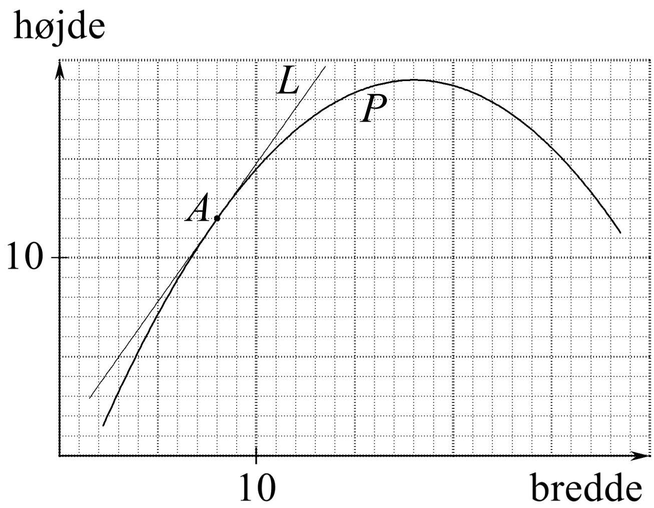
Differential-regning

Et oplæg



2009 Karsten Juul

Til eleven

Dette hæfte kan I bruge inden I starter på differentialregningen i lærebogen.

Det meste af hæftet er små spørgsmål med korte svar.

Spørgsmålene er indrettet sådan at du opdager indholdet af differentialregningen.

Det er vigtigt at du selv fumler dig frem til facitterne.

Det er vigtigt at der ikke er nogen der fortæller dig en smart måde at finde facitterne på.

**Brug blyant og viskelæder når du skriver og tegner i hæftet,
så du får et hæfte der er egenet til jævnligt at slå op i
under dit videre arbejde med differentialregningen.**

Indhold

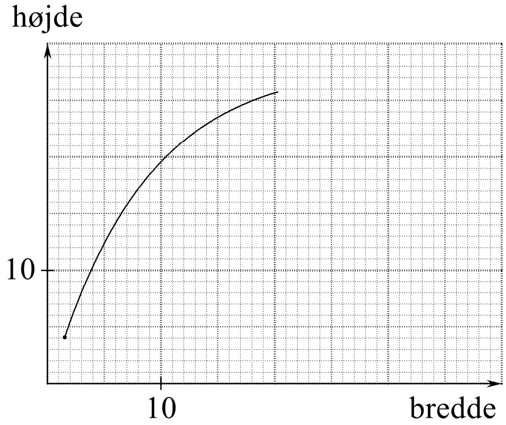
Differentialregning. Et oplæg.

1. udgave 2009

Graf

Øvelse 1

På en skærm er der et rektangel. Når vi ændrer bredden, ændres højden automatisk. Figuren nedenfor viser hvordan højden ændres.



(a) Når bredden er 3, så er højden _____ .

(b) Angiv på figuren det punkt *A* som giver denne oplysning.

(c) Når bredden er 18, så er højden _____ .

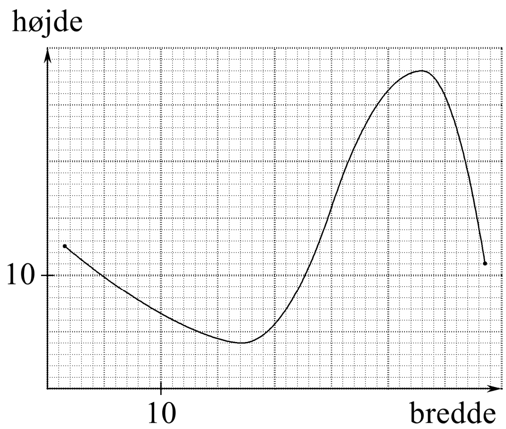
(d) Angiv på figuren det punkt *B* som giver denne oplysning.

På figuren mangler en del af grafen.

(e) Vi trækker i rektanglet så bredden bliver 26, og ser at højden er 27.
Tilføj på figuren det grafpunkt *C* som viser dette.

(f) Vi trækker i rektanglet så bredden bliver 37, og ser at højden er 28.
Tilføj på figuren det grafpunkt *D* som viser dette.

Øvelse 2



Figuren viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.

(a) Når bredden er 21, er højden _____ .

(b) Højden er mindst når bredden er _____ .

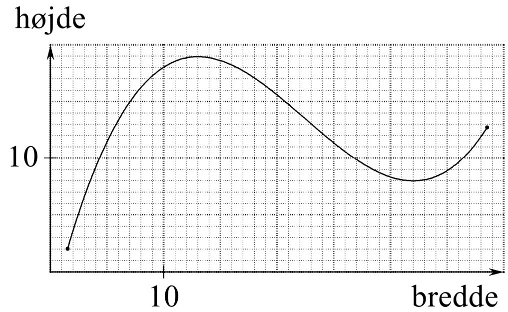
(c) Den mindste højde er _____ .

(d) Den største højde er _____ .

(e) Højden er størst når bredden er _____ .

Øvelse 3

Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



(a) Når bredden er 32, er højden _____ .

(b) Hvis vi indstiller bredden til 23, får vi så en mindre højde end når vi indstiller bredden til 32? Svar: _____ .

(c) Hvis vi indstiller bredden til 2, får vi så en mindre højde end når vi indstiller bredden til 32? Svar: _____ .

(d) Hvilke bredder kan vi bruge hvis vi ikke vil have at højden er mindre end den er når bredden er 32?
Svar: _________________________ .

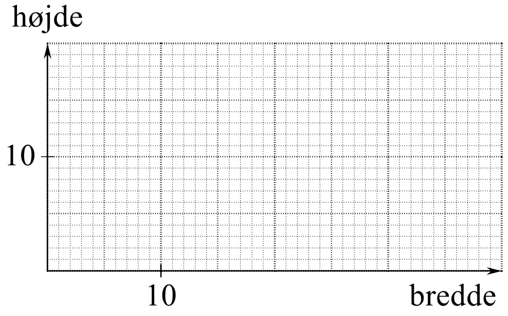
(e) Hvilke bredder kan vi bruge hvis vi ikke vil have at højden er større end den er når bredden er 13?
Svar: _________________________ .

Øvelse 4

I koordinatsystemet nedenfor skal du tegne en sammenhængende graf så følgende er opfyldt:

Når bredden er 10, er højden større end når bredden er 5 eller 20.

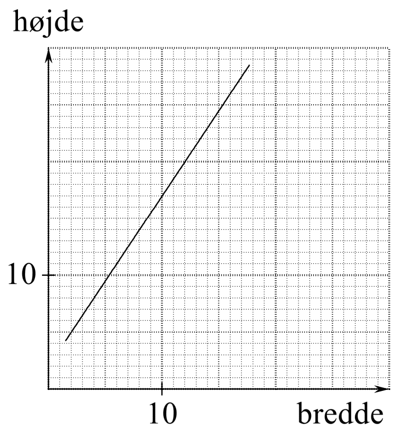
Når bredden er 30, er højden større end når bredden er 20 eller 35.



Lineær graf

Øvelse 5

Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



(a) Når bredden er 6 er højden _____ .

(b) Når bredden er 8 er højden _____ .

(c) Når vi ændrer bredden fra 6 til 8, så bliver højden _____ enheder større.

(d) Når vi ændrer bredden fra 8 til 10, så bliver højden _____ enheder større.

(e) Når vi gør bredden 2 enheder større, så bliver højden _____ enheder større.

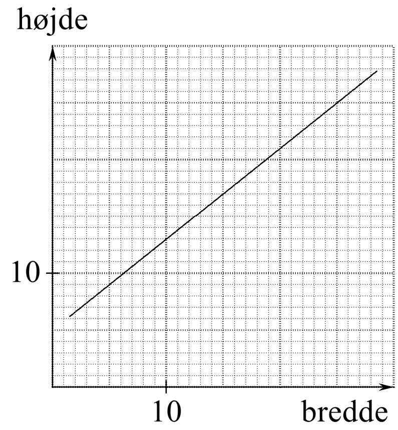
(f) Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder større.

