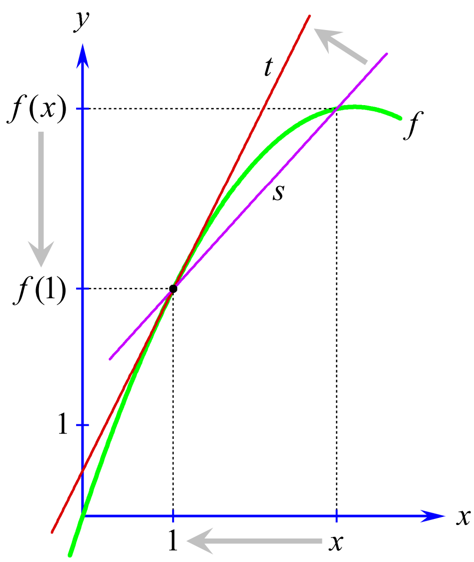
Differential-regning

for B-niveau i hf



2012 Karsten Juul

1. Tangent og røringspunkt 1
2. Funktionsværdi og differentialkvotient 1
3. Aflæs tallet $f(r)$ på figur. 2
4. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur. 2
5. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur. 3
6. Aflæs løsninger til $f'(r)=s$ på figur. 3
7. Bestem forskrift for $f'(x)$ med Nspire. 4
8. Bestem forskrift for $f'(x)$ uden hjælpemidler. 4
9. Bestem ligning for tangent. 5
10. Bestem punkt på graf når vi kender x-koordinat 5
11. Bestem punkt på graf når vi kender y-koordinat 6
12. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning 6
13. Bestem tangenthældning. 7
14. Har grafen en tangent med hældningskoefficienten a? 7
15. Er linjen tangent? 8
16. Bestem røringspunkt for tangent. 9
17. Fortolkning af $f'(x)$ når x ikke er tiden. 10
18. Fortolkning af $f'(x)$ når x er tiden. 10
19. Væksthastighed. 11
20. Bestem størrelsen når tidspunktet er kendt. 11
21. Bestem væksthastigheden når tidspunktet er kendt. 11
22. Bestem tidspunktet når størrelsen er kendt. 12
23. Bestem tidspunktet når væksthastigheden er kendt. 12
24. Voksende og aftagende. 13
25. Hvad er monotoniforhold? 14
26. Regel for at finde monotoniforhold 14
27. Bestem monotoniforhold. 15
28. Maksimum og minimum. 16
29. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er størst. 17
30. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af y. 18
31. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er mindst. 19
32. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af y. 19
33. Bestem ekstrema. 19
34. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum). 19
35. Lokalt maksimum og minimum. 20
36. Bestem lokale ekstrema. 21
37. Differentiabel. 22
38. Grænseværdi. 23
39. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi. 24
40. Udledning af formlen for at differentiere x^2. 25
41. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk*. 25

Differentialregning for B-niveau i hf

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

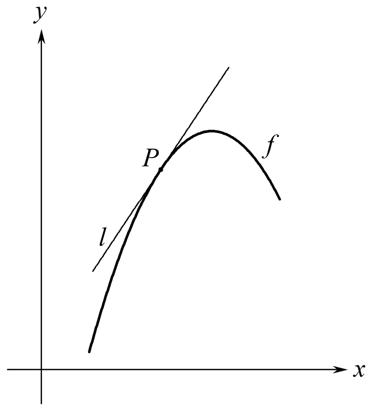
1. Tangent og røringspunkt.

På figuren har vi tegnet grafen for en funktion $f(x)$
og en ret linje l .

> Linjen l er **tangent** til grafen i punktet P
> fordi l er den linje gennem P som følger grafen nær P .

Den viste graf har kun ét punkt fælles med l .

> Punktet P kaldes tangentens **røringspunkt** .



2. Funktionsværdi og differentialkvotient.

På figuren har vi tegnet grafen for en funktion $f(x)$
og tangenten i grafpunktet med x-koordinat r .

> **Funktionsværdien** i r er lig
> <u>y-koordinaten</u> t til grafpunktet med x-koordinat r .

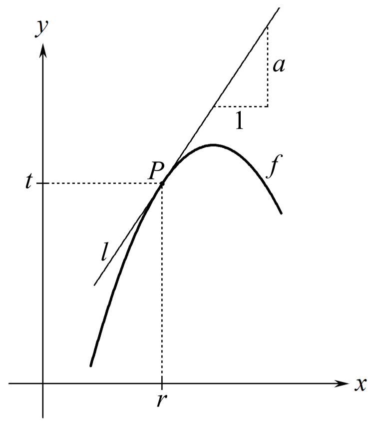
> **Differentialkvotienten** i r er lig
> <u>hældningskoefficienten</u> a for tangenten
> i grafpunktet med x-koordinat r .

<u>Funktionsværdien</u> i r betegnes $f(r)$. $f(r) = t$.

<u>Differentialkvotienten</u> i r betegnes $f'(r)$. $f'(r) = a$.

Symbolet $f(r)$ læses: f af r .

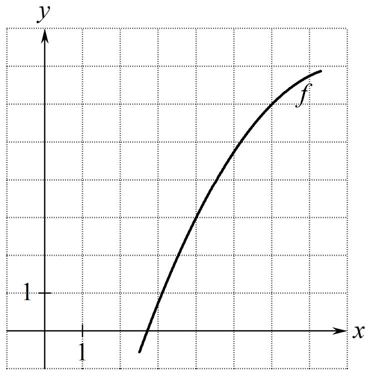
Symbolet $f'(r)$ læses: f mærke af r .



3. Aflæs tallet $f(r)$ på figur.

Opgave

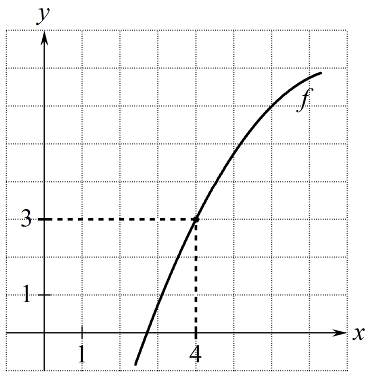
Aflæs tallet $f(4)$ på figuren.



Besvarelse

$f(4) \;=\;$ y-koordinat til grafpunkt med x-koordinat 4

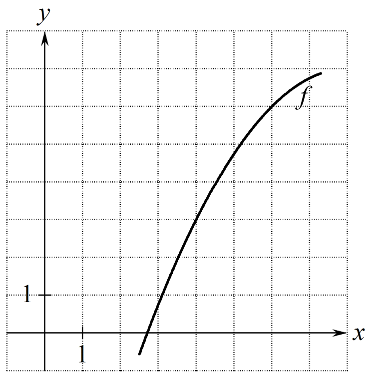
$\underline{\underline{f(4) \;=\; 3}}$. Se markering på figur.



4. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur.

Opgave

Aflæs tallet $f'(4)$ på figuren.



Besvarelse

$f'(4) \;=\;$ hældningskoefficient for tangent l i grafpunkt med x-koordinat 4.

