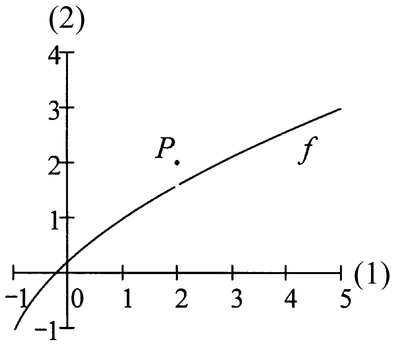
Grafen på figur 2p har et spring ved grafpunktet P med førstekoordiat 2. Der gælder:

– Der ikke er nogen linje gennem grafpunktet med første koordinat 2 som tilnærmer grafen godt nær dette punkt.

– Grafen har ikke nogen tangent i punktet med førstekoordinat 2.

– Funktionen f er ikke differentiabel i 2.

Funktionen f er differentiabel i ethvert tal bortset fra 2.

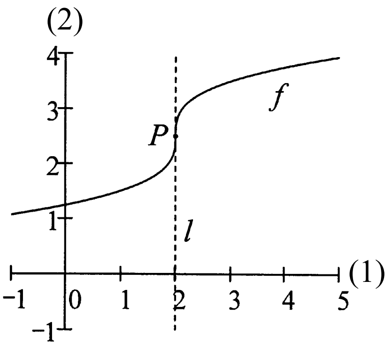


Figur 2p

2.14 Graf med lodret tangent

Grafen på figur 2q har en lodret tangent i grafpunktet P med førstekoordinat 2. Der gælder:

– Funktionen f er ikke differentiabel i 2.



Figur 2q

2.15 Øvelse

Få tegnet grafen for $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}+1$ på lommeregneren.

(a) Ser det ud til at f er differentiabel i 0 ?

(b) Ser det ud til at f er differentiabel i 2 ?

(c) Ser det ud til at f er differentiabel i 3 ?

2.16 Øvelse

Få tegnet grafen for $f(x)=2-\sqrt[3]{x-1}$ på lommeregneren.

Grafen har en tangent i hvert punkt, men der er ét tal hvor f ikke ikke differentiabel.

Gæt dette tal ud fra grafen.

2.17 Øvelse

Funktionen floor er fastlagt ved at $\text{floor}(x)$ er det største hele tal som er mindre end eller lig x. Fx er $\text{floor}(3{,}8) = 3$ og $\text{floor}(-2{,}4) = -3$.

På TI-89 er funktionen floor på menuen der fås frem ved at vælge MATH / Number. (MATH står med blåt over 5-tasten).

En graf med spring bliver ikke tegnet korrekt hvis grafens Style er Line. Vælg i stedet Dot. Dette gøres mens markøren står på forskriften på Y=- skærmen. For at få den bedste graf skal man på WINDOW-skærmen sætte xres til 1.

Få tegnet grafen for funktionen $f(x) = x - \text{floor}(x)$ på lommeregneren.

Anbring (med Value) markøren i det grafpunkt hvis førstekoordinat er 2. Anbring så markøren i det grafpunkt hvis førstekoordinat er 1,9.

I hvilke tal er f ikke differentiabel?

3. Formler for differentialkvotient

3.01 Eksempel på formel for differentialkvotient

I ramme 2.08 bestemte vi differentialkvotienten af $f(x) = x^2$ for $x = -1$. På tilsvarende måde bestemmer vi nogle flere differentialkvotienter. Resultaterne er skrevet i tabellen

x	-1	0,5	1	2
$f'(x)$	-2	1	2	4

For alle x-værdier i tabellen er $f'(x)$ det dobbelte af x. Vi vil senere bevise at dette også gælder for alle andre værdier af x.

Formlen for at finde differentialkvotienter for $f(x) = x^2$ er altså $f'(x) = 2x$.

3.02 Øvelse

To linjer l og m er tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^2$. Linjen l er tangent i det punkt på grafen som har førstekoordinat -3, og linjen m er tangent i det punkt på grafen som har andenkoordinat 9 og har positiv førstekoordinat.

