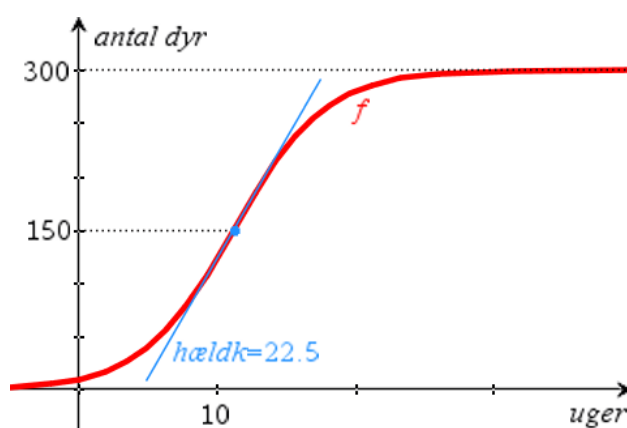


Differential- ligninger

for A-niveau i stx, udgave 4



Skærbillede fra TI-Nspire

2017 Karsten Juul

Differentialligninger for A-niveau i stx, udgave 4

1. Hvad er en differentialligning?

1a. Indledning til differentialligninger.....	1
1b. Oplæg.....	1
1c. Sprogbrug.....	1
1d. Mange løsninger.....	1
1e. Skrivemåder.....	1
1f. Hvad er en differentialligning?.....	1

2. Kontrol af løsning til differentialligning

2a. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 1.....	2
2b. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 2.....	2

3. Bruge oplysningen i differentialligning

3a. Bestem ligning for tangent når differentialligning er givet.....	3
3b. Eksempel på brug af oplysningen i differentialligningen.....	3
3c. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 1.....	4
3d. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 2.....	4

4. Bestemme løsning til differentialligning

4a. Bestem <u>løsningerne</u> til en differentialligning.....	5
4b. Opgave og besvarelse.....	5
4c. De enkelte løsninger.....	5
4d. Bestem en løsning til en differentialligning når én funktionsværdi (ét grafpunkt) er givet.....	5
4e. Løs differentialligning når to grafpunkter er givet.....	6
4f. Måske skal du selv indse at du skal løse differentialligningen.....	6

5. Opstille differentialligning

5a. Opgave med besvarelse.....	6
--------------------------------	---

6. Logistisk differentialligning

6a. Eksponentiel vækst.....	7
6b. Logistisk vækst.....	7
6c. Bestem forskrift for størrelsen.....	8
6d. Bestem øvre grænse for størrelsen.....	8
6e. Bestem størrelsen når væksthastigheden er størst.....	8
6f. Bestem tidspunkt hvor væksthastigheden er størst.....	9
6g. Tegn graf.....	9

7. Beviser

7a. Hjælpesætning.....	10
7b. Sætning.....	10

Tidligere versioner af dette hæfte har skiftet adresse til

http://mat1.dk/differentialligninger_for_a_niveau_i_stx_udgave_1.pdf

http://mat1.dk/differentialligninger_for_a_niveau_i_stx_udgave_2.pdf

http://mat1.dk/differentialligninger_for_a_niveau_i_stx_udgave_3.pdf

1. Hvad er en differentiaalligning?

1a. Indledning til differentiaalligninger.

1b. Oplæg

En plantes højde y vokser sådan at der på ethvert tidspunkt t gælder at

$$\text{højdes væksthastighed} = \text{højde}$$

Dette kan vi skrive med symboler sådan:

$$y' = y \quad \leftarrow \text{Her har vi opstillet en differentiaalligning.}$$

Vi kan også udtrykke dette ved at sige at i hvert punkt på grafen er

$$\text{tangenthældning} = y\text{-koordinat}$$

Ligningen $y' = y$ er et eksempel på en differentiaalligning. De fleste differentiaalligninger er mere indviklede.