Vi tegner l .

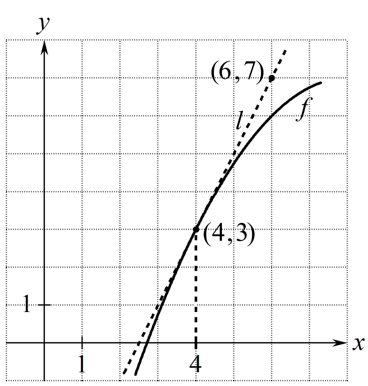
Vi aflæser punkterne $(4,3)$ og $(6,7)$ på l .

l's hældningskoefficient er

$$\frac{7-3}{6-4} = 2$$

så

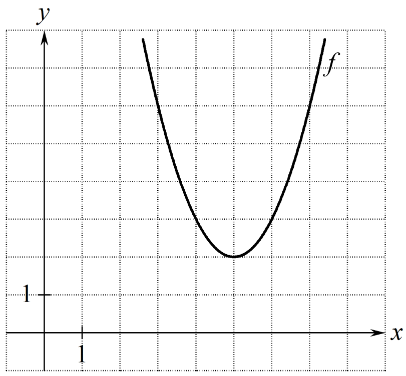
$\underline{\underline{f'(4) = 2}}$.



5. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur.

Opgave

Aflæs løsningerne til ligningen $f(x)=6$ på figuren



Besvarelse

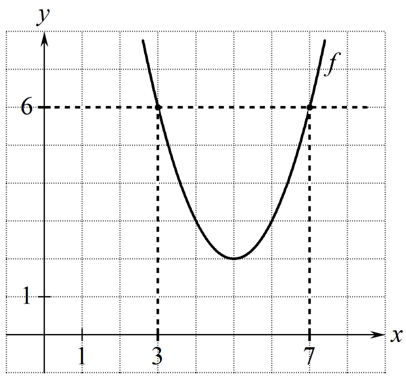
Vi skal løse $f(x)=6$.

$f(x)$ er y-koordinaten til et grafpunkt.

Vi finder de grafpunkter hvor y-koordinaten er 6 .

Vi aflæser x-koordinaten til hvert af disse punkter og får 3 og 7 . Se markeringen på figuren.

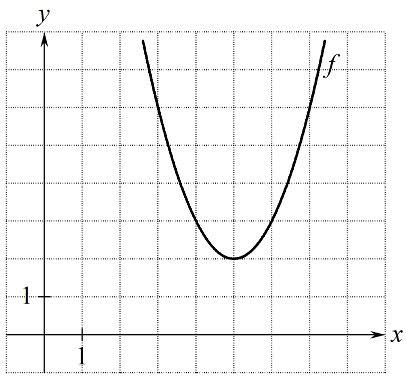
Løsningerne til $f(x)=6$ er $\underline{\underline{x=3 \text{ eller } x=7}}$.



6. Aflæs løsninger til $f'(r)=s$ på figur.

Opgave

Aflæs løsningerne til ligningen $f'(x)=0$ på figuren.



Besvarelse

Vi skal løse $f'(x)=0$.

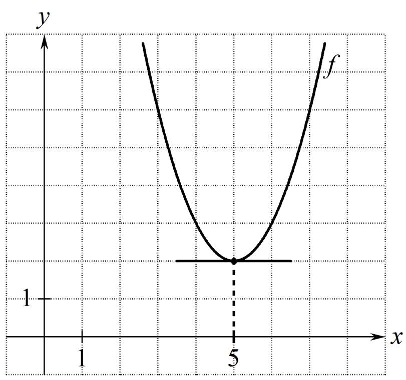
$f'(x)$ er tangenthældningen i et grafpunkt.

Vi finder det grafpunkt hvor tangenthældningen er 0.

Vi aflæser x-koordinaten til dette punkt og får 5 .

Se markeringen på figuren.

Løsningen til $f'(x)=0$ er $\underline{\underline{x=5}}$.



7. Bestem forskrift for $f'(x)$ med Nspire.

For at få Nspire til at

differentiere $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ mht. x

taster vi ved hjælp af skabelonen $\frac{d}{d\square}(\square)$ følgende:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

og får

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Symbolet $\dfrac{d}{dx}$ kan IKKE skrives ved hjælp af en brøkstreg. Brug skabelonen $\frac{d}{d\square}(\square)$.
Skabelon-paletten får vi frem sådan:

<u>Lommeregner:</u>

Tryk på

<u>Computer:</u>

Klik på og på Matematikskabeloner

En funktion g har forskriften

$$g(x) = x \cdot \ln(x)$$

Vi udregner forskriften for g' :

$$g'(x) = \ln(x)+1 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) = \ln(x)+1$$

8. Bestem forskrift for $f'(x)$ uden hjælpemidler.

$k' = 0$ når k er en konstant.   **f.eks.** $4' = 0$ **og** $\left(\ln(2)\right)' = 0$

$(kx)' = k$ **f.eks.** $(4x)' = 4$ **og** $(-2{,}5x)' = -2{,}5$

$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ **f.eks.** $(x^4)' = 4x^3$ **og** $(x^{-3{,}6})' = -3{,}6x^{-4{,}6}$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ e er et bestemt tal (ligesom π). e $\approx$ 2,71828. e er på Nspire, men det er ikke den sædvanlige e-tast.

$\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$ Funktionen $\ln(x)$ kaldes "den naturlige logaritmefunktion". ln er på Nspire.

$\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$ **f.eks.** $(7x^4)' = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$ **og** $\left(7\ln(x)\right)' = 7 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{x}$

$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$ **f.eks.** $(\ln(x)+4)' = \dfrac{1}{x}+0 = \dfrac{1}{x}$ **og** $(7x^4+\mathrm{e}^x)' = 28x^3+\mathrm{e}^x$

$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$ **f.eks.** $(\ln(x)-4)' = \dfrac{1}{x}-0 = \dfrac{1}{x}$ **og** $(7x^4-\mathrm{e}^x)' = 28x^3-\mathrm{e}^x$

Eksempel: $\left(6+3\cdot x-x^2\right)' = 6'+\left(3\cdot x\right)'-\left(x^2\right)' = 0+3\cdot x'-2x = 0+3\cdot 1-2x = \underline{\underline{3-2x}}$

Advarsler: $(a^x)'$ er **IKKE** $x \cdot a^{x-1}$ og $(4^x)'$ er **IKKE** $x \cdot 4^{x-1}$.

$\left(x^2 \cdot \mathrm{e}^x\right)'$ er **IKKE** $2x \cdot \mathrm{e}^x$ og $\left(\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)'$ er **IKKE** $\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$.

Da $\frac{1}{x} = x^{-1}$ og $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ kan vi udregne $\left(\frac{1}{x}\right)'$ og $\left(\sqrt{x}\right)'$ med reglen $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$.

9. Bestem ligning for tangent.

Opgave

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^2 - x + 2 \ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(2, f(2))$.