(g) Grafens hældningskoefficient er _____ .

(h) Højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.

Øvelse 6

Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



(a) Når vi ændrer bredden fra 5 til 15, så bliver højden _____ enheder større.

(b) Når vi ændrer bredden fra 15 til 25, så bliver højden _____ enheder større.

(c) Når vi gør bredden 10 enheder større, så bliver højden _____ enheder større.

(d) Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder større.

(e) Grafens hældningskoefficient er _____ .

(f) Højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.

Øvelse 7

Om et rektangel gælder:

Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden 0,6 enheder større.

(a) Når vi gør bredden 10 enheder større, så bliver højden _____ enheder større.

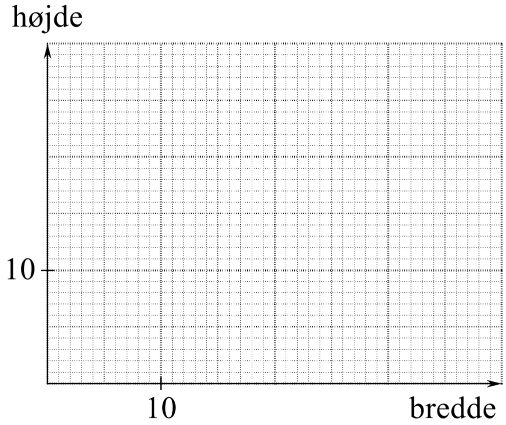
Om rektanglet gælder også:

Når bredden er 2 enheder, er højden 5 enheder.

(b) I koordinatsystemet nedenfor skal du tegne grafen der viser sammenhængen mellem bredde og højde.

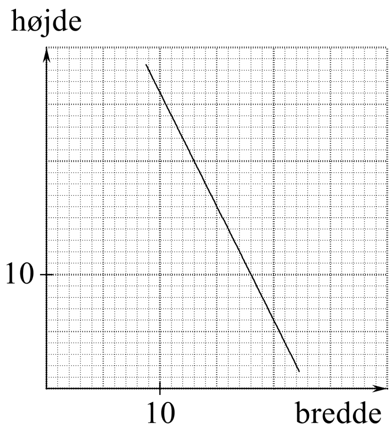
(c) Grafens hældningskoefficient er _____ .

(d) Højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.



Øvelse 8

Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



(a) Når vi ændrer bredden fra 11 til 12 enheder, så bliver højden _____ enheder mindre.

(b) Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder mindre.

(c) Grafens hældningskoefficient er _____ .

Tangent

Teori 9 Tangent.

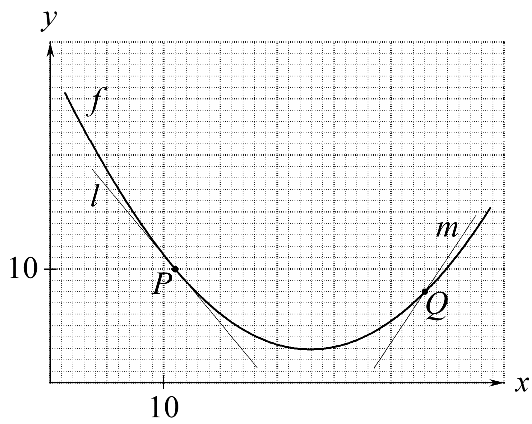
På figuren er P et punkt på f-grafen, og l er en ret linje.

Der gælder

l er tangenten til grafen i P

da

l er den rette linje gennem P der bedst følger grafen nær P.



Bemærkninger:

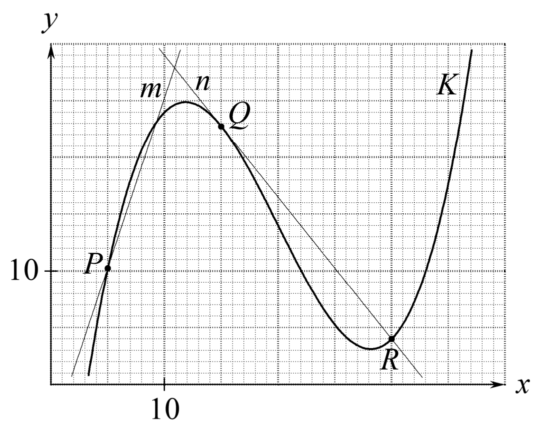
m er ikke tangenten til grafen i Q.

Tangenten i Q er den linje gennem Q der bedst følger grafen nær Q. Denne linje er ikke tegnet på figuren.

I ethvert punkt på den viste graf kan vi tegne en tangent.

Øvelse 10

På figuren nedenfor viser K-grafen hvordan en størrelse y ændres når vi ændrer en størrelse x.



Brug oplysningerne i Teori 9 til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

(a) Er linjen n tangent til K-grafen i punktet R? Svar: _______ .

(b) Er linjen n tangent til K-grafen i punktet Q? Svar: _______ .

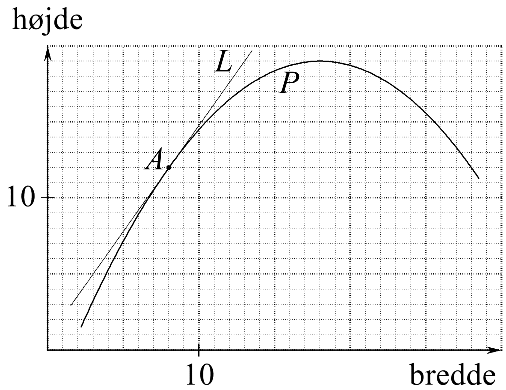
(c) Er linjen m tangent til K-grafen i punktet P? Svar: _______ .

Krum graf

Øvelse 11

På figuren nedenfor viser den ene graf sammenhængen mellem bredde og højde for et rektangel L, og den anden graf viser sammenhængen mellem bredde og højde for et andet rektangel P.

L-grafen er tangent til P-grafen i punktet A.



(a) Når vi ændrer bredden i L-rektanglet fra 8 til 13, så bliver højden _____ enheder større.

(b) Når vi gør L-rektanglets bredde 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder større.

(c) For L-rektanglet gælder at højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.

(d) **De to grafer er næsten ens nær punktet A, så de to rektanglers højder vokser på ca. samme måde når bredden er ca. _____ .**

(e) For P-rektanglet gælder at når bredden er 8, så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.

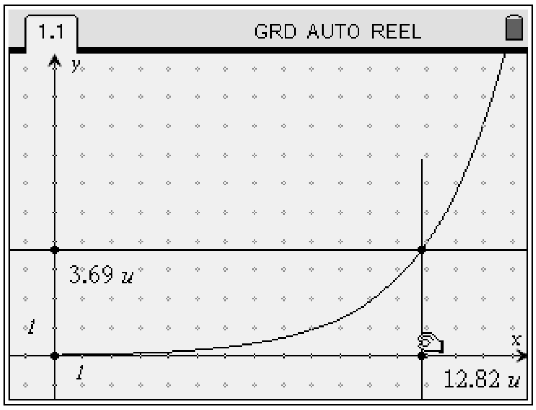
(f) Når P-rektanglets bredde er 8, så er dets højde _____ .

Brug svarene på (e) og (f) til at udregne svaret på (g):

(g) Når P-rektanglets bredde er 8,2, så er dets højde ca. _____ .

Øvelse 12

Åbn dokumentet diff-oplaeg-oev12 .
Skærmbilledet ser ud som vist nedenfor.



x-punktet viser en x-værdi (på figuren 12,82) og y-punktet viser den tilhørende værdi af y (på figuren 3.69).