1c. Sprogbrug

For funktionen $f(x) = 4e^x$ gælder at $f'(x) = 4e^x$, så

$$f(x) \text{ opfylder betingelsen } y' = y \text{ for hvert } x.$$

Dette udtrykker vi ved at sige at

$$f(x) \text{ er en } \text{løsning} \text{ til differentiaalligningen}$$

eller at

$$f(x) \text{ tilfredsstiller differentiaalligningen}$$

1d. Mange løsninger

Vi ser at funktionen $f(x) = -e^x$ også er en løsning.

Vi ser at differentiaalligningen har mange løsninger.

1e. Skrivemåder

Symbolet $\frac{dy}{dx}$ betyder det samme som y' .

Differentiaalligningen

$$y' = y$$

kan også skrives sådan:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

eller sådan:

$$f'(x) = f(x).$$

1f. Hvad er en differentiaalligning?

En ligning er en differentiaalligning hvis

den ubekendte er en funktion

og

funktionens differentialkvotient indgår

En funktion er løsning til en differentiaalligning hvis

funktionen opfylder differentiaalligningen for hvert x i funktionens definitionsmængde.

2. Kontrol af løsning til differentiallyingning

2a. Undersøg om funktion er løsning til differentiallyingning.
Gør rede for at funktion er løsning til differentiallyingning.
Eksempel 1.

Opgave

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 + x$ er en løsning til differentiallyingningen

$$y' - 2y = 1 - 2x^2 .$$

Forskriften fortæller at i hvert grafpunkt får man y -koordinat ved at opløfte x -koordinat til anden og lægge x -koordinat til resultatet.

Ligningen kræver for hvert grafpunkt at når y -koordinat gange 2 trækkes fra tangenthældning skal det give samme tal som når x -koordinat i anden gange 2 trækkes fra 1.

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 + x$ for y i $y' - 2y = 1 - 2x^2$:

$$(x^2 + x)' - 2(x^2 + x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - (2x^2 + 2x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - 2x^2 - 2x = 1 - 2x^2$$

$$1 - 2x^2 = 1 - 2x^2$$

Da dette er sandt, gælder: f er løsning til differentiallyingningen $y' - 2y = 1 - 2x^2$.

2b. Undersøg om funktion er løsning til differentiallyingning.
Gør rede for at funktion er løsning til differentiallyingning.
Eksempel 2.

Opgave

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ er en løsning til differentiallyingningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1 .$$

Forskriften fortæller at i hvert grafpunkt får man y -koordinat ved at indsætte x -koordinat i forskrift og regne ud.

Ligningen kræver for hvert grafpunkt at tangenthældning skal være det tal man får når man indsætter x -koordinat og y -koordinat i højre side og regner ud

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ for y i $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1$:

$$(x^2 \cdot \ln x + x)' = \frac{2(x^2 \cdot \ln x + x)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 1 = \frac{2x(x \cdot \ln x + 1)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2(x \cdot \ln x + 1) + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + 2 + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + x + 1$$

Da dette er sandt, gælder: f er løsning til differentiallyingningen $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1$.

3. Bruge oplysningen i differentiallyigning

3a. Bestem ligning for tangent når differentiallyigning er givet.

Opgave

En funktion f er løsning til differentiallyigningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

og grafen for f går gennem punktet $P(3, 7)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt får vi tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ når vi opløfter x -koordinaten til anden og trækker y -koordinaten fra resultatet.

Besvarelse

For en løsning til differentiallyigningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

gælder at i punktet $(x_1, y_1) = (3, 7)$ er tangenthældningen

$$a = \frac{dy}{dx} = 3^2 - 7 = 2 \quad (\text{Vi har indsat 3 og 7 for } x \text{ og } y \text{ i højre side af } \frac{dy}{dx} = x^2 - y).$$

Ligning for tangent i $P(3, 7)$:

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = 2(x - 3) + 7$$

$$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$$

3b. Eksempel på brug af oplysningen i differentiallyigningen.

Opgave

En funktion f er defineret for ethvert tal x og er løsning til differentiallyigningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{y^2 + 1}$$

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt er tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ det tal vi får ved at udregne højresiden efter at have indsat grafpunktets koordinater.

Gør rede for at f har et minimum.