Brug formlen nederst i ramme 3.01 til at bestemme hældningskoefficienten for hver af linjerne l og m.

3.03 Øvelse

Tabellen viser nogle af differentialkvotienterne for en funktion f.

(a) Gæt en formel for $f'(x)$.

(b) Brug formlen til at bestemme førstekoordinaten til det punkt på grafen for f hvori tangenten har hældningskoefficienten 1.

x	0	1	2	3
$f'(x)$	0	3	6	9

3.04 Øvelse

Tabellen viser nogle af differentialkvotienterne for en funktion f .

(a) Gæt en formel for $f'(x)$.

(b) Brug formlen til at bestemme førstekoordinaten til det punkt på grafen for f hvori tangenten er vandret.

x	0	1	2	3
$f'(x)$	–1	2	5	8

3.05 Øvelse (Uden hjælpemidler)

(a) Tegn grafen for funktionen $f(x) = 0{,}5x + 2$ og afsæt det punkt P på grafen som har førstekoordinat 4.

(b) Læs ramme 2.04 og tegn den linje l som er tangent til grafen i punktet P .

(c) Hvad er hældningskoefficienten for l ?

(d) Læs ramme 2.05 og angiv $f'(4)$.

(e) Når x er førstekoordinaten til et punkt på grafen for f , hvad er så $f'(x)$ lig?

(f) Tegn grafen for funktionen $g(x) = x$.

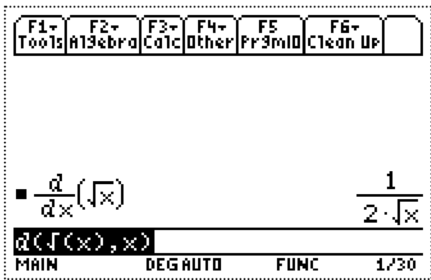
(g) Når x er førstekoordinaten til et punkt på grafen for g , hvad er så $g'(x)$ lig?

(f) Tegn grafen for funktionen $h(x) = 4$.

(g) Når x er førstekoordinaten til et punkt på grafen for h , hvad er så $h'(x)$ lig?

3.06 Bestemme differentialkvotient på hovedskærmen

På hovedskærmen, der fås frem ved at taste HOME, kan differentialkvotienter bestemmes ved hjælp af det ***d*** der står over 8-tasten. Fx kan differentialkvotienten af $\sqrt{x}$ bestemmes ved at taste som vist på figur 3a. Bemærk at man efter forskriften skal taste et komma efterfulgt af den uafhængige variabel.



Figur 3a

På figur 3a er bestemt en formel for differentialkvotienten af $\sqrt{x}$.

Af resultatet ses at hvis x er førstekoordinat til et punkt på kvadratrodsgrafen, så vil tangenten i dette punkt have hældningskoefficienten $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tangenten i punktet med førstekoordinat 9 har altså hældningskoefficienten

$$\frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} .$$

3.07 Øvelse

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 3.06 .

(b) Brug derefter samme metode til at bestemme differentialkvotienten af hver af funktionerne x^3 og x^4.

(c) Gæt differentialkvotienten af x^6 ved at sammenligne med svaret på (b).

3.08 Nogle vigtige differentialkvotienter

(3b) Hvis $f(x) = k$ er $f'(x) = 0$, hvor k er en konstant.

(3c) Hvis $f(x) = x$ er $f'(x) = 1$.

(3d) Hvis $f(x) = x^n$ er $f'(x) = nx^{n-1}$, hvor n er et af tallene 1, 2, 3, osv.

Begrundelse for (3b)

Da $f(x) = ax + b$ med $a = 0$ og $b = k$, er grafen for f en ret linje med hældningskoefficient 0. Da grafen er en ret linje, er en tangent til grafen sammenfaldende med grafen og har derfor også hældningskoefficienten 0. Da $f'(x)$ er hældningskoefficienten for en tangent, er $f'(x) = 0$.

Begrundelse for (3c)

Da $f(x) = ax + b$ med $a = 1$ og $b = 0$, er grafen for f en ret linje med hældningskoefficient 1. Da grafen er en ret linje, er en tangent til grafen sammenfaldende med grafen og har derfor også hældningskoefficienten 1. Da $f'(x)$ er hældningskoefficienten for en tangent, er $f'(x) = 1$.