(a) Træk x-punktet med konstant fart fra venstre side af skærmen til højre side af skærmen. Hvordan ændres y-punktets hastighed? Svar: ____________________

____

(b) y vokser med ca. samme hastighed som x når x er ca. _____ (helt tal).

(c) y vokser ca. halvt så hurtigt som x når x er ca. _____ (helt tal).

(d) y vokser ca. dobbelt så hurtigt som x når x er ca. _____ (helt tal).

Teori 13 Tangenthældning og hastighed.

Hvis

en graf viser hvordan en størrelse y ændres når vi ændrer en størrelse x, og

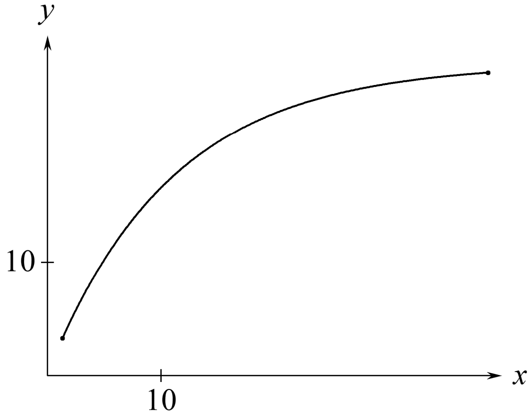
tangenthældningen er t i grafpunktet med førstekoordinat p (hvor p og t står for bestemte tal)

så gælder:

y vokser t gange så hurtigt som x når x er p.

Øvelse 14

Nedenfor er vist en graf der overalt krummer samme vej. Grafen viser hvordan længden y af et linjestykke ændres når vi gør længden x af et andet linjestykke større.



Oplysningen i Teori 13 skal bruges i nogle af spørgsmålene.

Tangenthældningen er 0,4 i grafpunktet med førstekoordinat 20.

(a) y vokser _______ gange så hurtigt som x når x er 20.

(b) Er tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat 21 større end eller mindre end tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat 20. Svar: ____________ .

(c) Bliver y altid større når vi gør x større? Svar: _______ .

(d) Hvis vi lader x vokse med konstant fart, vil y så vokse med konstant fart, vokse langsommere og langsommere, eller vokse hurtigere og hurtigere?
Svar: ______________________________
________________________________ .

Øvelse 15

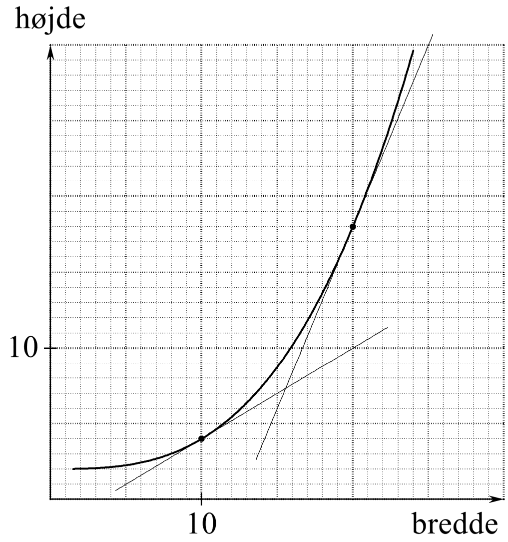
Den krumme graf nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.

(a) I punktet med førstekoordinat 10 er tangenthældningen _____ .

(b) I punktet med førstekoordinat 20 er tangenthældningen _____ .

(c) Når bredden er 10, er højden _____ .

(d) Når bredden er 10, så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.



(e) Når bredden er 20, er højden _____ .

(f) Når bredden er 20, så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.

Brug svarene på (c)-(f) til at udregne svarene på (g) og (h):

(g) Når bredden er 10,1, så er højden ca. __________ .

(h) Når bredden er 19,8 , så er højden ca. __________ .

Tangent på Nspire's grafskærm

Øvelse 16

I denne opgave skal du frembringe et skærmbillede på Nspire og derefter bruge dette skærmbillede til at løse nogle opgaver.

På en skærm er et rektangel. Vi kan ændre dets bredde x til ethvert tal i intervallet $0 < x \leq 5$.

Rektanglets højde beregner computeren ved at udføre følgende kommandoer:

A: Gang bredde med sig selv.
B: Gang A-resultat med 0,1 .
C: Læg 0,3 til B-resultat.

(a) Udtryk højden ved x :

Højde = ___________________

Nu skal du frembringe skærmbilledet på følgende måde:

Først skal du begynde helt forfra:
Tast og vælg 6:Nyt dokument.

Så skal du danne et koordinatsystem:
Vælg 2:Tilføj Grafer og Geometri.

Indstil koordinatsystemet:
Tast menu og vælg 4:Vindue 1:Dialogboks .
Sæt XMin=-0.5 XMax=5.5 X-skala=1 YMin=-0.5 YMax=3.5 Y-skala=1 .

Flyt mellem felter med tab eller CAPS tab . Afslut med enter enter eller enter .

Tast funktionen:
Slet $f1(x) =$ og skriv

$$h(x) = 0.1 \cdot x^2 + 0.3 \mid 0 < x \le 5$$

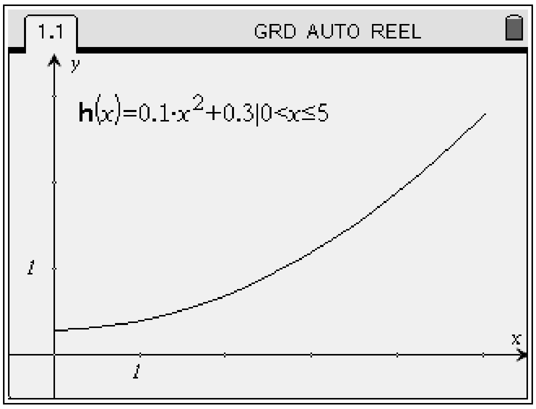
(ctrl <)

Tast enter .

Fjern indtastningslinjen:
Tast menu og vælg 2:Vis 6:Skjul indtastningslinje .

Du kan flytte forskriften sådan: Flyt markør til forskrift, hold nede til hånd lukker, flyt ved at trykke flere gange på ringen rundt om . Tast esc .

Nu skal skærmen se sådan ud:



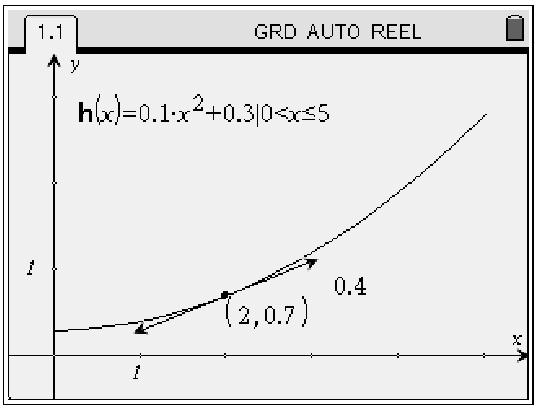
Afsæt et punkt på grafen:
Tast menu og vælg 6:Punkter og linjer 2:Punkt på .
Flyt markør til graf så der står punkt på .
Tast esc .

Få tegnet tangenten i punktet:
Tast menu 6:Punkter og linjer 7:Tangentlinje
Flyt markøren til det punkt du lige har afsat, så der står punkt . ADVARSEL: Der må IKKE stå punkt på . Tast esc .

Få beregnet tangenthældningen:
Tast menu og vælg 7:Målinger 3:Hældning

Flyt markør til den ene ende af tangent (for at undgå at hældning skrives oven i koordinater) så tangent blinker. Tast esc .

Ret punktets førstekoordinat til 2:
Flyt markør til førstekoordinat.
Tast . Slet tallet med clear , tast 2 og afslut med enter .
Nu skal skærmen se sådan ud:



På dette skærmbillede ser vi:

Når bredden er 2 , er højden 0,7 .