Besvarelse

f er løsning til differentiallyigningen $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 1}{y^2 + 1}$, så

i ethvert punkt (x, y) på grafen for f er tangenthældningen $\frac{2x + 1}{y^2 + 1}$.

Dette tal har samme fortegn som $2x + 1$,

for $y^2 + 1$ er altid positivt da et tal i anden ikke kan være negativt.

$$2x + 1 = 0 \text{ har løsningen } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{For } x = -1 \text{ er } 2x + 1 = -1, \text{ og for } x = 0 \text{ er } 2x + 1 = 1.$$

Tangenthældningen er altså negativ for $x < -\frac{1}{2}$ og positiv for $-\frac{1}{2} < x$, så

f er aftagende i intervallet $x \leq -\frac{1}{2}$ og voksende i intervallet $-\frac{1}{2} \leq x$.

Heraf følger at f har minimum for $x = -\frac{1}{2}$.

3c. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

Udviklingen i et dyrs vægt kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + 0,028y = 16,2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 9$$

hvor t er tiden målt i uger, og y er dyrets vægt målt i gram.

Bestem væksthastigheden på det tidspunkt hvor dyrets vægt er 180 gram.

Ligningen fortæller at på ethvert tidspunkt mellem 0 og 9 gælder:
Når væksthastigheden $\frac{dy}{dt}$ lægges sammen med 0,028 gange vægten, så får man 16,2.

Besvarelse med ligningsregel

For dyrets vægt y (gram) som funktion af tiden t (uger) er $\frac{dy}{dt} + 0,028y = 16,2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 9$

Vi indsætter 180 for y i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dt} + 0,028 \cdot 180 = 16,2 \quad \text{Når vi indsætter en konstant for } y, \text{ så skal vi bevare } y \text{ i } dy.$$

$$\frac{dy}{dt} = 16,2 - 0,028 \cdot 180$$

$$\frac{dy}{dt} = 11,16$$

Når dyrets vægt er 180 gram, er væksthastigheden **11,2 gram pr. uge** .

Besvarelse med solve

For dyrets vægt y (gram) som funktion af tiden t (uger) er $\frac{dy}{dt} + 0,028y = 16,2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 9$

Vi indsætter 180 for y i differentialligningen. Når vi indsætter en konstant for y , så skal vi bevare y i dy .

Nspire løser ligningen $\frac{dy}{dt} + 0,028 \cdot 180 = 16,2$ mht. $\frac{dy}{dt}$ og får $\frac{dy}{dt} = 11,16$.

$$\text{solve}(ym+0.028 \cdot 180=16.2,ym) \rightarrow ym=11.16$$

Når dyrets vægt er 180 gram, er væksthastigheden **11,2 gram pr. uge** .

3d. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

En plantes højde er en funktion af tiden der opfylder differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 0,026 \cdot 0,93^t \cdot h$$

Ligningen fortæller at vi får væksthastigheden $\frac{dh}{dt}$ når vi udregner højre side efter at have indsat tidspunkt og højde på t 's og h 's pladser.

hvor h er højden målt i mm, og t er tidspunktet målt i døgn.

Det oplyses at $h(1) = 3$.

Bestem væksthastigheden til tidspunktet $t = 1$.

Besvarelse

For plantes højde h (mm) som funktion af tiden t (døgn) er $\frac{dh}{dt} = 0,026 \cdot 0,93^t \cdot h$.

Vi indsætter 1 for t og 3 for h i differentialligningen:

$$\frac{dh}{dt} = 0,026 \cdot (0,93)^1 \cdot 3$$

$$\frac{dh}{dt} = 0,07254$$

Til tidspunktet $t = 1$ er væksthastigheden **0,073 mm pr. døgn** .

4. Bestemme løsning til differentialligning

4a. Bestem løsningerne til en differentialligning.

4b. Opgave Bestem forskrift for løsningerne til differentialligningen $y' = y - 1,3$.

Besvarelse Nspire løser ligningen $y' = y - 1,3$ mht. funktionen y og får løsningerne $y = c \cdot e^x + 1,3$.

$\text{deSolve}(y'=y-1.3,x,y) \rightarrow y=c1 \cdot e^x + 1.3$ ← I kommandoen **deSolve** står **de** for **differential equation**.