3.09 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Der er givet funktionerne $f(x) = 18$, $g(x) = x$ og $h(x) = x^5$.

Læs de tre regler øverst i ramme 3.08 og bestem $f(6)$, $f'(6)$, $g(6)$, $g'(6)$, $h'(x)$ og $h'(2)$.

3.10 Øvelse

Der er givet funktionerne $f(x) = \sqrt{2}$ og $g(x) = x^3$.

Bestem $f(3)$, $f'(3)$, $g(3)$ og $g'(3)$.

3.11 Oplæg vedr. differentialkvotient af sum

Som funktion nr. 1 og 2 indtaster vi hhv.

$$f(x) = x$$

og

$$g(x) = x^2 .$$

Som funktion nr. 3 indtaster vi summen $h(x) = f(x) + g(x)$, altså

$$h(x) = x + x^2 .$$

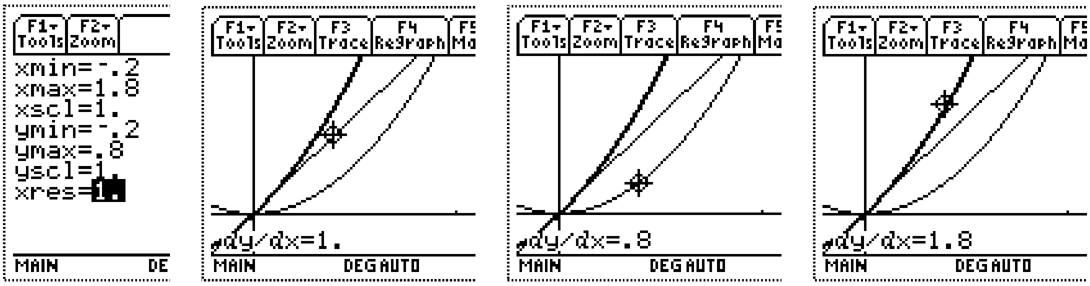
For denne sidste vælger vi tyk streg til grafen.

Man vælger tyk streg ved på Y=-skærmen at anbringe markøren på forskriften og vælge Style/Thick.

Efter at have skiftet til graf-skærmen bestemmer vi for hver af de tre funktioner

differentialkvotienten i 0,4.

Differentialkvotienten bestemmes som i ramme 2.08. For graf 2 og 3 må man dog vælge den pågældende graf ved at trykke hhv. 1 og 2 gange på pil ned efter at man har valgt Math / Derivatives / dy/dx . Herefter taster man 0.4 ENTER.



Figur 3e

På figur 3e ses at $f'(0{,}4) = 1$, $g'(0{,}4) = 0{,}8$ og $h'(0{,}4) = 1{,}8$. Altså er

$$h'(0{,}4) \;=\; f'(0{,}4) + g'(0{,}4) \;.$$

På tilsvarende måde finder vi at $f'(0{,}3) = 1$, $g'(0{,}3) = 0{,}6$ og $h'(0{,}3) = 1{,}6$. Altså er

$$h'(0{,}3) \;=\; f'(0{,}3) + g'(0{,}3) \;.$$

Dette er ikke noget specielt for funktionerne $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$. Der er en regel for differentialkvotienter som siger følgende:

(3f) Hvis $h(x) = f(x) + g(x)$, er $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

3.12 Øvelse

(a) Gennemfør det der er beskrevet i ramme 3.11 .

(b) Undersøg så på tilsvarende måde om det ser ud til at (3f) gælder når plus erstattes med hhv. gange, minus og division.

3.13 Øvelse

(a) Reducer $x^2 \cdot x^3$.

(b) Brug (3d) til i et vilkårligt tal x at finde differentialkvotienten af hhv. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ og $h(x) = x^5$.

(c) Når $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^3$, gælder så for produktet $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ at differentialkvotienten $h'(x)$ er lig $f'(x) \cdot g'(x)$?