Når bredden er 2 , vokser højden 0,4 gange så hurtigt som bredden.

Du skal finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser nedenfor, ved at ændre førstekoordinaten til det punkt du har afsat på grafen:

(b) Når bredden er 2,01 , så er højden __________ .

(c) Når bredden ændres fra 2 til 2,01 , så bliver højden __________ enheder større.

(d) Når bredden er 2,5 , er højden __________ .

(e) Når bredden er 2,5 , så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.

(f) Når bredden er 2,51 , så er højden __________ .

(g) Når vi ændrer bredden fra 2,5 til 2,51 , så bliver højden __________ enheder større.

(h) Gem dokumentet med filnavnet

diff-oplaeg-oev16.

For at gøre dette skal du

taste ctrl
vælge 1:Filer 3:Gem
taste filnavnet
taste enter

Væksthastighed

Teori 17 Væksthastighed.

Når tallene på x-aksen er tidspunkter, så bruger vi ikke et udtryk som

"y vokser 3 gange så hurtigt som x".

I stedet udtrykker vi dette ved at sige

"væksthastigheden er 3".

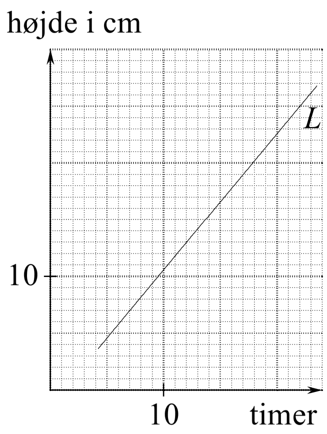
Altså er

Væksthastighed = tangenthældning.

Øvelse 18

På en skærm er der et rektangel L som ændrer højde, og et ur.

Grafen nedenfor viser hvordan højden ændres.



(a) Kl. 7 er højden _____ cm.

(b) Kl. 12 er højden _____ cm.

(c) I tidsrummet fra 7 til 12 bliver rektanglet _____ cm højere.

(d) I tidsrummet fra 12 til 17 bliver rektanglet _____ cm højere.

(e) På 5 timer bliver rektanglet _____ cm højere.

(f) På 1 time bliver rektanglet _____ cm højere.

(g) På 0,1 time bliver rektanglet _____ cm højere.

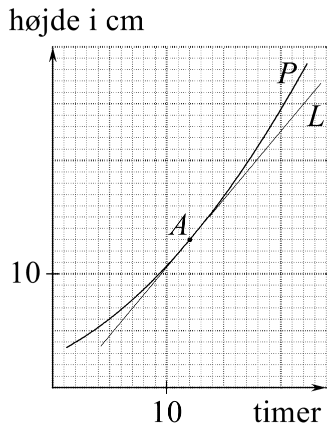
(h) På ethvert tidspunkt er højdens væksthastighed _____ cm pr. time

Øvelse 19

På figuren nedenfor viser P-grafen hvordan højden af et rektangel vokser.

L-grafen viser hvordan rektanglet fra øvelse 18 vokser.

L-grafen er tangent til P-grafen i punktet A.



(a) **De to grafer er næsten ens nær punktet A, så de to rektanglers højder vokser på ca. samme måde når klokken er ca. _____ .**

(b) Kl. 12 er P-rektanglets højde _____ cm.

(c) Kl. 12 er P-rektanglets væksthastighed _____ cm pr. time.

Øvelse 20

Fra kl. 1 til kl. 11 vokser arealet af en figur. Det er oplyst at

$$y = 6 - 10 \cdot 0.5^x$$

hvor y er arealet, og x er tiden (i timer).

(a) Lav for denne forskrift et Nspire-skærmbillede af den type som du brugte til at finde svarene på (b)-(g) i øvelse 16.

(b) Kl. 2 er arealet __________ .

(c) Kl. 2 er arealets væksthastighed __________ .

(d) Kl. 4 er arealet __________ .

(e) Kl. 4 er arealets væksthastighed __________ .

(f) Kl. 8 er arealet __________ .

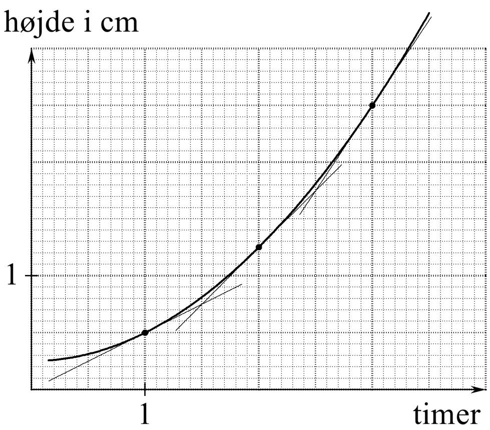
(g) Kl. 8 er arealets væksthastighed __________ .

(h) Gem dokumentet med filnavnet *diff-oplaeg-oev20.*

Forskrift for tangenthældning

Øvelse 21

Den krumme graf nedenfor viser hvordan højden af et rektangel vokser.



(a) På figuren kan vi aflæse væksthastigheder. Udfyld den tomme plads i følgende tabel:

x (timer):	1	2	3
Væksthastighed:		1	1,5

(b) Gæt ud fra tabellen en simpel metode til at udregne væksthastigheden når tidspunktet x er kendt. Skriv metoden som en formel:

Væksthastighed = __________ .

Brug formlen fra (b) til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

(c) Kl. 4 er væksthastigheden _____ .

(d) Kl. _____ er væksthastigheden 3,5 enheder pr. time

(e) I grafpunktet med førstekoordinat 4 er tangenthældningen _____ .

(f) I grafpunktet med førstekoordinat _____ er tangenthældningen 5.

Øvelse 22

På en graf er aflæst følgende tangenthældninger:

x:	1	2	3	4
Tangenthældning:	4	5	6	7

(a) Gæt ud fra tabellen en simpel metode til at udregne tangenthældningen i et grafpunkt hvis førstekoordinat x er kendt. Skriv metoden som en formel:

Tangenthældning = __________ .

Brug formlen fra (a) til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

(b) I grafpunktet med førstekoordinat 1,8 er tangenthældningen _____ .

(c) I grafpunktet med førstekoordinat _____ er tangenthældningen 9,5.

Øvelse 23

På en graf er aflæst følgende punkter (x, y) og tangenthældninger:

x:	1	2	3	4
y:	1	4	9	16
Tangenthældning:	2	4	6	8

(a) Gæt formler ud fra tabellen:

$y =$ __________ .

Tangenthældning = __________ .

Brug formlerne fra (a) til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

(b) Grafpunktet med førstekoordinat 1,5 har andenkoordinat __________ .

(c) I grafpunktet med førstekoordinat 1,5 er tangenthældningen __________ .

(d) I grafpunktet med førstekoordinat __________ er tangenthældningen 36 .

(e) Grafpunktet med positiv førstekoordinat __________ har andenkoordinat 36 .

Øvelse 24

For en graf kan følgende formler bruges til at beregne andenkoordinat y og tangenthældning for et punkt hvis førstekoordinat x er kendt:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\text{Tangenthældning} = -\frac{1}{x^2} \ .$$

(a) Grafpunktet med førstekoordinat 2 har andenkoordinat __________ .

(b) I grafpunktet med førstekoordinat 2 er tangenthældningen __________ .

(c) I grafpunktet med positiv førstekoordinat __________ er tangenthældningen -4 .

(d) Grafpunktet med førstekoordinat __________ har andenkoordinat 0,4 .

Differentialkvotient

Teori 25 Differentialkvotient.

En funktions differentialkvotient er en ny funktion som blandt andet kan bruges til at beregne tangenthældning og væksthastighed.

Vi kan få Nspire til at finde differentialkvotienten. Begynd på et nyt dokument (⌂ 6) og vælg 1:Tilføj Grafregner .