Besvarelse

$$f'(x) = 2x - 1$$

y-koordinaten til grafpunktet med x-koordinat $x_1 = \mathbf{2}$ er

$$y_1 = f(2) = 2^2 - 2 + 2 = \mathbf{4}$$

Tangenthældningen i grafpunktet med x-koordinat $x_1 = 2$ er

$$a = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = \mathbf{3}$$

Tangenten i grafpunktet med x-koordinat $x_1 = 2$ har ligningen

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = \mathbf{3}(x - \mathbf{2}) + \mathbf{4}$$

$$y = 3x - 6 + 4$$

$$y = 3x - 2$$

Fra formelsamlingen:

Linjen gennem punktet (x_1, y_1) med hældningskoefficienten a har ligningen

$$y = a(x - x_1) + y_1 \ .$$

Tangenten til grafen for f i punktet $(2, f(2))$ har ligningen $\underline{\underline{y = 3x - 2}}$.

10. Bestem punkt på graf når vi kender x-koordinat .

Opgave

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \ .$$

Bestem y-koordinaten til det punkt på grafen for f hvor x-koordinaten er 5 .

Bevarelse

$f(5)$ er punktets y-koordinat:

$$f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 = 50$$

Det punkt på grafen for f hvor x-koordinaten er 5 , har y-koordinaten $\underline{\underline{50}}$.

11. Bestem punkt på graf når vi kender y-koordinat .

Opgave

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \ .$$

Bestem x-koordinaten til hvert af de punkter på grafen for f hvor y-koordinaten er -4 .

Bevarelse

$f(x)$ er punktets y-koordinat:

$$f(x) = -4$$

$$x^3 - 3x^2 = -4$$

Nspire løser denne ligning mht. x og får

$$x = -1 \ \text{ eller } \ x = 2$$

De punkter på grafen for f hvor y-koordinaten er -4 , har x-koordinaterne $\underline{\underline{-1 \ \text{og} \ 2}}$.

12. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning .

Opgave

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \ .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter på grafen for f hvor tangenthældningen er 9 .

Bevarelse

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$f'(x)$ er tangenthældningen i punktet:

$$f'(x) = 9$$

$$3x^2 - 6x = 9$$

Nspire løser denne ligning mht. x og får

$$x = -1 \ \text{ eller } \ x = 3$$

$f(x)$ er punktets y-koordinat:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4 \quad \text{og} \quad f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 = 0$$

De punkter på grafen for f hvor tangenthældningen er 9, har koordinatsættene

$$\underline{\underline{(-1, -4) \quad \text{og} \quad (3, 0)}} \ .$$

13. Bestem tangenthældning.

Opgave

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \tfrac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x \ .$$

Bestem tangenthældningen i graf-punktet med x-koordinat 1

Bevarelse

$$g'(x) = x^2 + 3$$

$g'(1)$ er tangenthældningen i punktet:

$$g'(1) = 1^2 + 3 = 4$$

Tangenthældningen i graf-punktet med x-koordinat 1 er $\underline{\underline{4}}$.

14. Har grafen en tangent med hældningskoefficienten *a*?

Opgave

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \tfrac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x \ .$$

Er der et punkt på g-grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2 ?

Bevarelse

$g'(x)$ er tangenthældningen i punktet:

$$g'(x) = x^2 + 3$$

Hvis tangenthældningen er 2:

$$g'(x) = 2$$

$$x^2 + 3 = 2$$

$$x^2 = -1$$

Dette er ikke opfyldt for noget tal x da et tal i anden aldrig er negativt.

$\underline{\underline{\text{Der er ikke et punkt på grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2}}}$.

15. Er linjen tangent?

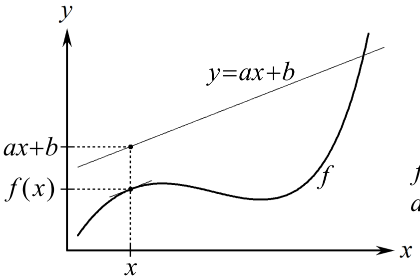
En linje er tangent til grafen for en funktion i et punkt netop hvis der både gælder at

y-koordinat er ens

og

tangenthældning er ens.

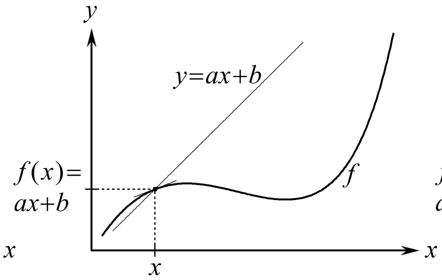
Dette er vist på de tre figurer.



y-koordinat er forskellig: $f(x) \neq ax+b$

Tangenthældning er ens: $f'(x) = a$

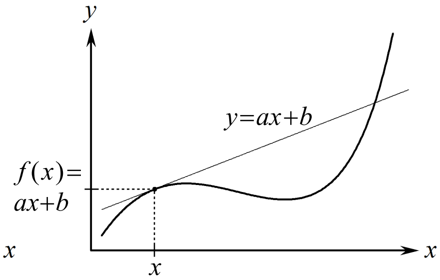
Linjen er ikke tangent.



y-koordinat er ens: $f(x) = ax+b$

Tangenthældn. er forskellig: $f'(x) \neq a$

Linjen er ikke tangent.



y-koordinat er ens: $f(x) = ax+b$

Tangenthældning er ens: $f'(x) = a$

Linjen er tangent.

Opgave

Er linjen $l:\ y = 9x + 17$ tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$?

Besvarelse

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

I røringspunktet skal f-grafens tangenthældning $f'(x)$ være lig l's hældningskoefficient som er 9:

$$f'(x) = 9$$

$$3x^2 - 3 = 9$$

Nspire løser denne ligning mht. x og får

$$x = -2 \quad \text{eller} \quad x = 2$$

Hvis $x = 2$ er

y-koordinat på f-graf lig $\quad f(2) \;=\; 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 \;=\; 3$

y-koordinat på l lig $\quad y \;=\; 9 \cdot 2 + 17 \;=\; 35$

så y-koordinaterne er ikke ens,

så l er ikke tangent i grafpunktet med x-koordinat 2 .

Hvis $x = -2$ er

y-koordinat på f-graf lig $\quad f(-2) \;=\; (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 1 \;=\; -1$

y-koordinat på l lig $\quad y \;=\; 9 \cdot (-2) + 17 \;=\; -1$

så y-koordinaterne er ens, og vi vidste i forvejen at tangenthældningerne er ens,

så l er tangent i grafpunktet med x-koordinat 2 .

<u>Linjen l er tangent til grafen for f .</u>

16. Bestem røringspunkt for tangent.

Opgave

Linjen $l:\ y = 9x+17$ er tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Bestem koordinatsættet til røringspunktet

Besvarelse

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

I røringspunktet skal f-grafens tangenthældning $f'(x)$ være lig
l's hældningskoefficient som er 9:

$$f'(x) = 9$$

$$3x^2 - 3 = 9$$

Nspire løser denne ligning mht. x og får

$$x = -2 \quad \text{eller} \quad x = 2$$

Hvis $x = 2$ er

y-koordinat på f-graf lig $\quad f(2) = 2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 3$

y-koordinat på l lig $\quad y = 9\cdot 2 + 17 = 35$

så y-koordinaterne er ikke ens,

så grafpunkt med x-koordinat 2 er ikke røringspunkt.