3.14 Nogle regneregler for differentialkvotienter

For differentiable funktioner $f(x)$ og $g(x)$ gælder følgende tre regler:

Reglen for differentialkvotient af sum:
(3g) Hvis $h(x) = f(x) + g(x)$, er $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Reglen for differentialkvotient af differens:
(3h) Hvis $h(x) = f(x) - g(x)$, er $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Reglen for differentialkvotient af konstant gange funktion:
(3i) Hvis $h(x) = k \cdot g(x)$, er $h'(x) = k \cdot g'(x)$, når k er en konstant.

Advarsel: Hvis man i (3g) erstatter plus med gange eller division, så fås ikke en regel der gælder altid.

Eksempel på at (3g) ikke gælder når plus erstattes med gange:

Lad $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$, og sæt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, dvs. $h(x) = x^3$. Så er

$$h'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

og

$$f'(x) \cdot g'(x) = 1 \cdot 2x^{2-1} = 2x.$$

Altså er $h'(x)$ ikke lig $f'(x) \cdot g'(x)$ for ethvert tal x.

3.15 Brug af regneregler for differentialkvotienter

Eksempel på brug af *reglen for differentialkvotient af sum*

Hvis $f(x) = x^3$ og $g(x) = x$

er $f'(x) = 3x^2$ og $g'(x) = 1$

så af reglen for differentialkvotient af sum fås:

Hvis $h(x) = x^3 + x$ er $h'(x) = 3x^2 + 1$.

Eksempel på brug af *reglen for differentialkvotient af konstant gange funktion*

Hvis $f(x) = x^2$ er $f'(x) = 2x$

så af reglen for differentialkvotient af konstant gange funktion fås:

Hvis $h(x) = 3x^2$ er $h'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$.

3.16 Øvelse

Brug reglerne i rammerne 3.08 og 3.14 til at bestemme $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde:

(a) $f(x) = 3x^4$ (b) $f(x) = 2 + x^3$ (c) $f(x) = 4x^2 - x$

(d) $f(x) = 5x^2 + 8x - 6$ (e) $f(x) = 2x^2 \cdot x^3$ (f) $f(x) = \frac{x}{4}$.

3.17 Øvelse

En funktion f er givet ved $f(x) = x^2 + 4$.

(a) Bestem $f(6)$.

(b) Bestem $f'(6)$.

(c) Løs ligningen $f(x) = 6$.

(d) Løs ligningen $f'(x) = 6$.

4. Opgaver med tangent

4.01 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Lad $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x$.

(a) Bestem $f'(x)$.

(b) Bestem hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 0.

(c) Bestem førstekoordinaten til det punkt på grafen hvor tangenten har hældningskoefficienten 0.

4.02 Øvelse

En funktion $f(x)$ er givet ved $f(x) = 3x - x^3$.

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter på grafen hvor tangenten er vandret.

4.03 Øvelse

En funktion $f(x)$ er givet ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x - 2$.

Undersøg om der findes et punkt på *f*-grafen hvor tangenthældningen er 4.

4.04 Øvelse

På grafen for funktionen $f(x) = x^2 + x$ ligger et punkt P med førstekoordinat 1.

(a) Bestem andenkoordinaten til P .

(b) Bestem tangenthældningen i P .

(c) Bestem en ligning for tangenten i P .

4.05 Grundmetoder vedr. opgaver med tangent

De opgaver med graf og tangent som omtales her, findes i et utal af varianter.
Men de kan alle løses ved at bruge én eller flere af følgende grundmetoder:

(4a) Bestemme andenkoordinat til grafpunkt hvor førstekoordinat er kendt.

Eksempel: $f(x)=x^2-2$. Her er x og x^2-2 hhv. første- og andenkoordinat.
Hvis førstekoordinaten er $x=3$ er andenkoordinaten $x^2-2 = 3^2-2 = \underline{\underline{7}}$.

(4b) Bestemme førstekoordinat til grafpunkt hvor andenkoordinat er kendt.