Bemærkning I stedet for c skriver Nspire $c1$ eller $c2$ eller $c3$ osv.

4c. De enkelte løsninger

I besvarelsen ovenfor fandt vi at løsningerne til $y' = y - 1,3$ er $y = c \cdot e^x + 1,3$.

Når vi i $y = c \cdot e^x + 1,3$ erstatter c med et bestemt tal, får vi én af løsningerne.

Hvis vi ved at $y(2) = 5$, dvs. at punktet $(2, 5)$ ligger på grafen, så kan vi bestemme c .

Dette kan vi gøre med metoden fra ramme 4d, men vi kan også blot sætte 2 og 5 ind for x og y i $y = c \cdot e^x + 1,3$ og løse mht. c :

$$5 = c \cdot e^2 + 1,3 \quad \text{hvoraf} \quad c = \frac{5-1,3}{e^2} = 0,500741$$

Løsningen hvor $y(2) = 5$, er altså $y = 0,50 \cdot e^x + 1,3$. På tilsvarende måde får vi:

Løsningen hvor $y(2) = 3$, er $y = 0,23 \cdot e^x + 1,3$.

4d. Bestem en løsning til en differentialligning når én funktionsværdi (ét grafpunkt) er givet.

Opgave En funktion h er løsning til differentialligningen $\frac{dh}{dx} = 0,25(h - x)$

og grafen for h går gennem punktet $(2, 1,6)$. Bestem en forskrift for h .

Besvarelse Nspire bestemmer forskriften for den løsning til $\frac{dh}{dx} = 0,25(h - x)$ hvor $h(2) = 1,6$ og får

$$h(x) = -2,67 \cdot 1,284^x + x + 4$$

$\text{deSolve}(h'=0.25 \cdot (h-x) \text{ and } h(2)=1.6,x,h) \rightarrow h=-2.66873 \cdot (1.28403)^x + x + 4.$

I stedet kunne vi have startet med at finde alle løsninger (se 4b). Derefter kunne vi have bestemt den af løsningerne hvor $h(2)=1,6$ (se 4c).

Måske skal du selv isolere y og/eller x

Her har **deSolve** ikke isoleret y : $\text{deSolve}(y'=y^3 \text{ and } y(1)=2,x,y) \rightarrow \frac{1}{8} - \frac{1}{2 \cdot y^2} = x - 1$

Vi får **solve** til at gøre det: $\text{solve}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2 \cdot y^2} = x - 1, y\right) \rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{\frac{-1}{8 \cdot x - 9}}$ and $\frac{1}{8 \cdot x - 9} \leq 0$ or $y = -2 \cdot \sqrt{\frac{-1}{8 \cdot x - 9}}$ and $\frac{1}{8 \cdot x - 9} \leq 0$

solve har ikke isoleret x i uligheden der angiver løsningens definitionsmængde.

Vi får **solve** til at gøre det: $\text{solve}\left(\frac{1}{8 \cdot x - 9} \leq 0, x\right) \rightarrow x < \frac{9}{8}$

Differentialligningen stammer fra en opgave hvor x og y er positive, så løsningen er:

$$y = 2 \cdot \sqrt{\frac{-1}{8 \cdot x - 9}} \quad , \quad 0 < x < \frac{9}{8}$$

4e. Løs differentiallyingning når to grafpunkter er givet.

Opgave En funktion p er løsning til differentiallyingningen

$$\frac{dp}{dt} = k - p .$$

Det oplyses at når $t=0$ er $p=2$, og at når $t=1$ er $p=1,5$.

Bestem en forskrift for p .

BEMÆRK: I deSolve bruger vi kun det ene af de to oplyste grafpunkter. Når vi har fundet forskriften, bruger vi det andet punkt til at bestemme k .

Besvarelse

Nspire bestemmer en forskrift for den løsning p til $\frac{dp}{dt} = k - p$ hvor $p(0)=2$, og får

$$p(t) = (2 - k) \cdot e^{-t} + k$$

Da $p(1)=1,5$, er $(2 - k) \cdot e^{-1} + k = 1,5$.