Hvis $x = -2$ er

y-koordinat på f-graf lig $\quad f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2) + 1 = -1$

y-koordinat på l lig $\quad y = 9\cdot(-2) + 17 = -1$

så y-koordinaterne er ens, og vi vidste i forvejen at tangenthældningerne er ens,

så grafpunkt med x-koordinat -2 er røringspunkt.

Koordinatsættet til røringspunktet er $\underline{\underline{(-2\,,-1)}}$.

17. Fortolkning af $f'(x)$ når x ikke er tiden.

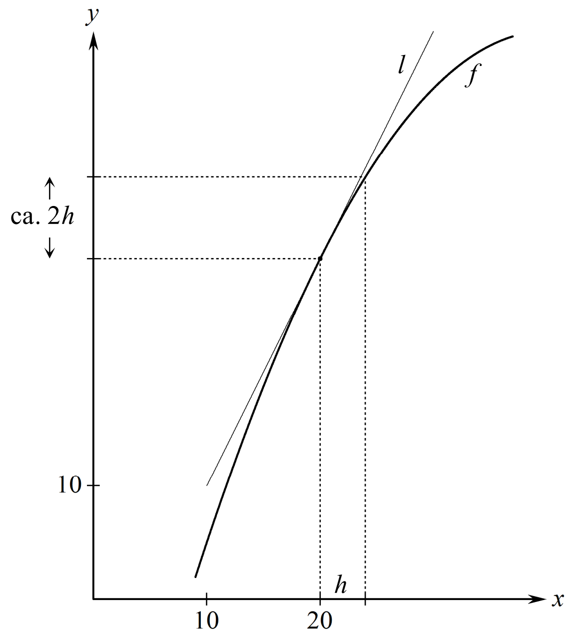
Opgave Fortolkning af f' når x ikke er tiden.

Om et tegnet dyr på skærmen gælder at

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 4x - 30$$

hvor $f(x)$ er dyrets højde,
og x er dyrets længde.

Bestem $f'(20)$, og gør rede for hvad dette tal fortæller om dyret.



Besvarelse

$$f'(x) = -0{,}1x + 4 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

Heri sætter vi x lig 20:

$$f'(20) = -0{,}1 \cdot 20 + 4$$

$$\underline{\underline{f'(20) = 2}}$$

Dette fortæller at når dyrets længde er 20
og vi lægger et lille tal til længden,
så lægges ca. 2 gange dette tal til højden.

18. Fortolkning af $f'(x)$ når x er tiden.

Opgave Fortolkning af f' når x er tiden.

Om et tegnet dyr på skærmen gælder at

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 4x - 30$$

hvor $f(x)$ er dyrets højde målt i mm,
og x er tiden målt i minutter.

Bestem $f'(20)$, og gør rede for hvad dette tal fortæller om dyret.

Besvarelse

$$f'(x) = -0{,}1x + 4 \qquad \textit{udregnet med Nspire}$$

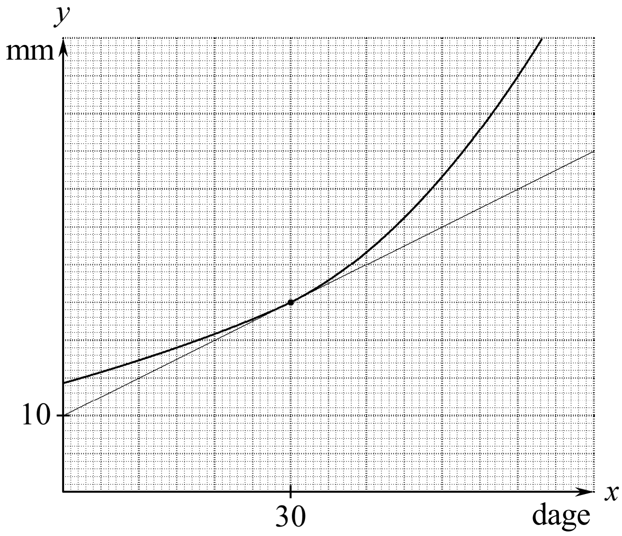
Heri sætter vi x lig 20:

$$f'(20) = -0{,}1 \cdot 20 + 4$$

$$\underline{\underline{f'(20) = 2}}$$

Dette fortæller at på tidspunktet 20 minutter
vokser dyrets højde med hastigheden 2 mm pr. minut.

19. Væksthastighed.



Figuren viser grafen for en funktion $f(x)$ hvor

x = antal dage efter at vi begyndte at måle

$f(x)$ = plantens højde i mm

På figuren ser vi at

$f'(30) = 0{,}5$

og at omkring tidspunktet 30 dage vil plantens højde blive ca. 0,5 mm højere pr. dag.

Vi siger at

på tidspunktet 30 dage efter at vi begyndte at måle, er væksthastigheden lig 0,5 mm pr. dag.

I et lille tidsum på x-aksen er grafen næsten sammenfaldende med den tegnede tangent.
Det er i dette tidsrum at væksthastigheden er ca. 0,5 mm pr. dag.

20. Bestem størrelsen når tidspunktet er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem dyrets vægt på tidspunktet 30 dage.

Besvarelse

$$f(30) \;=\; 56 \cdot 1{,}02^{30} + 240 \;=\; 341{,}436$$

Dyrets vægt er 341 gram på tidspunktet 30.

21. Bestem væksthastigheden når tidspunktet er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem den hastighed hvormed dyrets vægt vokser på tidspunktet 30 dage.

Besvarelse

$$f'(x) = 1{,}10895 \cdot 1{,}02^x \qquad \textit{udregnet på Nspire}$$

$$f'(30) \;=\; 1{,}10895 \cdot 1{,}02^{30} \;=\; 2{,}0087$$

På tidspunktet 30 dage vokser dyrets vægt med hastigheden 2,0 gram pr. dag .

22. Bestem tidspunktet når størrelsen er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt er 500 gram.

Besvarelse

$$f(x) = 500$$

$$56 \cdot 1{,}02^x + 240 \ = \ 500$$

Nspire løser denne ligning mht. x og får $x = 77{,}5316$.

Dyrets vægt er 500 gram på tidspunktet $\underline{\underline{78}}$ dage.

23. Bestem tidspunktet når væksthastigheden er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt vokser med hastigheden 4 gram pr. dag.

Besvarelse

$$f'(x) = 1{,}10895 \cdot 1{,}02^x \qquad \textit{udregnet på Nspire}$$

Vi får

$$f'(x) = 4$$

$$1{,}10895 \cdot 1{,}02^x \ = \ 4$$

Nspire løser denne ligning mht. x og får $x = 64{,}7834$.

På tidspunktet $\underline{\underline{\text{65 dage}}}$ vokser dyrets vægt med hastigheden 4 gram pr. dag.