Eksempel: $f(x)=x^2-2$. Her er x og x^2-2 hhv. første- og andenkoordinat.
Hvis andenkoordinaten er 7, dvs. $x^2-2 = 7$, så fås førstekoordinaten x ved at løse denne ligning, dvs. førstekoordinaten er $x = \underline{\underline{-3}}$ eller $x = \underline{\underline{3}}$.

(4c) Bestemme tangenthældning i et grafpunkt hvor førstekoordinat er kendt.

Eksempel: $f(x)=x^3+x$. Her er $f'(x)=3x^2+1$, så x og $3x^2+1$ er hhv. førstekoordinat og tangenthældning. Hvis førstekoordinaten er $x=2$ er tangenthældningen $3x^2+1 = 3\cdot 2^2+1 = \underline{\underline{13}}$.

(4d) Bestemme førstekoordinat til grafpunkt hvor tangenthældningen er kendt.

Eksempel: $f(x)=x^3+x$. Her er $f'(x)=3x^2+1$, så x og $3x^2+1$ er hhv. førstekoordinat og tangenthældning. Hvis tangenthældningen er 13, dvs. $3x^2+1 = 13$ så fås førstekoordinaten x ved at løse denne ligning, dvs. førstekoordinaten er $x = \underline{\underline{-2}}$ eller $x = \underline{\underline{2}}$.

(4e) Bestemme ligning for linje når dens hældningskoefficient og et punkt på linjen er kendt.

Eksempel: Hvis hældningskoefficient og punkt er hhv. $a=2$ og $(x_0, y_0)=(3,7)$ er ligningen $y=a(x-x_0)+y_0$ dvs. $y=2(x-3)+7$ som kan reduceres til $\underline{\underline{y=2x+1}}$. Hvis linjen er vandret og punktet er $(8,5)$ er ligningen $y=5$.

(4f) Bestemme linjes hældningskoefficient når linjens ligning er kendt.

Eksempel: Ligningen $y=3-2x$ fås af $y=ax+b$ ved at sætte $a=-2$ og $b=3$ så linjens hældningskoefficient er $a = \underline{\underline{-2}}$.

4.06 Øvelse

For hver af de fem opgaver (a) - (e) gælder at hvis funktionens forskrift var oplyst, så kunne man løse opgaven ved at kombinere to af grundmetoderne (4a) – (4f) fra ramme 4.05. Angiv for hver af opgaverne de to grundmetoder.

(a) Bestem koordinatsættet til det punkt på grafen hvor tangenthældningen er -1.

(b) Bestem en ligning for tangenten i punktet (3, 5).

(c) Linjen med ligningen $y = x - \frac{1}{3}$ er tangent til grafen. Bestem røringspunktets førstekoordinat.

(d) I ét grafpunkt Q med positiv førstekoordinat har tangenten samme hældning som tangenten i grafpunktet med førstekoordinat -2. Bestem førstekoordinaten til Q.

(e) Grafen skærer førsteaksen i et punkt P. Bestem hældningskoefficienten for tangenten i P.

4.07 Øvelse (Uden hjælpemidler)

Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen $f(x) = x^2 - x^3$ i punktet $(2, f(2))$.

4.08 Øvelse

En funktion $f(x)$ er bestemt ved $f(x) = x^5 + x$.

Bestem en ligning for hver af de tangenter til grafen for f som er parallelle med linjen med ligningen $y = 6x + 2$.

4.09 Øvelse

Bestem en ligning for hver af de vandrette tangenter til grafen for funktionen $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$.

5. Væksthastighed

5.01 Væksthastighed for lineær funktion

Figur 5a viser hvordan en plantes højde (målt i cm) ændres med tiden (målt i uger):

$g(t)$ er højden på tidspunktet t.