Nspire løser ligningen $(2 - k) \cdot e^{-1} + k = 1,5$ mht. k og får $k = 1,21$.

Den søgte forskrift er altså $p(t) = (2 - 1,21) \cdot e^{-t} + 1,21$, dvs.

$$\underline{p(t) = 0,79 \cdot e^{-t} + 1,21} .$$

Brug to forskellige punkter $(0, 2)$ og $(1, 1,5)$.

deSolve($p'=k-p$ and $p(0)=2,t,p$) $\rightarrow p=(2-k) \cdot e^{-t} + k$

solve($(2-k) \cdot e^{-1} + k=1,5,k$) $\rightarrow k=1.20901$

4f. Måske skal du selv indse at du skal løse differentiallyingningen.

Opgave Udviklingen i en væskes temperatur beskrives ved differentiallyingningen

$$\frac{dp}{dt} = k - p .$$

Der står ikke at du skal løse differentiallyingningen, men du er nødt til det da du skal bruge forskriften til at finde k .

hvor p er temperatur i °C. Tiden t måles i minutter. Til tidspunktet $t=0$ er temperaturen 2 °C. Efter 1 minut er temperaturen 1,5 °C. Bestem konstanten k .

Besvarelse Nspire bestemmer en forskrift for den løsning p til $\frac{dp}{dt} = k - p$ hvor $p(0)=2$, og får

$$p(t) = (2 - k) \cdot e^{-t} + k$$

Da $p(1)=1,5$, er $(2 - k) \cdot e^{-1} + k = 1,5$.

deSolve($p'=k-p$ and $p(0)=2,t,p$) $\rightarrow p=(2-k) \cdot e^{-t} + k$

Nspire løser ligningen $(2 - k) \cdot e^{-1} + k = 1,5$ mht. k og får $k = 1,21$.

solve($(2-k) \cdot e^{-1} + k=1,5,k$) $\rightarrow k=1.20901$

5. Opstille differentiallyingning.

5a. Opgave

På en skærm er et stort kvadrat med areal 500. Inden i det store kvadrat er et lille kvadrat med siden s . Den hastighed hvormed det lille kvadrats side vokser på tidspunktet t , er proportional med forskellen på det store kvadrats areal og det lille kvadrats areal. Proportionalitetskonstanten er 0,00792. Opstil en differentiallyingning der har $s(t)$ som løsning.

Besvarelse

s = lille kvadrats side $500 - s^2$ = forskel på stort og lille kvadrats areal

s' = hastighed hvormed s vokser

s' er proportional med forskel, dvs. s' er konstant gange forskel.

Konstanten er 0,00792, så $s' = 0,00792 \cdot (500 - s^2)$.

Jeg har brugt farver til at pege på det der er det samme. Du skal ikke bruge farver til eksamen.

Differentiallyingningen som har $s(t)$ som løsning, kan skrives på flere måder, f.eks.

$$s' = 0,00792 \cdot (500 - s^2) \text{ eller } s'(t) = 0,00792 \cdot (500 - s(t)^2) \text{ eller } \frac{ds}{dt} = 0,00792 \cdot (500 - s^2)$$

Til eksamen skal du kun skrive én af de tre ligninger.

6. Logistisk differentialligning

6a. Eksponentiel vækst.

Eksempel: En population vokser ofte **eksponentielt**, dvs. sådan at når antal individer y er større, så kommer der tilsvarende flere unger, Så er væksthastigheden y' proportional med antallet y , dvs. $y' = k \cdot y$.

Generelt: En størrelse y kan ændres sådan at

(1) størrelsens **væksthastighed** er proportional med **størrelsen**.

Med symboler kan dette skrives sådan:

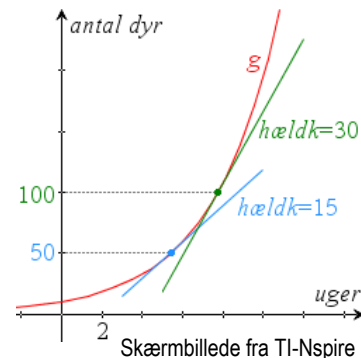
(2) $y' = k \cdot y$

Løsningerne til differentialligningen (2) er funktionerne

(3) $y(x) = c e^{kx}$

BEVIS for dette står i 7b.