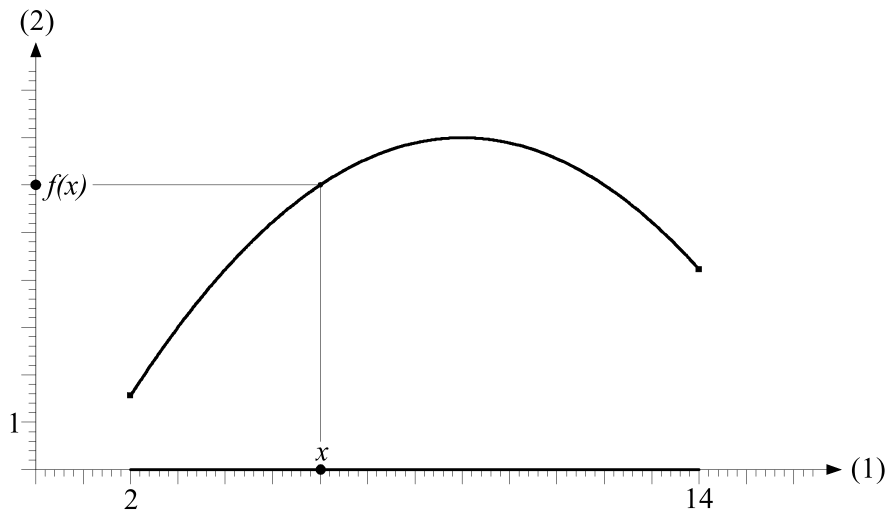
24. Voksende og aftagende.

Figuren viser en interaktiv figur fra en computerskærm. Når vi trækker x-punktet hen på et tal x kan vi aflæse funktionsværdien $f(x)$.

På figuren kan vi se:

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 2 til og med 9, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive større.

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 9 til og med 14, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive mindre.



Som bekendt siger man:

$f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

Er $f(x)$ både aftagende og voksende i 9 ?

Nej, vi taler ikke om at en funktion er voksende i ét tal. Vi taler om at en funktion er voksende i et interval. Der skal være mindst to y-værdier hvis vi skal kunne tale om at y er blevet større eller mindre.

At $f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

betyder at når vi i intervallet vælger større og større x-værdi, så bliver y-værdien $f(x)$ større og større.

At $f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

betyder at når vi i intervallet vælger større og større x-værdi, så bliver y-værdien $f(x)$ mindre og mindre.

25. Hvad er monotoniforhold?

I nogle opgaver står at vi skal

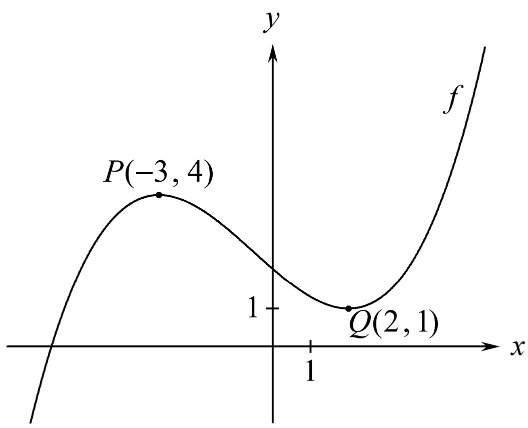
bestemme monotoniforholdene

for en funktion.

Det betyder at vi skal skrive

i hvilke x-intervaller funktionen aftager, og
i hvilke x-intervaller funktionen vokser.

På figuren er vist grafen for et tredjegradspolynomium.



Monotoniforholdene kan vi skrive sådan:

$f(x)$ er voksende i intervallet $x \leq -3$

$f(x)$ aftagende i intervallet $-3 \leq x \leq 2$

$f(x)$ voksende i intervallet $2 \leq x$

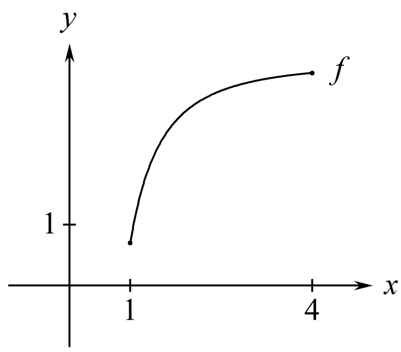
26. Regel for at finde monotoniforhold.

Hvis $f'(x)$ er positiv

($*$) tangenthældningen $f'(x)$ er positiv for hvert tal x i intervallet $1 \leq x \leq 4$.

($**$) $f(x)$ er voksende i intervallet $1 \leq x \leq 4$.

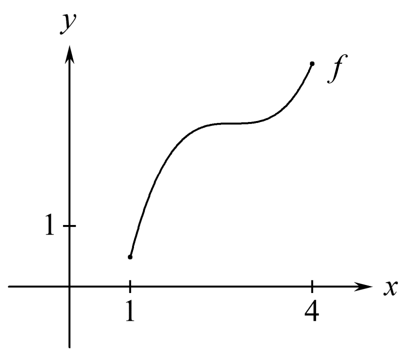
Hvis man prøver at tegne grafen sådan at ($*$), men ikke ($**$) gælder, så bliver man overbevist om at det ikke kan lade sig gøre. Man kan bevise at hvis ($*$) gælder, så gælder ($**$) også.



Hvis der er undtagelser fra at $f'(x)$ er positiv

Funktionen $f(x)$ på nederste figur er voksende selv om der er ét punkt hvori tangenthældningen er 0.

Selv om der er enkelte undtagelser fra ($*$), kan man slutte at ($**$) gælder.



Sætning 26.1

Hvis $f'(x)$ er positiv for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ voksende i intervallet.

Hvis $f'(x)$ er negativ for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ aftagende i intervallet.

27. Bestem monotoniforhold.

Opgave

Bestem monotoniforholdene for funktionen

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}\ .$$

Besvarelse

For at få Nspire til at

differentiere $\quad f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}\quad$ mht. x

taster vi ved hjælp af skabelonen $\frac{d}{d\square}(\square)$ følgende:

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}\right)$$

og får

$$f'(x)=x^3+2x^2$$

For at få Nspire til at

løse ligningen $\quad x^3+2x^2=0\quad$ mht. x

taster vi

$$\text{solve}(x^3+2x^2=0,x)$$

og får løsningerne

$$x=-2 \quad \text{eller} \quad x=0$$

Heraf følger at $f'(x)$ kun kan skifte fortegn i x-værdierne -2 og 0. Disse to tal deler tallinjen op i tre delintervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f' i tallet:

Da $\quad f'(-3)\ =\ (-3)^3+2(-3)^2\ =\ -9 \quad$ er $\quad f'(x)$ negativ for $x<-2$

Da $\quad f'(-1)\ =\ (-1)^3+2(-1)^2\ =\ 1 \quad$ er $\quad f'(x)$ positiv for $-2<x<0$

Da $\quad f'(1)\ =\ 1^3+2\cdot 1^2\ =\ 3 \quad$ er $\quad f'(x)$ positiv for $0<x$

Af dette følger:

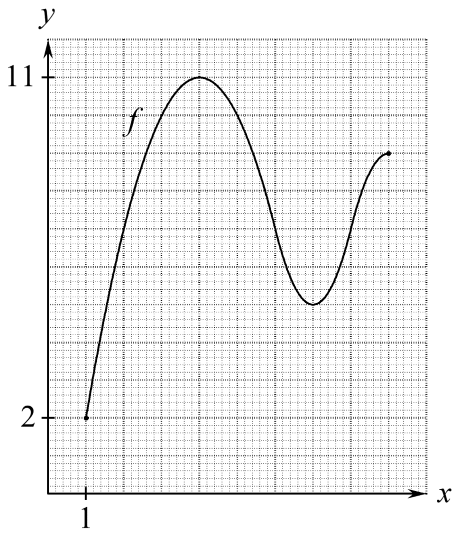
$f(x)$ er aftagende i intervallet $x\le -2$

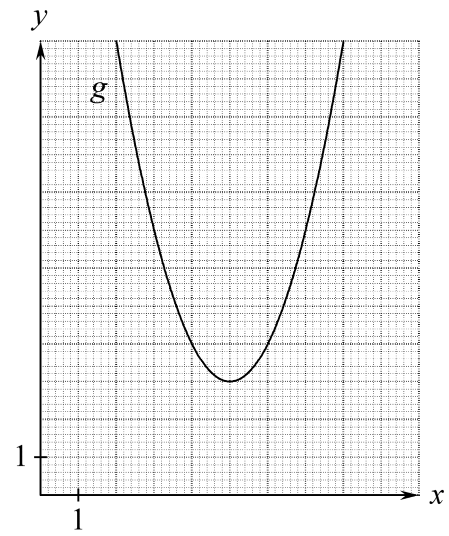
$f(x)$ er voksende i intervallet $-2\le x$

Oversigt:

x :		-2		0	
$f'(x)$:	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$:	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

28. Maksimum og minimum.





Maksimum for f er den største y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

maksimum for f er 11.

Minimum for f er den mindste y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

minimum for f er 2.

Grafen for g er en parabel hvor grenene går uendelig højt op.

Der er ikke noget punkt på grafen der har den største y-koordinat
da man altid kan afsætte et punkt højere oppe på grafen, så

funktionen g har ikke noget maksimum.

Når vi skriver hvad maksimum eller minimum er,
så skriver vi normalt også hvad punktets x-koordinat er:

f har maksimum for $x = 4$ og maksimum er $y = 11$

f har minimum for $x = 1$ og minimum er $y = 2$

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

f har maksimum **i** 4 og maksimum **er** 11 .

f har minimum **i** 1 og minimum **er** 2 .

Størsteværdi og mindsteværdi for en funktion er det samme som hhv. maksimum og minimum.

I nogle opgaver står at vi skal bestemme ekstrema. Dette betyder at vi skal finde maksimum hvis der er et maksimum, og minimum hvis der er et minimum.

Ekstremum er en fællesbetegnelse for maksimum og minimum. Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.

29. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er størst.

Opgave

Højden af en figur er givet ved

$$f(x) \;=\; 86 - x^2 - \frac{16}{x} \quad , \qquad \tfrac{1}{5} < x < 9 \;.$$

hvor x er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.
Bestem bredden så højden bliver størst mulig.

Besvarelse

$$f'(x) \;=\; \frac{16}{x^2} - 2x \qquad \textit{udregnet på Nspire}$$

Vi bestemmer de værdier af x hvor $f'(x)$ kan skifte fortegn:

$$f'(x) \;=\; 0$$

$$\frac{16}{x^2} - 2x \;=\; 0$$

Vi får Nspire til at
løse denne ligning mht. x for $\frac{1}{5} < x < 9$
ved at taste

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2x = 0\,,x\right) \Big| \frac{1}{5} < x < 9$$

og får

$$x = 2 \;.$$

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

Vi udregner $f'(x)$ i en x-værdi på hver side af 2:

$f'(1) \;=\; \dfrac{16}{1^2} - 2 \cdot 1 \;=\; 14$ så $f'(x)$ er positiv for $\dfrac{1}{5} < x < 2$

$f'(4) \;=\; \dfrac{16}{4^2} - 2 \cdot 4 \;=\; -7$ så $f'(x)$ er negativ for $2 < x < 9$.

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\dfrac{1}{5} < x < 2$

f er aftagende i intervallet $2 < x < 9$.

Af monotoniforholdene følger:

$f(x)$ er størst når $x = 2$, dvs.

Højden bliver størst mulig når bredden er $\underline{\underline{2}}$.

30. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af y.

Opgave

Højden af en figur er givet ved

$$f(x) \;=\; 86 - x^2 - \frac{16}{x} \quad , \qquad \tfrac{1}{5} < x < 9 \;.$$

hvor x er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.
Bestem den størst mulige højde..

Besvarelse

$$f'(x) \;=\; \frac{16}{x^2} - 2x \qquad \textit{udregnet på Nspire}$$

Vi bestemmer de værdier af x hvor $f'(x)$ kan skifte fortegn:

$$f'(x) \;=\; 0$$

$$\frac{16}{x^2} - 2x \;=\; 0$$

Vi får Nspire til at

løse denne ligning mht. x for $\tfrac{1}{5} < x < 9$

ved at taste

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2x = 0\,,x\right) \Big| \frac{1}{5} < x < 9$$

og får

$$x = 2 \;.$$

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

Vi udregner $f'(x)$ i en x-værdi på hver side af 2:

$$f'(1) \;=\; \frac{16}{1^2} - 2\cdot 1 \;=\; 14 \qquad \text{så} \qquad f'(x) \text{ er positiv for } \frac{1}{5} < x < 2$$

$$f'(4) \;=\; \frac{16}{4^2} - 2\cdot 4 \;=\; -7 \qquad \text{så} \qquad f'(x) \text{ er negativ for } 2 < x < 9 \;.$$

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x < 2$

f er aftagende i intervallet $2 < x < 9$.

Af monotoniforholdene følger:

$f(x)$ er størst når $x = 2$, så den størst mulige værdi af $f(x)$ er

$$f(2) \;=\; 86 - 2^2 - \frac{16}{2} \;=\; 74$$

dvs.

Den størst mulige højde er $\underline{\underline{74}}$.

31. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er mindst.

Dette gøres som vist i ramme 29 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

32. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af y .

Dette gøres som vist i ramme 30 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

33. Bestem ekstrema.

Når der står ”Bestem ekstrema”, så skal vi bestemme minimum hvis der er et minimum, og vi skal bestemme maksimum hvis der er et maksimum. Se ramme 30 og 32.

34. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum).

Opgave

Gør rede for at funktionen

$$f(x) = x^3 - 9x + 12 \quad , \qquad x > 0$$

har et minimum.