Vi vil finde differentialkvotienten af

$$y = \frac{1}{x} \ .$$

Tast (menu) og vælg 4:Calculus 1:Differentialkvotient. Så fremkommer symbolet:

$$\frac{d}{d\square}(\square)$$

Skriv x i første felt, skriv forskriften i andet felt, og tast (enter) :

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$	$\frac{-1}{x^2}$

Her står at funktionen

$$y = \frac{1}{x}$$

har differentialkvotienten

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

Symbolet y' læses "y-mærke" og betyder differentialkvotienten af y .

Øvelse 26

Funktionen

$$y = \frac{x}{1-x}$$

har differentialkvotienten

$$y' = \underline{\qquad\qquad} \ .$$

Funktionen

$$y = \ln(x^2+1)$$

har differentialkvotienten

$$y' = \underline{\qquad\qquad} \ .$$

Teori 27 Graf og tangent.

I ligningerne

(1) $y = \frac{1}{x}$

(2) $y' = -\frac{1}{x^2}$

Dette er kun et eksempel. Normalt er der en ny forskrift i hver ny opgave.

Vi har fundet forskriften for y' ved at differentiere forskriften for y på Nspire.

er

$x =$ førstekoordinat til et grafpunkt P

$y =$ andenkoordinat til P

$y' =$ tangenthældning i P

METODE: Når vi kender ét af disse tre tal kan vi sætte det ind i en af de to ligninger (1) **og** (2) **og bestemme et andet af de tre tal.**

Vi indsætter 4 for x i (2) og får y' ved at taste

$\frac{-1}{x^2}\|x=4$	$\frac{-1}{16}$

eller

$\frac{-1}{4^2}$	$\frac{-1}{16}$

Vi indsætter -4 for y' i (2) og får x ved at taste

$\text{solve}\left(-4=\frac{-1}{x^2},x\right)$	$x=\frac{-1}{2}$ or $x=\frac{1}{2}$

Øvelse 28

En funktion har forskriften

$$y = 0{,}5 \cdot 1{,}6^x \ .$$

Brug metoderne fra Teori 25 og Teori 27:

(a) $y' =$ _______________ .

(b) Når $x = 7{,}2$ er $y' =$ _______ .

(c) Når $x = 4{,}2$ er $y =$ _______ .

(d) Når $y = 5{,}0$ er $x =$ _______ .

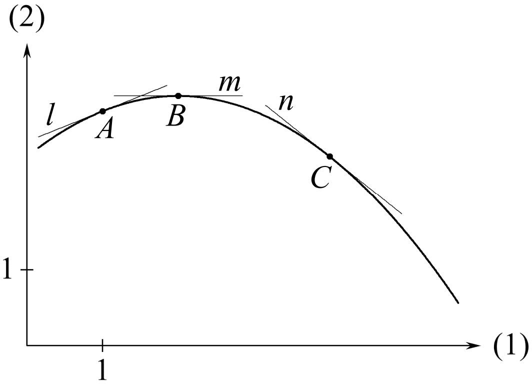
(e) Når $y' = 9{,}2$ er $x =$ _______ .

Øvelse 29

Figuren viser grafen for funktionen

$$y = -0{,}2x^2 + 0{,}8x + 2{,}5$$

samt tangenterne i grafpunkterne A, B og C.



Løs (a)-(g) på regneskærmen uden at bruge ekstremumsværktøjer. Du skal altså bruge metoderne fra Teori 25 og Teori 27.

(a) $y' =$ _____________ .

(b) Førstekoordinaten for A er 1.
I A er tangenthældningen __________ .

(c) A har andenkoordinaten __________ .

(d) I B er tangenthældningen 0.
B har førstekoordinaten __________ .

(e) B har andenkoordinaten __________ .

(f) C har andenkoordinaten 2,5.
C har førstekoordinaten __________ .

(g) I C er tangenthældningen __________ .

Teori 30 Funktion og væksthastighed.

For en plante gælder

(1) $y = 8 - 0{,}19 \cdot 0{,}9^x$

Dette er kun et eksempel. Normalt er der en ny forskrift i hver ny opgave.

og dermed

(2) $y' = 0{,}02 \cdot 0{,}9^x$

Vi har fundet forskriften for y' ved at differentiere forskriften for y på Nspire.

hvor

$x =$ antal dage efter 1. juni
$y =$ plantens højde i cm
$y' =$ højdens væksthastighed

<u>METODE:</u> Når vi kender ét af disse tre tal kan vi sætte det ind i en af de to ligninger (1) og (2) og bestemme et andet af de tre tal.

Øvelse 31

Et dyr vokser sådan at

$$y = 3{,}0 \cdot 1{,}31^x$$

hvor y er længden i mm og x er antal uger efter 1. maj.

(a) $y' =$ _______________ .

Løs (b)-(e) på regneskærmen ved at bruge metoden fra Teori 30.

(b) 8 uger efter 1. maj er længden _____ mm.

(c) 8 uger efter 1. maj er væksthastigheden _____ mm pr. uge.

(d) _____ uger efter 1. maj er længden 14 mm.

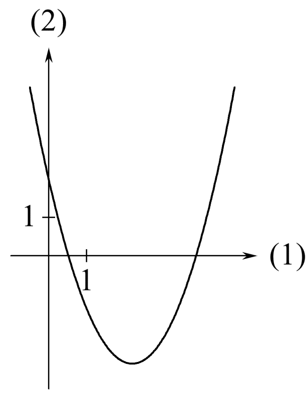
(e) _____ uger efter 1. maj er væksthastigheden 4,7 mm pr. uge.

Undersøge graf med y'

Øvelse 32

Figuren viser grafen for funktionen

$$y = x^2 - 4{,}4x + 2 \;.$$



(a) $y' =$ _______________ .

(b) I toppunktet er tangenthældningen _______.

(c) Brug svarene på (a) og (b) til at udregne toppunktets førstekoordinat:
Toppunktets førstekoordinat er _______ .

(d) Skærinspunktet med andenaksen har førstekoordinaten _______ .

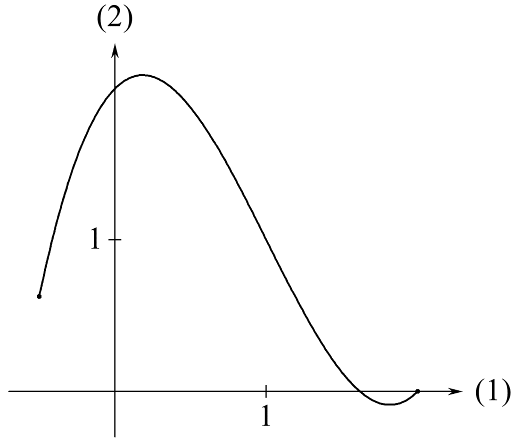
(e) Når $x = 0$, er $y' =$ _______ .

(f) I skæringspunktet med andenaksen er tangenthældningen _______ .

Øvelse 33

Figuren viser grafen for funktionen

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 2 \quad , \qquad -\tfrac{1}{2} \le x \le 2 \ .$$



A er det grafpunkt hvis andenkoordinat er funktionens minimum.

B er det grafpunkt hvis andenkoordinat er funktionens maksimum.

(a) Angiv på figuren punkterne A og B.

(b) I A er tangenthældningen __________ .

(c) I B er tangenthældningen __________ .

Løs (d)-(g) på regneskærmen uden brug af ekstremumsværktøjer.

(d) A har førstekoordinaten __________ .

(e) B har førstekoordinten __________ .

(f) Funktionens maksimum er __________ .

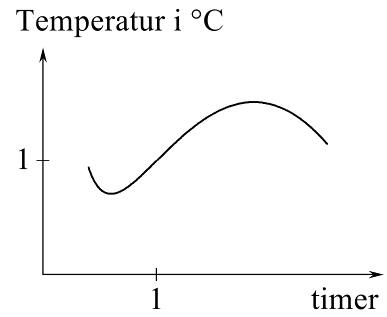
(g) Funktionens minimum er __________ .