Af figuren fås:

når t øges fra 3 til 4, så øges højden med 0,5 cm

når t øges fra 4 til 5, så øges højden med 0,5 cm

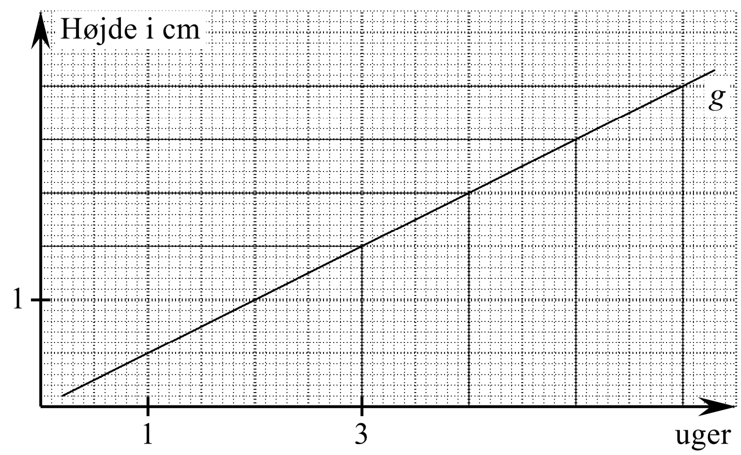
når t øges fra 5 til 6, så øges højden med 0,5 cm.

Ud fra dette ser vi at

væksthastigheden er 0,5 cm pr. uge.

Da g er lineær, gælder at

væksthastighed = hældningskoefficient.



Figur 5a

5.02 Øvelse

Vedr. planten fra ramme 5.01 .

(a) Hvor meget øges højden fra tidspunktet 3 til tidspunktet 7 ?

(b) Hvor meget øges højden fra tidspunktet 3 til tidspunktet 3,5 ?

(c) Hvad er væksthastigheden i tidsrummet fra tidspunktet 3 til tidspunktet 3,5 ?

(d) Hvor meget øges højden på 0,1 uge?

(e) Hvor meget øges højden på 6 uger?

(f) Hvor meget øges højden på Δt uger?

5.03 Oplæg om væksthastighed

Figur 5b viser hvordan en plantes højde (målt i cm) ændres med tiden (målt i uger):

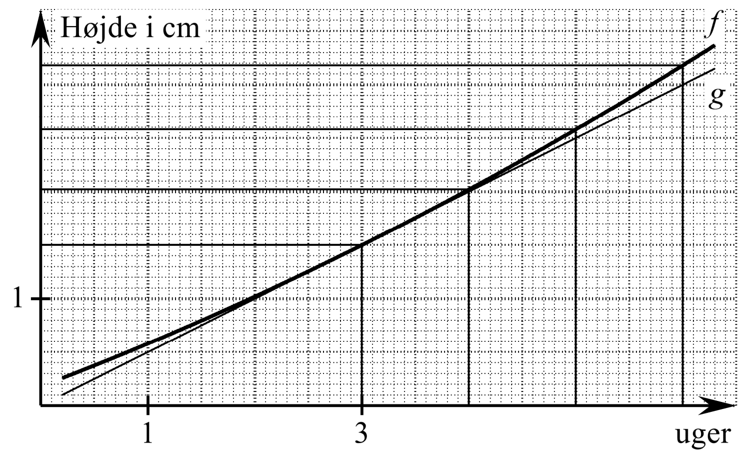
$f(t)$ er højden på tidspunktet t .

På figuren er også vist grafen for funktionen g fra ramme 5.01 . Denne graf er tangent til grafen for f i grafpunktet med førstekoordinat 3.

I små tidsrum nær $t = 3$ vokser de to funktioner på stort set samme måde, så da væksthastigheden for $g(x)$ er 0,5 , siger vi at

væksthastigheden for $f(x)$ **i** 3 er 0,5 .

Væksthastigheden for $f(x)$ **i** 3 er altså tangenthældningen $f'(3) = 0{,}5$.



Figur 5b

5.04 Øvelse

Vedr. *f*-planten fra ramme 5.03 .

(a) Hvor meget øges højden i tidsrummet fra tidspunktet 3 til tidspunktet 5 ?

(b) Hvad er gennemsnitsvæksthastigheden i dette tidsrum?

5.05 Øvelse

(a) Aflæs på figur 5b $f(3{,}6)$ og $g(3{,}6)$.

(b) Hvis værdien af t er nær 3, fx hvis $t = 3{,}6$, kan man ikke på figur 5b se forskel på $f(t)$ og $g(t)$, men *f*-grafen krummer opad, så det er kun for $t = 3$ at $f(t) = g(t)$. Er gennemsnitsvæksthastigheden for $f(t)$ i tidsrummet fra $t = 3$ til $t = 3{,}2$ større end $\frac{1}{2}$ eller mindre end $\frac{1}{2}$?