Metode

Vi bestemmer monotoniforhold for $f(x)$ med metoden fra ramme 27. Herefter skriver vi:

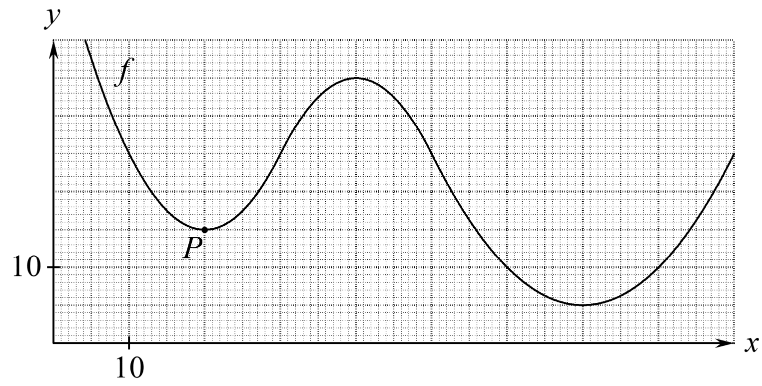
Da $f(x)$ er

aftagende i intervallet $0 < x \leq \sqrt{3}$ og voksende i intervallet $\sqrt{3} \leq x$

kan vi slutte at

$f(x)$ har minimum for $x = \sqrt{3}$.

35. Lokalt maksimum og minimum.



Figuren viser grafen for en funktion f . I de to ender fortsætter grafen uendelig højt op.

P er grafpunktet med x-koordinat 20 og y-koordinat 15 .

Vi kan vælge et stykke af grafen omkring P sådan at 15 er mindste y-koordinat på dette stykke.
Vi siger derfor at

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

15 er ikke minimum da der andre steder på grafen er y-koordinater som er mindre.

Hvis $Q(x_0, y_0)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_o er mindste y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt minimum</u> for $x = x_o$ og det lokale minimum er $y = y_o$

Hvis $Q(x_0, y_0)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_o er største y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt maksimum</u> for $x = x_o$ og det lokale maksimum er $y = y_o$

Om funktionen fra figuren ovenfor gælder:

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

f har lokalt maksimum for $x = 40$ og det lokale maksimum er $y = 35$.

f har lokalt minimum for $x = 70$ og det lokale minimum er $y = 5$.

f har minimum for $x = 70$ og minimum er $y = 5$.

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

f har minimum **i** 70 og minimum **er** 5 .

f har lokalt maksimum **i** 40 og det lokale maksimum **er** 35 .

I nogle opgaver står at vi skal bestemme <u>lokale ekstrema</u>. Dette betyder at vi skal finde både de lokale minimummer og de lokale maksimummer.

Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.

36. Bestem lokale ekstrema.

Opgave

Bestem de lokale ekstrema for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 18x - 90 \ .$$

Besvarelse

I hvilke x-værdier er der lokale ekstrema?
Det kan vi se når vi har fundet monotoniforholdene for $f(x)$.

Nspire

differentierer $f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 18x - 90$ mht. x

og får $f'(x) = x^2 + 3x - 18$.

Nspire

løser ligningen $f'(x) = 0$ mht. x

og får løsningerne -6 og 3 .

Heraf følger at $f'(x)$ kun kan skifte fortegn i x-værdierne -6 og 3. Disse to tal deler tallinjen op i tre delintervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f' i tallet:

Da	$f'(-7) = (-7)^2 + 3(-7) - 18 = 10$	er	$f'(x)$ positiv for	$x < -6$
Da	$f'(0) = 0^2 + 3\cdot 0 - 18 = -18$	er	$f'(x)$ negativ for	$-6 < x < 3$
Da	$f'(4) = 4^2 + 3\cdot 4 - 18 = 10$	er	$f'(x)$ positiv for	$3 < x$

Vi kan slutte følgende:

x :		-6		3	
$f'(x)$:	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$:	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Da

$$f(-6) = \tfrac{1}{3}(-6)^3 + \tfrac{3}{2}(-6)^2 - 18(-6) - 90 = 0$$

$$f(3) = \tfrac{1}{3}\cdot 3^3 + \tfrac{3}{2}\cdot 3^2 - 18\cdot 3 - 90 = -\tfrac{243}{2}$$

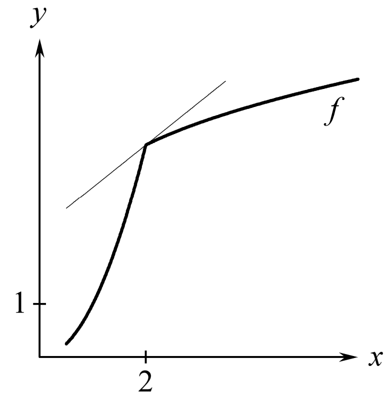
får vi

$f(x)$ har lokalt maksimum for $x = -6$ og det lokale maksimum er $y = 0$

$f(x)$ har lokalt minimum for $x = 3$ og det lokale minimum er $y = -\tfrac{243}{2}$

37. Differentiabel.

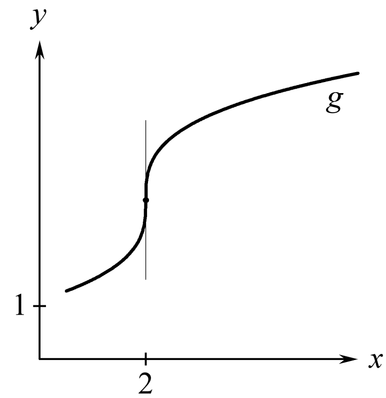
Grafen for f har et knæk i punktet med x-koordinat 2.
Derfor har grafen ikke nogen tangent i dette punkt.
(Tangenten er en linje der følger grafen nær punktet).



Funktionen f har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og der er ikke nogen tangent.

Der gælder altså at $f'(2)$ ikke eksisterer.

Grafen for g har en lodret tangent i punktet med x-koordinat 2.
En lodret linje har ikke nogen hældningskoefficient.



Funktionen g har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og tangenten har ikke nogen hældningskoefficient.

Der gælder altså at $g'(2)$ ikke eksisterer.

Definition 37.1

Man siger at en funktion er differentiabel i et tal x_o
hvis funktionen har en differentialkvotient i x_o
dvs. hvis $f'(x_o)$ eksisterer.

38. Grænseværdi.

Udtrykket $u = \dfrac{3x^2-6x}{x-2}$ kan vi ikke regne ud for $x=2$ da nævneren bliver 0.

Vi kan udregne u for værdier af x som er tæt på 2 :

x	1,98	1,999	2	2,001	2,02
u	5,94	5,997		6,003	6,06

Ved at vælge værdien af x tilstrækkelig tæt på 2 kan vi få værdien af u så tæt det skal være på 6 .