Øvelse 34

Temperaturen i en beholder ændres sådan at

$$y = -x^2 + 4x + \frac{1}{x} - 3 \quad , \quad 0{,}4 \le x \le 2{,}5$$

hvor y er temperaturen målt i °C, og x er tiden målt i timer. Figuren viser grafen for denne sammenhæng.



(a) På det tidspunkt hvor temperaturen er højest, er $y' =$ _______ .

Løs (b)-(d) på regneskærmen uden brug af ekstremumsværktøjer.

(b) Temperaturen er højest på tidspunktet _______ timer.

(c) Den højeste temperatur er _______ °C.

(d) Den laveste temperatur er _______ °C.

Øvelse 35

En linje l har hældningskoefficienten 3 og går gennem punktet $P(2,1)$.

(a) l har ligningen ____________________ .

Linjen m er tangent i punktet Q til grafen for funktionen $y = \sqrt{2x-1}$.

Q har førstekoordinaten 5.

Løs (b)-(d) på regneskærmen uden at bruge tangentværktøj.

(b) Q har andenkoordinaten _______ .

(c) m har hældningskoefficienten _______ .

(d) m har ligningen ____________________ .

Øvelse 36

Linjen n er tangent i punktet R til grafen for funktionen $y = \sqrt{2x-1}$.

n har hældningskoefficienten $\frac{1}{4}$.

Løs (a)-(c) på regneskærmen uden at bruge tangentværktøj.

(a) R har førstekoordinaten _______ .

(b) R har andenkoordinaten _______ .

(c) n har ligningen ____________________ .

Hvad fortæller y'?

Øvelse 37

En population vokser sådan at

$$y = \frac{150}{1+24 \cdot e^{-0,13 \cdot x}}$$

hvor y er antallet af individer, og x er antal døgn efter 15. maj.

(a) 10 døgn efter 15. maj er antallet af individer _______ .

(b) 10 døgn efter 15. maj er væksthastigheden _______ individer pr. døgn.

(c) Når $x = 30$ er $y' =$ _______ .

(d) Når $x = 30$ er $y =$ _______ .

(e) Hvad fortæller facit i (c) om populationen? Svar: ________________

____

____

(f) Hvad fortæller facit i (d) om populationen? Svar: ________________

____

____

Øvelse 38

Temperaturen af en klods aftager sådan at

$$y = 28 \cdot 0,968^x - 7$$

hvor y er temperaturen i °C, og x er antal minutter efter kl. 2.

(a) 5 minutter efter kl. 2 aftager temperaturen med hastigheden _______ °C pr. minut.

(b) 5 minutter efter kl. 2 er temperaturen _______ °C.

(c) Når $x = 60$ er $y =$ _______ .

(d) Når $x = 60$ er $y' =$ _______ .

(e) Hvad fortæller facit i (c) om temperaturen? Svar: ________________

____

____

(f) Hvad fortæller facit i (d) om temperaturen? Svar: ________________

____

____

Øvelse 39

Et dyr løber i visse situationer sådan at

$$y = 9x - x \cdot 1,01^x + 11 \ , \quad 2 \le x \le 50$$

hvor y er hvor langt dyret har løbet (målt i meter), og x er hvor lang tid dyret har løbet (målt i sekunder)

(a) Når dyret har løbet i 3 sekunder, er farten _______ meter pr. sekund.

(b) Når dyret har løbet i 3 sekunder, har det løbet _______ meter.

(c) Når $x = 40$, er $y =$ _______ .

(d) Når $x = 40$, er $y' =$ _______ .

(e) Hvad fortæller facit i (c) om dyret?
Svar: ______________________________

____

____

(f) Hvad fortæller facit i (d) om dyret?
Svar: ______________________________

____

____

Øvelse 40

Et bestemt træ vil under passende omstændigheder vokse sådan at

$$y = \frac{x}{0,95 - 0,085x}$$

hvor y er højden i meter, og x er diameteren i meter.

(a) Når diameteren er 5 meter, er højden _______ meter.

(b) Når diameteren er 5 meter, vokser højden _______ gange så hurtigt som diameteren.

(c) Når $x = 7,5$ er $y =$ _______ .

(d) Når $x = 7,5$ er $y' =$ _______ .

(e) Hvad fortæller facit i (c) om træet? Svar:

____

____

____

(f) Hvad fortæller facit i (d) om træet? Svar:

____

____

____

Øvelse 41

For en plante gælder at

$$y = 100 - \frac{100}{x}$$

hvor y er prisen i kr. og x er højden i meter.

(a) Når højden (målt i meter) er 2, skal man gange en lille stigning i højden med _______ for at få den tilsvarende stigning i prisen (målt i kr.).

(b) Når $x = 4$ er $y' =$ _______ .

(c) Hvad fortæller facit i (b) om prisen?
Svar: ______________________________

____

____

____

____

Skrivemåderne $f(x)$ og $f'(x)$

Teori 42 Skrivemåderne $f(x)$ og $f'(x)$.

Når p , q og r er tal, gælder om grafen for en funktion f :

$f(p)$ er	andenkoordinaten til grafpunktet med førstekoordinat p
$f(p) = q$	betyder: q er andenkoordinaten til grafpunktet med førstekoordinat p .
$f'(p)$ er	tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat p
$f'(p) = r$	betyder: r er tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat p .

Øvelse 43

Brug oplysningerne i Teori 42:

(a) Om en funktion g gælder at

$$g(3) = 1{,}5 \; .$$

Hvad fortæller dette om grafen for g ?
Svar: ______________________________

____

____

(b) Om funktionen g gælder også at

$$g'(3) = 2 \; .$$

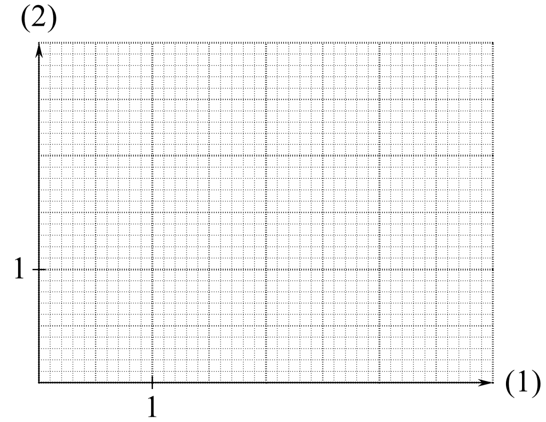
Hvad fortæller dette om grafen for g ?
Svar: ______________________________

____

____

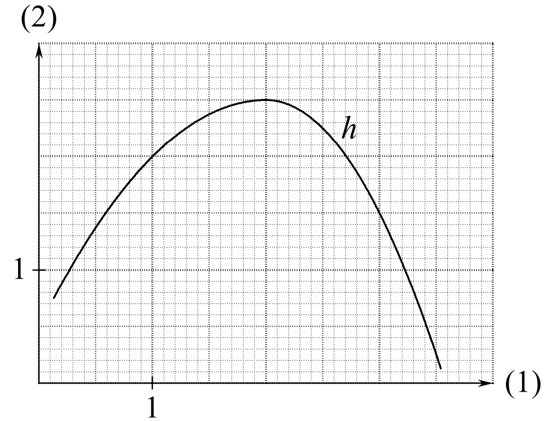
(c) I koordinatsystemet nedenfor skal du tegne grafen for en funktion g sådan at hele grafen er krum, og så der gælder

$$g(1{,}8) = 0{,}5 \; , \; g(3) = 1{,}5 \text{ og } g'(3) = 2 \; .$$



Øvelse 44

Figuren viser grafen for en funktion h .



Brug oplysningerne i Teori 42:

(a) $h(1) =$ _______ $h'(1) =$ _______ .