(c) Er gennemsnitsvæksthastigheden for $f(t)$ i tidsrummet fra $t = 2{,}5$ til $t = 3$ større end $\frac{1}{2}$ eller mindre end $\frac{1}{2}$?

5.06 Væksthastighed

(5c) Definition

Lad $f(x)$ være differentiabel i et tal x_0. Ved

væksthastigheden for $f(x)$ i x_0

forstås tallet $f'(x_0)$.

(5d) Regel

Lad $f(x)$ være differentiabel i et tal x_0. Så gælder:

I små x-intervaller nær x_0 er gennemsnitsvæksthastigheden for $f(x)$ ca. $f'(x_0)$.

5.07 Bestemme væksthastighed uden lommeregner

I et computerspil afhænger prisen på en vare af hvor lang tid der er spillet. Efter t minutters spil er prisen $f(t)$ kr. hvor

$$f(t) = 1{,}3t + 0.04t^2 .$$

Vi vil bestemme den hastighed hvormed prisen stiger efter 20 minutters spil:

Da

$$f'(t) = 1{,}3 + 0{,}08t$$

er

$$f'(20) = 1{,}3 + 0{,}08 \cdot 20 = 2{,}9$$

dvs.

efter 20 minutters spil stiger prisen med en hastighed på $\underline{\underline{2{,}90\,\text{kr. pr. minut}}}$.

5.08 Øvelse

I et forsøg skal vandmængden i et akvarium ændres sådan at

$$R(t) = 2t^3 + 6$$

hvor $R(t)$ er vandmængden (i mL) og t er tiden (i timer) der er gået siden forsøgets start.

Bestem den hastighed hvormed vandmængden ændres på tidspunktet $t = 10$.

5.09 Bestemme væksthastighed med lommeregner

Massen M af en plante (målt i gram) som funktion af tiden t (målt i døgn) kan beskrives ved

$$M(t) = \frac{390}{1+44\,\mathrm{e}^{-0{,}11t}} \quad .$$

Vi vil bestemme massens væksthastighed til tiden $t = 7$:

Vi bruger lommeregneren til at bestemme væksthastigheden til $t = 7$. Dette kan fx gøres ved at taste

d(390/(1+44e^(-0.11t)),t)|t=7

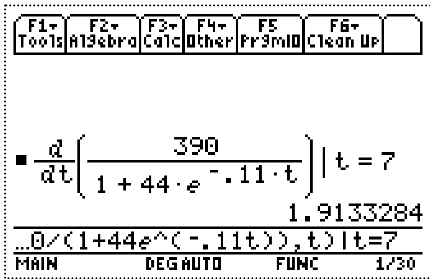
Herved fås

$M'(7) = 1{,}9133\cdots$

dvs.

massens væksthastighed til $t = 7$ er

$\underline{\underline{1{,}9 \text{ gram pr. døgn}}}$.



Figur 5e

5.10 Øvelse

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 5.09.

(b) Hvad er massens væksthastighed på tidspunktet $t = 50$?

5.11 Tolkning af differentialkvotient

Eksempel med temperatur

Temperaturen i en beholder kan beskrives ved en funktion $T(t)$ hvor $T(t)$ er temperaturen (i °C) t timer efter at beholderen blev lukket.

Det er oplyst at $T'(3) = -2$.

Denne oplysning fortæller følgende:

> 3 timer efter at beholderen blev lukket, aftager temperaturen med en hastighed på 2 °C pr. time.

Eksempel med vanddybde

Ved en kyst kan vanddybden beskrives ved en funktion $h(x)$ hvor $h(x)$ er dybden (i meter) x meter fra kysten.

Det er oplyst at $h'(15) = 0{,}1$.

Denne oplysning fortæller følgende:

> 15 meter ude øges dybden med en hastighed på 10 cm pr. meter man kommer længere ud.