Den **røde graf** viser udviklingen i antal dyr for en population der opfylder (1). $y' = \text{hædningskoefficient} = \text{væksthastighed}$.



På k 's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på k 's plads i differentialligningen. Uanset hvilket tal vi skriver på c 's plads, så får vi en løsning. Der er altså uendelig mange løsninger.

Ligningen (2) er et eksempel på en differentialligning, dvs. den ubekendte er en funktion, og funktionens differentialkvotient indgår.

En funktionen er en løsning til differentialligningen hvis den opfylder ligningen for hvert x i sin definitionsmængde.

6b. Logistisk vækst.

Eksempel: Når en population bliver større, vil væksthastighed ofte blive mindre fordi der er mindre plads.

Generelt: Den **logistiske ligning**

(4) $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$, $k > 0$, $M > 0$.

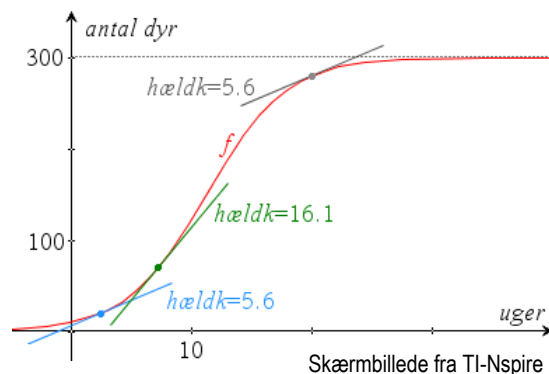
har for $0 < y < M$ løsningerne

(5) $y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-kM \cdot t}}$, $c > 0$.

Ligningen (4) udtrykker at

Størrelsens **væksthastighed** er proportional med **størrelsen** og med **størrelsens afstand til M** .

Den **røde graf** viser udviklingen i antal dyr for en population der opfylder (4). $y' = \text{hædningskoefficient} = \text{væksthastighed}$.



Når en størrelse y hvor $0 < y < M$, vokser sådan at

$y' = k \cdot y \cdot (M - y)$, $k > 0$, $M > 0$,

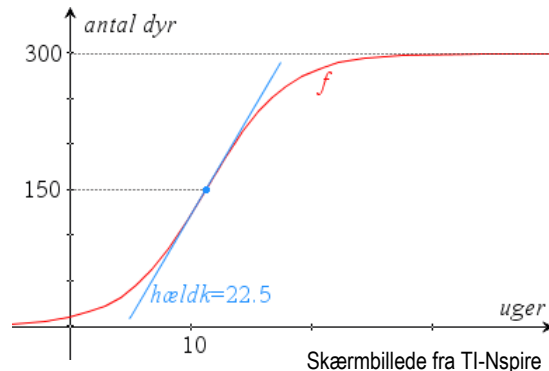
så gælder:

(7) Den **øvre grænse for størrelsen** er $y = M$.

(8) **Væksthastighed er størst** når størrelsen er $y = \frac{M}{2}$.

Tallet M kaldes **bæreevnen**.

På figuren er $M = 300$.



6c. Bestem forskrift for størrelsen.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) .$$

Til tiden $t = 0$ er vægten 20 gram.

Bestem en forskrift for m .

Besvarelse med Nspire

Nspire bestemmer forskrift for den løsning m til differentialligningen $\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ hvor

$$m(0) = 20 \text{ og får } m(t) = \frac{260 \cdot 1,47698^t}{1,47698^t + 12} . \quad \text{deSolve}(m'=0.0015 \cdot m \cdot (260-m) \text{ and } m(0)=20, t, m) \rightarrow m = \frac{260 \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12} .$$

Besvarelse med formel

m er løsning til differentialligningen $\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ og $m(0) = 20$.

Den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ har løsningerne $y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-kM \cdot t}}$.