(b) $h(2) =$ _______ $h'(2) =$ _______ .

(c) Når $h'(x) = -2$, er $x =$ _______ .

(d) Når $h(x) = 2$,
er $x =$ _______ eller $x =$ _______ .

Øvelse 45

En funktion f har forskriften

$$f(x) = x^2 + 2 \ .$$

(a) $f'(x) =$ __________ .

(b) Når $x = 3$ er $x^2 + 2 =$ _______ .

(c) Når $x = 3$ er $f(x) =$ _______ .

(d) $f(3) =$ _______ .

(e) Når $x = 3$ er $2x =$ _______ .

(f) Når $x = 3$ er $f'(x) =$ _______ .

(g) $f'(3) =$ _______ .

Brug oplysningerne i Teori 42:

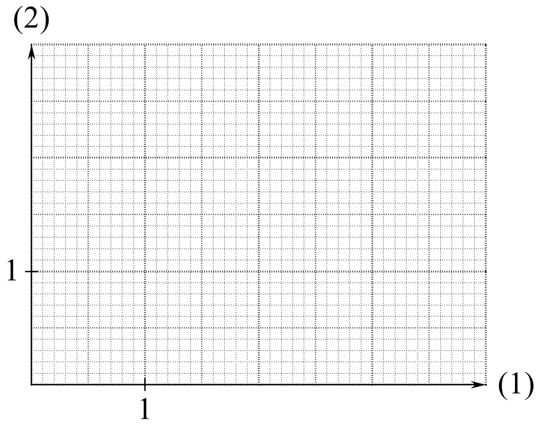
(h) Hvad fortæller facit i (d) om grafen?
Svar: ______________________________
____
____

(i) Hvad fortæller facit i (g) om grafen?
Svar: ______________________________
____
____

Øvelse 46

Tegn en simpel krum graf for en funktion f sådan at der både gælder

$$f(2) < f(3) \quad \text{og} \quad f'(2) > f'(3) \ .$$



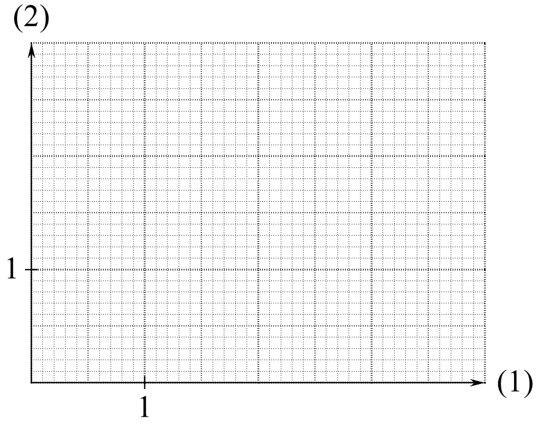
Øvelse 47

Tegn en simpel krum graf for en funktion g sådan at der både gælder

$g(2)$ er 1,5 enheder større end $g(1)$

og

$g'(2)$ er større end $g'(1)$.



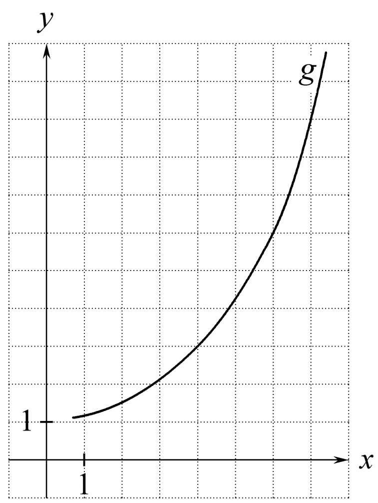
Øvelse 48

Om en funktion f er oplyst at

$$f(4) = 6 \quad \text{og} \quad f'(4) = 2 \ .$$

(a) Hvad fortæller dette om grafen for f ?
Svar: ______________________________
____
____
____
____

Figuren viser grafen for en funktion g .



(b) $g(4) =$ _______ og $g'(4) =$ _______ .

(c) Når $g(x) = 9$, er $x =$ _______ .

(d) Når $g'(x) = 2$, er $x =$ _______ .

En funktion h har forskriften $h(x) = x^3$.

(e) Et punkt P på h-grafen har førstekoordinat 4.
P har andenkoordinat _______ .
I P er tangenthældningen _______ .

Opgaven fortsætter på næste side!

(f) I et punkt Q på h-grafen er tangenthældningen 2. Q har førstekoordinat __________ eller __________ .

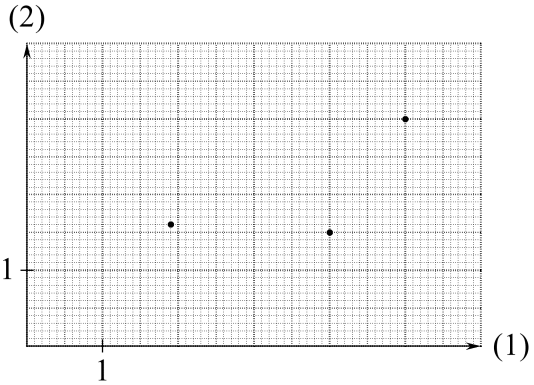
(g) Et punkt R på h-grafen har andenkoordinat 6.

R har førstekoordinat __________ .

Vokse og aftage

Øvelse 49

Figuren viser tre punkter på grafen for en funktion f .



$$f(x) = \text{hemmelig forskrift}$$
$$f'(x) = x-3$$

(a) For hvert af de tre punkter skal du udregne tangentens hældningskoefficient og tegne tangenten.
Hældninger: ________________________

(b) Bemærk at det ikke kun er for x-værdierne 1,9 , 4 og 5 at du kan udregne tangenthældningen. Du kan udregne tangenthældningen for enhver x-værdi.

Tangenthældningen er negativ når

$x <$ _______ .

Tangenthældningen er positiv når

$x >$ _______ .

Øvelse 50

For en funktion g gælder:

$$g(x) = \text{hemmelig forskrift}$$
$$g'(x) = x^2-4$$

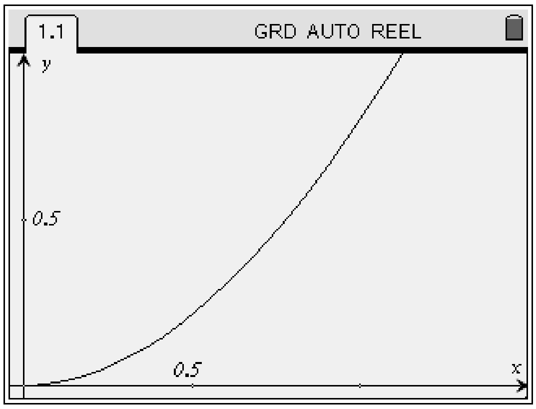
(a) I det punkt på g-grafen hvis x-koordinat er 0, er tangenthældningen _______ .

(b) De punkter på g-grafen hvori tangenthældningen er 0, har x-koordinaterne _______ og _______ .

(c) Er g aftagende mellem disse to tal?
Svar: _______ .

Øvelse 51

Figuren viser <u>en del af</u> grafen for en funktion f .

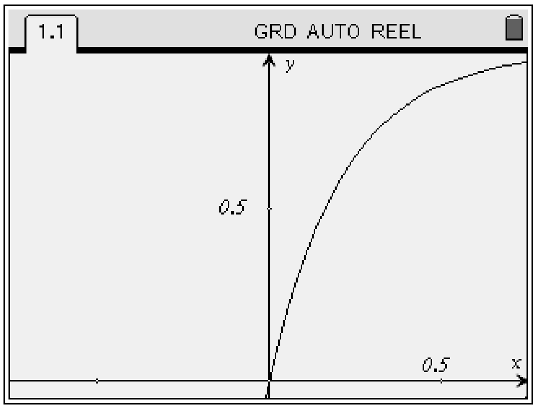


$$f(x) = \text{hemmelig forskrift}$$
$$f'(x) = \tfrac{3}{10}x\cdot(6-x)$$

(a) Er f voksende i hele intervallet $x > 0$?
Svar: _______ .