Det kan være at en figur viser at grafen for $h(x)$ krummer så langsomt at det vil være naturligt at formulere oplysningen sådan:

> 15 meter ude øges dybden med 10 cm når man går 1 meter længere ud.

Eksempel med kørsel

Et tog kører på strækningen fra A til B, hvor der er få minutter mellem stationerne. Togets afstand fra A kan beskrives ved en funktion $s(t)$ hvor $s(t)$ er afstanden (i km) og t er den tid (i timer) der er gået siden toget forlod A.

Det er oplyst at $s'(0{,}7) = 58$.

Denne oplysning fortæller følgende:

> 0,7 time (dvs. 42 minutter) efter at toget forlod A, er togets hastighed 58 km i timen.

5.12 Øvelse

(a) Sammenhængen mellem et træs diameter (målt i cm) og træets alder (målt i år) kan beskrives ved en funktion $d(t)$ hvor $d(t)$ er diameteren og t er alderen.

Hvad fortæller oplysningen $d'(10) = 0{,}6$?

(b) Omkostningerne ved at trykke et hæfte kan beskrives ved en funktion $K(x)$ hvor $K(x)$ er omkostningerne i kr. ved at fremstille et oplag på x styk.

Hvad fortæller oplysningen $K'(1000) = 4$?

(c) I en model er en stats skatteindtægter en funktion $L(p)$ hvor $L(p)$ er det antal enheder der kommer ind i skat når skatteprocenten er p %.

Hvad fortæller oplysningerne $L'(20) = 2$ og $L'(70) = -1$?

5.13 Eksempel på brug af væksthastighed

Omkostningerne i kr. ved at fremstille x enheder pr. dag er

$$V(x) = 0{,}065x^3 - 7{,}2x^2 + 290x$$

Vi får tegnet grafen (se figur 5f) og ved metoden fra ramme 2.08 finder vi at

$$V'(40) = 26 \quad \text{og} \quad V'(65) = 178$$

dvs.

når der fremstilles 40 enheder pr. dag, koster det 26 kr. at fremstille 1 enhed mere

og

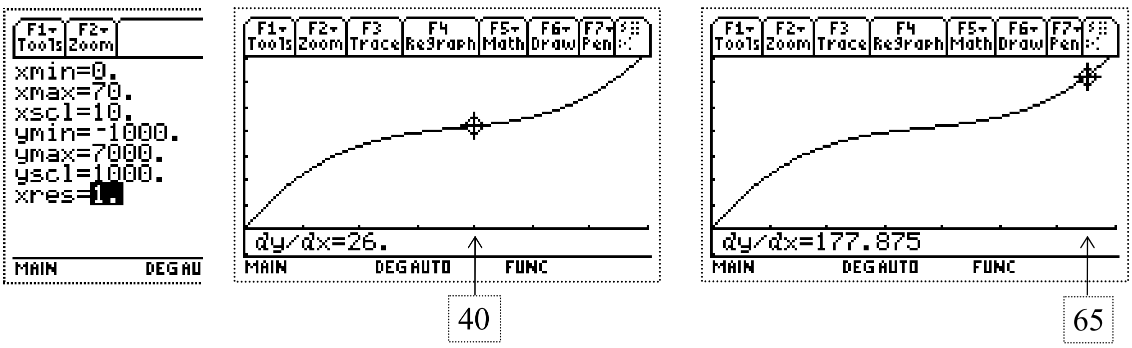
når der fremstilles 65 enheder pr. dag, koster det 178 kr. at fremstille 1 enhed mere.

Hver enhed kan sælges for 170 kr., så

hvis man fremstiller 40 enheder pr. dag, vil man øge overskuddet hvis man fremstiller en enhed mere pr. dag

og

hvis man fremstiller 65 enheder pr. dag, vil man mindske overskuddet hvis man fremstiller en enhed mere pr. dag.



Figur 5f

5.14 Øvelse

(a) Udfør det der er beskrevet i ramme 5.13 .

(b) Bestem $V'(20)$, og benyt dette tal til at afgøre om det vil øge overskuddet hvis nogen der fremstiller 20 enheder pr. dag øger produktionen en lille smule.