Her er $k = 0,0015$, $M = 260$ og $k \cdot M = 0,39$ så $m(t) = \frac{260}{1 + c \cdot e^{-0,39 \cdot t}}$.

Da $m(0) = 20$, er $20 = \frac{260}{1 + c \cdot e^{-0,39 \cdot 0}}$ så $1 + c = \frac{260}{20}$ dvs. $c = 12$, så $m(t) = \frac{260}{1 + 12 \cdot e^{-0,39 \cdot t}}$.

Bemærkning

$$\frac{260}{1 + 12 \cdot e^{-0,39 \cdot t}} = \frac{260 \cdot e^{-0,39 \cdot t}}{(1 + 12 \cdot e^{-0,39 \cdot t}) \cdot e^{-0,39 \cdot t}} = \frac{260 \cdot e^{-0,39 \cdot t}}{e^{-0,39 \cdot t} + 12} \quad \text{og} \quad e^{-0,39 \cdot t} = (e^{-0,39})^t \approx 1,47698^t$$

6d. Bestem øvre grænse for størrelsen.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) .$$

Bestem den øvre grænse for vægten.

Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) .$$

For en løsning til den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ har y -værdien den øvre grænse M .

Her er $M = 260$, så den øvre grænse for vægten er **260 gram**.

6e. Bestem størrelsen når væksthastigheden er størst.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) .$$

Bestem vægten på det tidspunkt hvor væksthastigheden er størst.

Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) .$$

For en løsning til den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ er væksthastigheden størst når $y = \frac{M}{2}$.

Her er $\frac{M}{2} = \frac{260}{2} = 130$, så væksthastigheden er størst når vægten er **130 gram**.

6f. Bestem tidspunktet hvor væksthastigheden er størst.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) .$$

Til tiden $t = 0$ er vægten 20 gram.

Bestem det tidspunkt hvor væksthastigheden er størst.

Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) \text{ og til } t = 0 \text{ er } m = 20 .$$

Nspire bestemmer forskrift for den løsning m til $\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ hvor $m(0) = 20$ og får

$$m(t) = \frac{260 \cdot 1,47698^t}{1,47698^t + 12} . \quad \text{deSolve}(m'=0.0015 \cdot m \cdot (260-m) \text{ and } m(0)=20, t, m) \rightarrow m = \frac{260 \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12} .$$

For en løsning til den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ er væksthastigheden størst når $y = \frac{M}{2}$.

$$\text{Her er } \frac{M}{2} = \frac{260}{2} = 130 .$$

Nspire løser ligningen $130 = \frac{260 \cdot 1,47698^t}{1,47698^t + 12}$ mht. t og får $t = 6,37156$.

Væksthastigheden er størst til tiden **6,4 døgn** .

$$\text{solve}\left(130 = \frac{260 \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12}, t\right) \rightarrow t = 6.37156$$

6g. Tegn graf.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) .$$

Til tiden $t = 0$ er vægten 20 gram.

Tegn grafen for m .

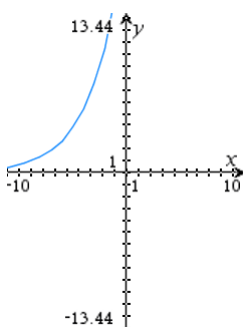
Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m) \text{ og til } t = 0 \text{ er } m = 20 .$$

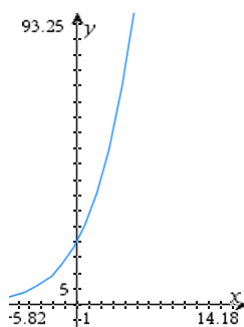
Nspire bestemmer forskrift for den løsning m til $\frac{dm}{dt} = 0,0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ hvor $m(0) = 20$ og får

$$m(t) = \frac{260 \cdot 1,47698^t}{1,47698^t + 12} . \quad \text{deSolve}(m'=0.0015 \cdot m \cdot (260-m) \text{ and } m(0)=20, t, m) \rightarrow m = \frac{260 \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12} .$$

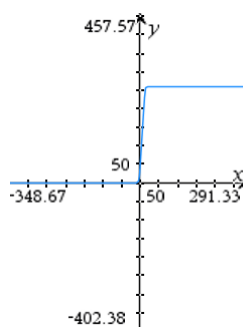
Nspire tegner grafen ud fra denne forskrift. Se figuren.