Øvelse 52

Figuren viser <u>en del af</u> grafen for en funktion f .

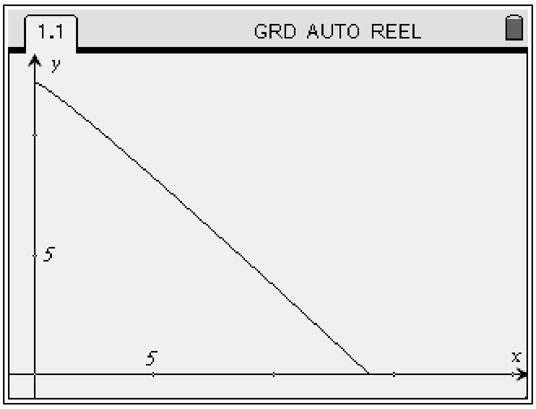


$$f(x) = \text{hemmelig forskrift}$$
$$f'(x) = \frac{4{,}4}{100^x}$$

(a) Er f voksende?
Svar: _______ .

Øvelse 53

Figuren viser hele grafen for en funktion f .



$f(x) \;=\;$ hemmelig forskrift , $\quad 0 < x < 14$

$$f'(x) \;=\; \frac{\frac{1}{4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \;, \quad 0 < x < 14 \;.$$

(a) Er f voksende noget sted?
Svar: _______ .

Teori 54

En funktion er voksende i et x-interval
hvis der for alle x-værdier i dette interval gælder:

Jo større x er, jo større er $f(x)$.

Hvis vi skal vise at f ikke er voksende,
så skal vi altså finde to x-værdier hvor den største af dem ikke har den største funktionsværdi.

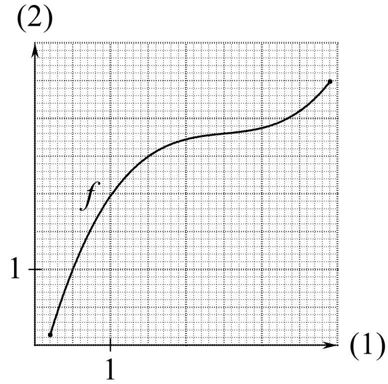
En funktion er aftagende i et x-interval
hvis der for alle x-værdier i dette interval gælder:

Jo større x er, jo mindre er $f(x)$.

Hvis vi skal vise at f ikke er aftagende,
så skal vi altså finde to x-værdier hvor den største af dem ikke har den mindste funktionsværdi.

Øvelse 55

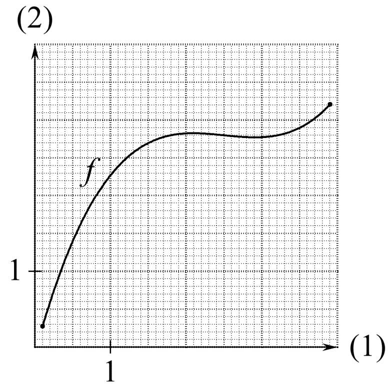
Figuren viser grafen for en funktion f .



(a) Skriv at f er voksende, eller skriv to x-værdier hvor den største ikke har den største funktionsværdi.
Svar: ____________________________ .

Øvelse 56

Figuren viser grafen for en funktion f .



(a) Skriv at f er voksende, eller skriv to x-værdier hvor den største ikke har den største funktionsværdi.
Svar: ____________________________ .

Øvelse 57

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2 - x^{1{,}3} + 1{,}1^x \quad , \quad x > 0 \;.$$

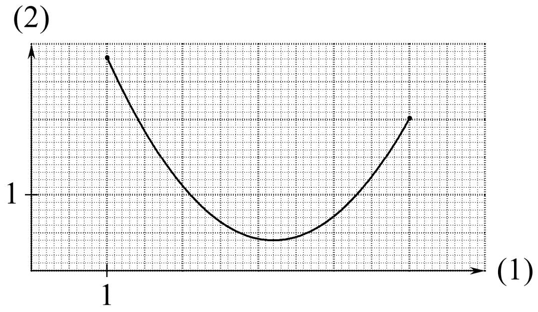
(a) Skriv at f er aftagende, eller skriv to x-værdier hvor den største ikke har den mindste funktionsværdi.
Svar: ____________________________ .

Øvelse 58

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 3{,}2x + 5{,}52 \ , \ 1 \le x \le 5 \ .$$

(a) $f'(x) =$ ______________________________ .



(b) Af forskriften får vi $f(3{,}1) =$ ________ .

(c) Når $f'(x) = 0$, er $x =$ ________ .

(d) Skriv at f er aftagende i intervallet $1 \le x \le 3{,}2$, eller angiv to tal i intervallet hvor det største af dem ikke har den mindste funktionsværdi:

______________________________________ .

(e) Skriv at f er voksende i intervallet $3{,}2 \le x \le 5$, eller angiv to tal i intervallet hvor det største af dem ikke har den største funktionsværdi:

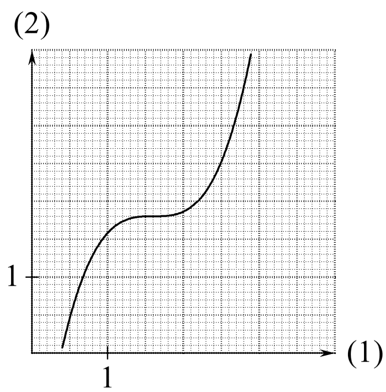
______________________________________ .

Øvelse 59

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = (x - 1{,}6)^3 + 1{,}8$$

(a) $f'(x) =$ ______________________________ .



(b) Af forskriften får vi $f(1{,}5) =$ _________ .

(c) Af forskriften får vi $f(1{,}6) =$ _________ .

(d) Når $f'(x) = 0$, er $x =$ ________ .

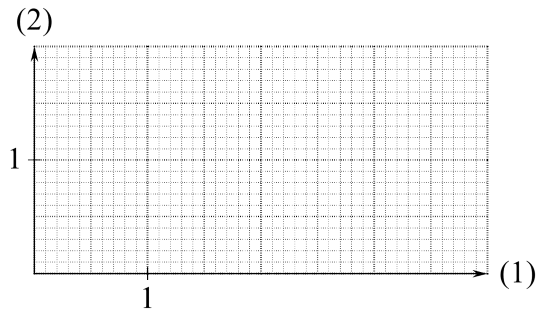
(e) Skriv at f er voksende, eller angiv to x-værdier hvor den største af dem ikke har den største funktionsværdi:

______________________________________ .

Øvelse 60

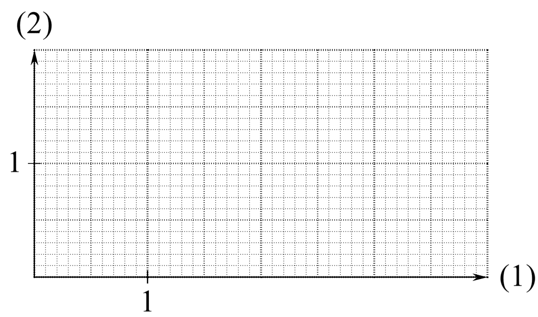
(a) Tegn grafen for en funktion f så

$f(x)$ er voksende, og
$f'(x)$ er aftagende.



(b) Tegn grafen for en funktion g så

$g(x)$ er aftagende, og
$g'(x)$ er aftagende.



(c) Tegn grafen for en funktion h der opfylder følgende fire betingelser:

$h(x)$ er aftagende i intervallet $x \le 2$
$h(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x$
$h'(x)$ er voksende i intervallet $x \le 3$
$h'(x)$ er aftagende i intervallet $3 \le x$.