Vi siger: **grænseværdien for x gående mod 2 af u** er lig 6

Med symboler skriver vi dette sådan: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-6x}{x-2} = 6$

<u>Metode 38.1</u>

Vi kan regne os frem til denne grænseværdi ved at bruge følgende teknik: Vi faktoriserer brøkens tæller og forkorter brøken. Så får vi et udtryk som vi kan udregne når x er 2:

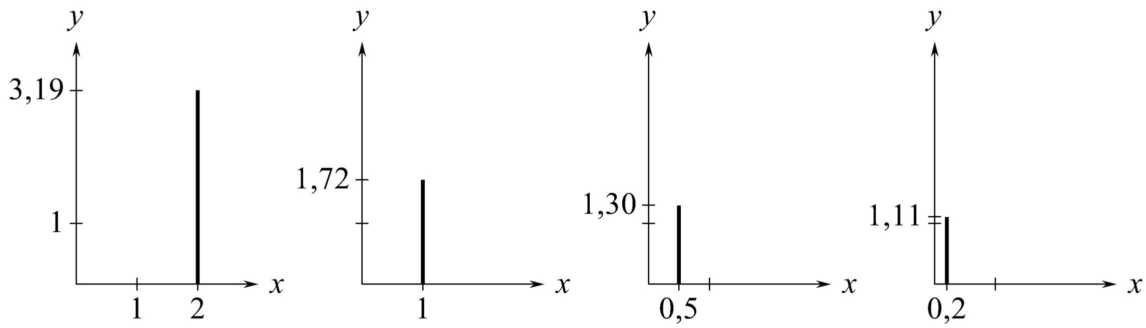
For $x \neq 2$ er $\dfrac{3x^2-6x}{x-2} = \dfrac{3x(x-2)}{x-2} = 3x$

så $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-6x}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} 3x$ og $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 3\cdot 2 = 6$

<u>Sætning 38.2</u> $\lim\limits_{x\to x_0} \left(k \cdot udtryk\right) = k \cdot \lim\limits_{x\to x_0} udtryk$ når k er en konstant

<u>Sætning 38.3</u> $\lim\limits_{x\to x_0} \left(udtryk1 + udtryk2\right) = \lim\limits_{x\to x_0} udtryk1 + \lim\limits_{x\to x_0} udtryk2$

<u>Metode 38.4</u>



Højden af stolpen er $h = \dfrac{e^x-1}{x}$ hvor x er det tal stolpen står i. På figuren ser det ud til at stolpens højde nærmer sig 1 når vi trækker stolpen hen mod $x=0$, hvor stolpen ikke eksisterer.
Vi får Nspire til at udregne grænseværdien af højden for x gående mod 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

På Nspire kan vi vælge grænseværdi-skabelonen på skabelonpaletten.
Skabelonen ser sådan ud: $\lim\limits_{\square\to\square^{\square}}(\square)$ Vi behøver ikke skrive noget i det tredje felt.

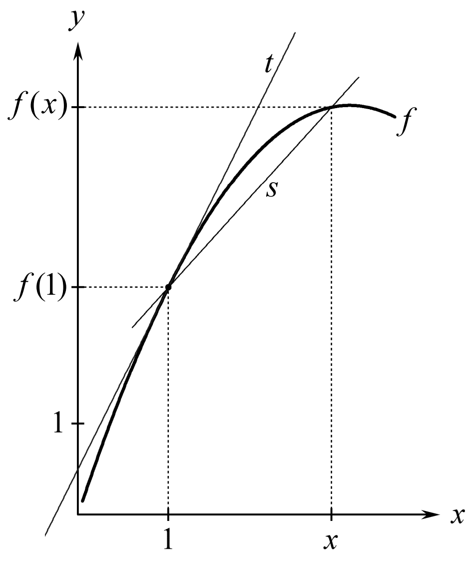
39. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi.

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x$$

Linjen t er tangenten i grafpunktet med x-koordinat 1.

Linjen s skærer grafen i punkterne med x-koordinaterne 1 og x.



Hældningskoefficienten for s er

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

På figuren er $x = 2{,}8$

Når $x = 2{,}8$ er $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{4{,}48-2{,}5}{1{,}8} = 1{,}1$

dvs. linjen s har hældningskoefficienten 1,1

Forestil dig at du tager fat i skæringspunktet med x-koordinat x og fører det langs grafen ned mod det andet skæringspunkt. Så vil s dreje og nærme sig mere og mere til t.
Vi ser at hvis $x = 1{,}01$ vil s og t have næsten samme hældning.

Når $x = 1{,}01$ er $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{2{,}51995-2{,}5}{0{,}01} = 1{,}995$

Altså er 1,995 en god tilnærmelse til $f'(1)$.

Vi ser at vi for at få $f'(1)$ helt nøjagtigt skal udregne $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

For $x \neq 1$ er $\quad \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{(-\frac{1}{2}x^2+3x) - \frac{5}{2}}{x-1} = \dfrac{5-x}{2}$

så $\quad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5-x}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2$

dvs. $\quad f'(1) = 2$

Den sidste omskrivning kan vi f.eks. få Nspire til at lave. Vi kan også bruge reglen om at faktorisere et andengradspolynomium og derefter forkorte. Vi kan kontrollere lighedstegnet ved at gange begge sider med 2 og $x-1$.

<u>Sætning 39.1</u>

For en funktion f er

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

40. Udledning af formlen for at differentiere x^2.

Når $f(x) = x^2$ er

$$
\begin{aligned}
f'(x_o) &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge sætning 39.1} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} && \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{(x + x_o) \cdot (x - x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge en af kvadratsætningerne} \\
&= \lim_{x \to x_o} (x + x_o) && \text{vi har forkortet med } x - x_o \\
&= x_o + x_o && \text{ifølge metode 38.1} \\
&= 2x_o &&
\end{aligned}
$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

Sætning 40.1: $\left(x^2\right)' = 2x$

41. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk* .

Når $f(x) = g(x) + h(x)$ er

$$
\begin{aligned}
f'(x_o) &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge sætning 39.1} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{\left(g(x) + h(x)\right) - \left(g(x_o) + h(x_o)\right)}{x - x_o} && \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{\left(g(x) - g(x_o)\right) + \left(h(x) - h(x_o)\right)}{x - x_o} && \\
&= \lim_{x \to x_o} \left(\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} \right) && \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x \to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge sætning 38.3} \\
&= g'(x_o) + h'(x_o) && \text{ifølge sætning 39.1}
\end{aligned}
$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

Sætning 41.1: $\left(g(x) + h(x)\right)' = g'(x) + h'(x)$

Stikordsregister

aftagende 13, 14
differentiabel 22
differentialkvotient 1, 24
differentialkvotient på graf 2
differentialkvotients forskrift 4
differentialkvotients fortolkning 10
differentiationsregler 4
ekstrema 16, 19
ekstremum 16
fortolkning af differentialkvotient 10
funktionsværdi 1, 2
grænseværdi 23, 24
hældningskoefficient 7, 22
lokale ekstrema 20, 21
lokalt maksimum 20, 21
lokalt minimum 20, 21
løs ligning ud fra graf 3
maksimum 16, 19
mindsteværdi 16, 19
minimum 16, 19
monotoniforhold 14, 15
Nspire 4, 15, 17, 18, 23, 24
røringspunkt 1, 9
størsteværdi 16, 17, 18
tangent 1, 8, 11, 22
tangenthældning 6, 7
tangents ligning 5
voksende 13, 14
væksthastighed 11, 12