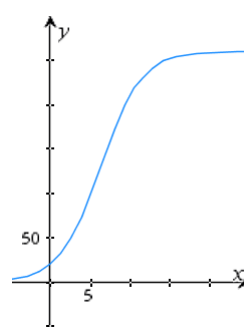
Dur ikke.



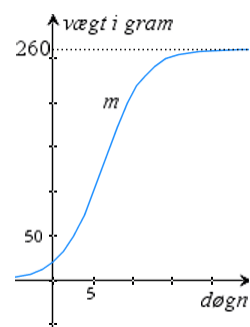
Dur ikke.



For dårlig.



Mangelfuld.



OK.

7. Beviser

7a. Hjælpesætning: $(e^{kx})' = k e^{kx}$

Bevis: For e^{kx} er den ydre funktion $e^{(\quad)}$, og den indre er kx .

Differentialkvotienten af den ydre er $e^{(\quad)}$, og differentialkvotienten af den indre er k .

Differentialkvotienten af e^{kx} er ydre differentieret (taget i indre) gange indre differentieret:

$(e^{kx})' = e^{(kx)} \cdot k = k e^{kx}$. Hermed har vi bevist hjælpesætningen.

7b. Sætning

Løsningerne til differentialligningen

(1) $y' = ky$

er funktionerne

(2) $y(x) = c e^{kx}$

På k 's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på k 's plads i differentialligningen. Uanset hvilket tal vi skriver på c 's plads, så får vi en løsning. Der er altså uendelig mange løsninger.

Første del af beviset: Vi beviser at hvis en funktion er løsning til (1), så er den af typen (2).

Anden del af beviset: Vi beviser at alle funktioner af typen (2) er løsninger til (1).

1. del af beviset for sætningen

Begrundelsen for at vi differentierer udtrykket i parentesen, er at det viser sig at vi så får noget vi kan bruge.

Hvis en funktion $y(x)$ har egenskaben (1) (dvs. er løsning til denne ligning) er

$$\begin{aligned} (y \cdot e^{-kx})' &= y' \cdot e^{-kx} + y \cdot (-k e^{-kx}) && \text{regel for at differentiere produkt} \\ &= ky \cdot e^{-kx} + y \cdot (-k e^{-kx}) && \text{da vi forudsatte (1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da $y \cdot e^{-kx}$ differentieret giver 0, må $y \cdot e^{-kx}$ være lig en konstant:

$$y \cdot e^{-kx} = c$$

Vi ganger begge denne lignings sider med e^{kx} og får

$$y = c e^{kx} \quad \text{da} \quad e^{-kx} \cdot e^{kx} = e^{-kx+kx} = e^0 = 1$$

dvs. funktionen er af typen (2).

2. del af beviset for sætningen

En vilkårlig funktion $c e^{kx}$ af typen (2) indsætter vi for y i ligningen $y' = ky$ og får

$$(c e^{kx})' = k c e^{kx}$$

Venstre side af ligningen giver $k c e^{kx}$, dvs. ligningen passer, så

funktionen $c e^{kx}$ har egenskaben (1) (dvs. er løsning til denne ligning).

B		logistisk vækst	7
bevis.....	10	løsning.....	1, 2, 5, 6, 8
bæreevne.....	7	O	
D		opstil	1, 6
differentialligning.....	1	P	
E		proportional.....	6, 7
eksponentiel vækst.....	7	proportionalitetskonstant	6
F		T	
forskrift for løsning.....	5, 6, 8	tangent.....	3
G		tilfredsstille	1
graf.....	9	V	
L		væksthastighed.....	4, 7
logistisk differentialligning	7	væksthastighed størst.....	7, 8, 9
logistisk ligning	7	Ø	
logistisk ligning, formel for løsning	7	øvre grænse.....	7, 8
logistisk ligning, løs med formel	8		